مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو

تألیف ادوارد ج. باربو/ ماری س. کلامکین
ویلیام اُ. ج. موزر

ترجمهٔ مهران اخباریفر

انتشارات فاطمی

کتاب **پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو** حاصل تلاش سه تن از برجسته‌ترین طراحان مسأله های پیکارجوی ریاضی‌است. در این کتاب مسأله های گوناگونی در موضوعات مختلف ریاضیات دبیرستانی گردآوری شده است. تنوع مسأله‌های کتاب به حدی است که خوانندگان با هر میزان علاقه و توانایی کتاب را جالب و آموزنده خواهند یافت.

این کتاب پایه‌ای قوی برای دانش‌آموزانی که قصد شرکت در مسابقاتی در سطح المپیادهای ریاضی دارند فراهم می‌کند، و مطالعهٔ آن برای دبیران و سایر علاقه‌مندان مفید است.

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو

تألیف ادوارد ج. باربو / ماری س. کلامکین
ویلیام اُ. ج. موزر

ترجمهٔ مهران اخباریفر

انتشارات فاطمی

Five Hundred Mathematical Challenges
Edward J. Barbeau / Murray S. Klamkin / William O.J. Moser
The Mathematical Association of America, 1995

پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو

مؤلفان: ادوارد ج. باربو، ماری س. کلامکین، ویلیام اُ. ج. موزر
مترجم: مهران اخباریفر
ویراستار: ارشک حمیدی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ دوم، ۱۳۸۱
شابک ۳_۲۵۳_۳۱۸_۹۶۴
ISBN 964-318-253-3
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
- مدیر تولید: فرید مصلحی
- طراح جلد: زهرا قورچیان
- حروفچینی (TEX-پارسی): هنگامه صادقی
- صفحه‌بندی: آناهیتا کاویانی
- صفحه‌آرا: حسین ابراهیمی
- نمونه‌خوان: فاطمه ثقفی
- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانژاد

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ خاشع

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ - خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۹۶۱۴۲۲ - ۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

Barbeau, Edward J. باربو، ادوارد
پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو / تألیف ادوارد ج. باربو، ماری س. کلامکین، ویلیام ا. ج. موزر؛ ترجمهٔ مهران اخباریفر؛ ویراستار ارشک حمیدی. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۷۷.
ده، ۳۷۰ ص.: مصور.ــ (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی)
ISBN 964-318-253-3
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان به انگلیسی: Five hundred mathematical challenges.
نمایه.
چاپ دوم: ۱۳۸۱.
۱. المپیادها (ریاضیات). ۲. ریاضیات ـ ـ مسائل، تمرینها و غیره. ۳. ریاضیات ـ ـ مسابقه‌ها. الف. کلامکین، ماری، Klamkin, Murray S. ب. موزر، ویلیام، ۱۹۲۷ - ، Moser, William O. J. ج. اخباریفر، مهران، ۱۳۴۵- ، مترجم. د. عنوان.
۲پ۲ب/۲۴/LB۳۰۶۰ ۳۷۳/۲۳۸
۱۳۷۷
کتابخانهٔ ملی ایران م۷۷_۱۲۳۹۷

فهرست

به‌نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: **عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان.** هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این‌رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر **المپیاد ریاضی** اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقهٔ اتووش به نام **بارون لوراند اتووش**[1] به‌صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به‌کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی **المپیاد بین‌المللی ریاضی** شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در

1. Baron Loránd Eötvös

سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به انتشار مجموعهٔ **آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضی ۲ نظام جدید در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

کتاب حاضر از دستهٔ دوم و حاوی پانصد مسأله در موضوعات مختلف ریاضیات دبیرستانی است. برخی از این مسأله‌ها معماهای ریاضی ساده‌ای هستند و برخی دیگر کاملاً دشوار و در سطح مسأله‌های المپیادهای ریاضی.

این کتاب پایه‌ای قوی برای دانش‌آموزانی که قصد شرکت در مسابقاتی در سطح المپیادهای ریاضی دارند فراهم می‌کند، و مطالعهٔ آن برای دبیران و سایر علاقه‌مندان مفید است.

پیشگفتار

این مجموعه مسائل برای دانش‌آموزان دبیرستان و دانشجویان کالج و دانشگاه گردآوری شده است. بعضی از این مسأله‌ها ساده‌اند و برای حل آنها چیزی جز عقل سلیم و روشن‌اندیشی لازم نیست. برای حل برخی مسأله‌های دیگر ممکن است دانستن بعضی از نتایج و فنونی که در پیوست آخر کتاب آورده‌ایم لازم باشد. برای حل هیچ‌یک از مسأله‌ها دانستن حسابان لازم نیست. به‌همین سبب، این مجموعه را می‌توان «مسأله‌هایی در ریاضیات پیش‌ـحسابان» نامید. اما این مسأله‌ها مطمئناً مسأله‌هایی معمولی یا «تمرینی» که درکتابهای درسی یافت می‌شوند نیستند. اینها را می‌توان مسأله‌هایی هیجان‌انگیز، جالب، تفکر برانگیز یا جذاب قلمداد کرد. در بسیاری از این مسأله‌ها «بن‌مایهٔ» ریاضیات واقعی وجود دارد؛ درواقع چندتایی از این مسأله‌ها ساده‌ترین حالتهای مسائل پژوهشی‌اند. بنابراین، چنین مسأله‌هایی باید بینشی نسبت به اینکه پژوهش ریاضی چیست ایجاد کنند.

این مجموعه به دانش‌آموزانی تقدیم می‌شود که از دست‌وپنجه نرم کردن با، و سرانجام غلبه بر، مسأله‌ای که راه‌حل آن از ابتدا روشن نیست لذت می‌برند. این مجموعه همچنین به معلمانی تقدیم می‌شود که دانش‌آموزان خود را به فرا رفتن از حیطهٔ امن تمرینهای پیش‌ساخته و تجربهٔ جنبهٔ خلاق ریاضیات تشویق می‌کنند. معلمان در این مجموعه مسأله‌هایی برای به چالش خواستن دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضیات، مانند اعضای باشگاههای ریاضی یا شرکت‌کنندگان در دوره‌های آموزشی مسابقات ریاضی، خواهند یافت. جست‌وجوی راه‌حلها را می‌توان به‌صورت گروهی انجام داد، چون در پژوهش اغلب وقتی‌که کوششهای انفرادی به نتیجه نمی‌رسد همکاری به موفقیت می‌انجامد.

تا وقتی‌که مبارزهٔ شما با مسأله‌ای به پیروزی چشمگیر یا شکست یأس‌آوری منجر نشده است به‌سراغ راه‌حل آن مسأله نروید. راه‌حلهایی را که ما داده‌ایم نباید راه‌حل بی‌چون‌وچرا بدانید، اگرچه این راه‌حلها ممکن است امکاناتی را برای بررسی حالتهای مشابه پیشنهاد کنند. مسأله‌ای خاص را ممکن

است بتوان به چند طریق مختلف، با رهیافتهای متفاوت که جنبه‌های گوناگونی را نشان می‌دهند حل کرد. بعضی از راه‌حلها سرراست‌اند، درحالی‌که راه‌حلهای دیگری ممکن است زیبا و پیچیده باشند. به‌همین دلیل، اغلب بیش از یک راه‌حل عرضه کرده‌ایم. ممکن است شما هم راه‌حلهای دیگری را کشف کنید.

بسیاری از این مسأله‌ها را ممکن است قبلاً ندیده باشید، هرچند که ما هم ادعایی در مورد تازگی اکثر این مسأله‌ها نداریم. اقرار می‌کنیم که به طراحان گمنام مسأله‌ها مدیونیم و می‌دانیم که طرح مسأله‌ای که جالب، هیجان‌انگیز، آموزنده و قابل‌حل باشد و تحمل‌ناپذیر و خسته‌کننده نباشد چقدر دشوار است. جز چند استثنا، همهٔ مسأله‌ها در مجموعه‌ای شامل پنج کتابچه که توسط انجمن ریاضی کانادا منتشر شده است آمده‌اند. اولین کتابچه از این مجموعه در سال ۱۹۷۳ منتشر شد. بعد از آن، این کتابچه‌ها پیوسته منتشر شده‌اند و اکنون ما فکر می‌کنیم که نسخهٔ ویرایش‌شده و اصلاح‌شده‌ای از همهٔ آنها باهم مفید است.

گردآوری و طرح مسأله‌ها، و همچنین ویرایش آنها، برای ما تجربه‌ای آموزنده و رضایت‌بخش بوده است. بیشترین رضایت را وقتی احساس خواهیم کرد که معلمان و دانش‌آموزان این مجموعه را سودمند و قابل مطالعه بیابند.

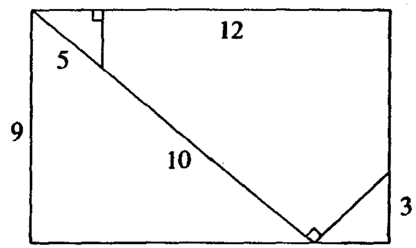
ا. باربو، م. کلامکین، و. موزر

مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. طول ضلعهای مثلثی قائم‌الزاویه سه جملهٔ متوالی تصاعدی حسابی‌اند. ثابت کنید که نسبت طول ضلعهای این مثلث ۵ : ۴ : ۳ است.

مسألهٔ ۲. همهٔ پاره‌خطهایی به‌طول ۴ را در نظر بگیرید که یک سرشان روی خط $y = x$ و سر دیگرشان روی خط $y = ۲x$ قرار دارد. معادلهٔ مکان‌هندسی نقطهٔ وسط این پاره‌خطها را بیابید.

مسألهٔ ۳. مستطیلی را مطابق شکل ۱ تقسیم کرده‌ایم. برخی از طولها در شکل نموده شده است. اگر قطعه‌های مستطیل را طوری مرتب کنیم که مربعی تشکیل دهند، محیط این مربع چه خواهد بود؟



شکل۱

مسألهٔ ۴. ملاحظه کنید که

$$۳^۲ + ۴^۲ = ۵^۲$$
$$۵^۲ + ۱۲^۲ = ۱۳^۲$$
$$۷^۲ + ۲۴^۲ = ۲۵^۲$$
$$۹^۲ + ۴۰^۲ = ۴۱^۲$$

قانونی کلی که از این مثالها به ذهن می‌رسد بیان و آن‌را ثابت کنید.

مسألهٔ ۵. مجموع زیر را حساب کنید

$$۶ + ۶۶ + ۶۶۶ + \cdots + \underbrace{۶۶۶\ldots۶}_{n \text{ تا}} \qquad (n \geqslant ۱)$$

مسألهٔ ۶. اکرم، مژگان و راحیل در امتحانهای یکسانی شرکت کردند. در هر امتحان یک نمرهٔ x، یک نمرهٔ y، و یک نمرهٔ z اخذ شده است، و x، y و z عددهایی طبیعی و متمایزند. مجموع نمره‌هایی که این دختران در امتحانها گرفته‌اند چنین است: اکرم، ۲۰؛ مژگان، ۱۰؛ راحیل، ۹. اگر مژگان بالاترین نمره را در امتحان جبر گرفته باشد، چه کسی دومین نمره را در امتحان هندسه گرفته است؟

مسألهٔ ۷. فرض کنید $f_{0}(x)=\frac{1}{1-x}$ و

$$f_n(x)=f_{0}(f_{n-1}(x)),\qquad n=1,2,3,4,\ldots$$

$f_{1976}(1976)$ را حساب کنید.

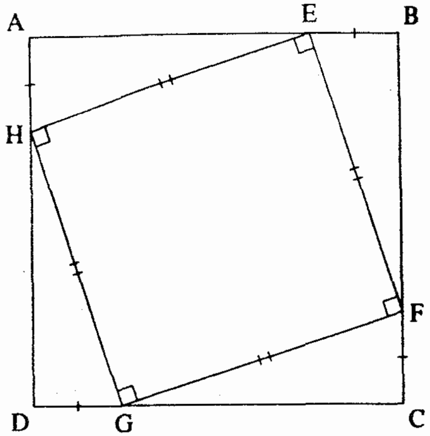
مسألهٔ ۸. ثابت کنید از میان هر پنج عدد صحیح که لزوماً متمایز نیستند، همواره می‌توان سه عدد انتخاب کرد که مجموعشان بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۹. آقای محمدی هر روز به شهری در نزدیکی محل اقامت خود می‌رود و همیشه برای برگشتن به منزل سوار قطاری می‌شود که ساعت ۵ بعدازظهر به ایستگاه محل اقامت او می‌رسد. در این‌حال همیشه راننده‌اش به‌آنجا می‌رسد، بلافاصله او را سوار اتومبیل می‌کند و به‌طرف منزل به‌راه می‌افتد. یک‌روز آقای محمدی سوار قطاری می‌شود که زودتر حرکت می‌کند و ساعت ۴ بعدازظهر به ایستگاه محل اقامت او می‌رسد. آقای محمدی به‌جای اینکه به راننده‌اش تلفن کند یا تا ساعت ۵ بعدازظهر منتظر او بماند، قدم‌زنان به‌سوی منزل به راه می‌افتد. در راه راننده‌اش را می‌بیند، سوار اتومبیل می‌شود و ۲۰ دقیقه زودتر از معمول به منزل می‌رسد. چند هفته بعد، باز هم آقای محمدی سوار قطاری می‌شود که زودتر حرکت می‌کند و ساعت ۳۰ : ۴ بعدازظهر به ایستگاه محل اقامت او می‌رسد. آقای محمدی باز هم به‌جای منتظر ماندن، قدم‌زنان به‌سوی منزل به‌راه می‌افتد. در راه راننده‌اش را می‌بیند، بلافاصله سوار اتومبیل می‌شود و به منزل برمی‌گردد. این‌بار آقای محمدی چند دقیقه زودتر از معمول به منزل می‌رسد؟

مسألهٔ ۱۰. فرض کنید مرکزثقل ظرف آبی بالاتر از کفِ ظرف باشد. آنقدر آب در ظرف می‌ریزیم تا مرکزثقل ترکیب ظرف و آب در پایینترین نقطهٔ ممکن قرار گیرد. توضیح دهید که چرا مرکزثقل این ترکیب «نهایی» باید در سطح آب باشد.

مسألهٔ ۱۱. پدر و مادری به‌همراه پسر خود تصمیم می‌گیرند که یک مسابقهٔ دوره‌ای خانوادگی ترتیب دهند. آنها بازی دونفره‌ای را انجام می‌دهند که در آن هر بازی حتماً برنده‌ای دارد (یعنی تساوی پیش نمی‌آید). بعد از هر بازی برنده با کسی که در این بازی شرکت نکرده است بازی می‌کند. برندهٔ دوره اولین کسی است که دو بازی را (که ممکن است متوالی نباشند) برده باشد. اعضای خانواده توافق می‌کنند که پدر، یعنی مسنترین فرد خانواده، حق انتخاب بین شرکت کردن یا شرکت نکردن در بازی اول را داشته باشد. به پدر چه توصیه‌ای می‌کنید: در بازی اول شرکت کند یا نه؟ (المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۷۴)

مسألهٔ ۱۲. $EFGH$ مربعی است که مطابق شکل ۲ در چهارضلعی $ABCD$ محاط شده است. اگر $\overline{HA} = \overline{GD} = \overline{FC} = \overline{EB}$، ثابت کنید $ABCD$ نیز مربع است.



شکل۲

مسألهٔ ۱۳. ثابت کنید از بین هر هفت عدد طبیعی متمایز که از ۱۲۶ بزرگتر نیستند، می‌توان دو عدد، مانند x و y، یافت که در نابرابریهای $۱ < \frac{y}{x} \leqslant ۲$ صدق کنند.

مسألهٔ ۱۴. ثابت کنید که اگر ۵ نقطه در درون یا بر روی مربعی به ضلع ۱ واقع باشند، آنگاه در میان این نقطه‌ها دو نقطه هست که فاصلهٔ آنها از یکدیگر بیشتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ نیست.

مسألهٔ ۱۵. در یک مبارزهٔ انتخاباتی نامزدها n نوع قول متفاوت داده‌اند، $n > ۰$، و قولهای هیچ دو نامزدی دقیقاً یکسان نیست. ممکن است چند نامزد قول یکسانی داده باشند، اما هر دو نامزد دست‌کم یک قول یکسان داده‌اند. ثابت کنید امکان اینکه $۲^{n-۱}$ نفر خود را برای این انتخابات نامزد کرده باشند وجود دارد، اما تعداد نامزدها بیشتر از این نیست.

مسألهٔ ۱۶. صفحهٔ شطرنج $(۲m+۱) \times (۲n+۱)$ای مفروض است که در چهارگوشهٔ آن مربعهای سیاه قرار دارد. ثابت کنید که اگر یک مربع سفید و دو مربع سیاه از این صفحهٔ شطرنج حذف شوند، باقی‌ماندهٔ آن‌را می‌توان با مستطیلهای ۲×۱ پوشاند.

مسألهٔ ۱۷. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $D(n)$ را به‌طور بازگشتی چنین تعریف می‌کنیم

$$D(n) = \begin{cases} n & ۱ \leqslant n \leqslant ۹ \\ D(a_۰ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_m) & n > ۹ \end{cases}$$

که در آن $a_۰$، $a_۱$، … و a_m همهٔ رقمهای n در پایهٔ ۱۰ هستند، یعنی

$$n = a_m ۱۰^m + a_{m-۱} ۱۰^{m-۱} + \cdots + a_۱ ۱۰ + a_۰$$

مثلاً $D(۹۸۹) = D(۲۶) = D(۸) = ۸$. ثابت کنید

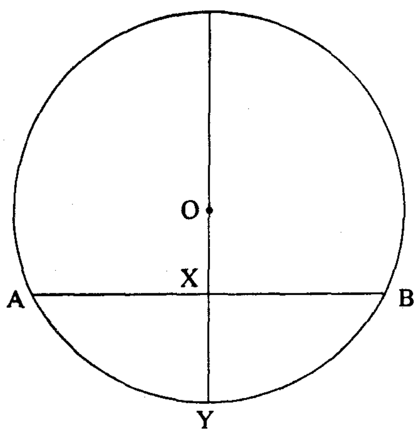
$$D((۱۲۳۴)n) = D(n), \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

مسألهٔ ۱۸. سه نقطهٔ A، B و C مفروض‌اند. مربعی به مرکز A چنان رسم کنید که دو ضلع مجاور (یا امتدادهای دو ضلع مجاور) از آن یکی از B بگذرد و دیگری از C.

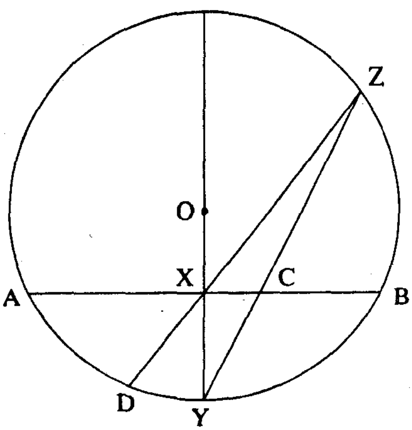
مسألهٔ ۱۹. با برهانی مقدماتی ثابت کنید

$$\sqrt{n}^{\sqrt{n+۱}} > \sqrt{n+۱}^{\sqrt{n}}, \qquad n = ۷, ۸, ۹, \ldots$$

مسألهٔ ۲۰. اگر در دایره‌ای به مرکز O، OXY بر وتر AB عمود باشد (چنان‌که در شکل ۳ نشان داده شده است)، ثابت کنید $\overline{DX} \leqslant \overline{CY}$ (شکل ۴ را ببینید). (پ. اردوش و م. کلامکین)



شکل ۳



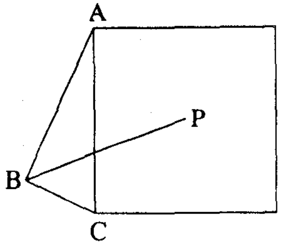
شکل ۴

مسألهٔ ۲۱. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، … و a_n، n عدد طبیعی‌اند. ثابت کنید که به‌ازای i و kای $(۱ \leqslant i \leqslant i+k \leqslant n)$ $a_i + a_{i+۱} + \cdots + a_{i+k}$ بر n بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۲. تعدادی متناهی نقطه در صفحه مفروض و فاصله‌هایشان (ازهم) متمایزند. هر یک از این نقطه‌ها را با پاره‌خط راستی به نزدیکترین نقطه به‌آن وصل می‌کنیم. ثابت کنید که در شکل حاصل هیچ مثلثی وجود ندارد.

مسألهٔ ۲۳. ثابت کنید که اگر m عدد گویای مثبتی باشد، $m + \frac{۱}{m}$ فقط وقتی عددی صحیح است که $m = ۱$.

مسألهٔ ۲۴. فرض کنید P مرکز مربعی باشد که روی AC، وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، رسم شده است. ثابت کنید BP زاویهٔ ABC را نصف می‌کند. (شکل ۵ را ببینید.)



شکل۵

مسألهٔ ۲۵. چهار خط متمایز L_1، L_2، L_3 و L_4 در صفحه مفروض‌اند، به‌طوری‌که L_1 موازی L_3 و L_2 موازی L_4 است. مکان‌هندسی نقطهٔ متحرکی را بیابید که همواره مجموع فاصله‌هایش از این چهار خط ثابت می‌ماند.

مسألهٔ ۲۶. پنج نقطه در صفحه مفروض‌اند، به‌طوری‌که همهٔ آنها روی یک خط قرار ندارند و هیچ چهارتایی از آنها بر یک دایره واقع نیستند. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که از سه تا از این نقطه‌ها می‌گذرد، به‌طوری‌که یکی از دو نقطهٔ باقی‌مانده درون این دایره و نقطهٔ دیگر بیرون از آن واقع است.

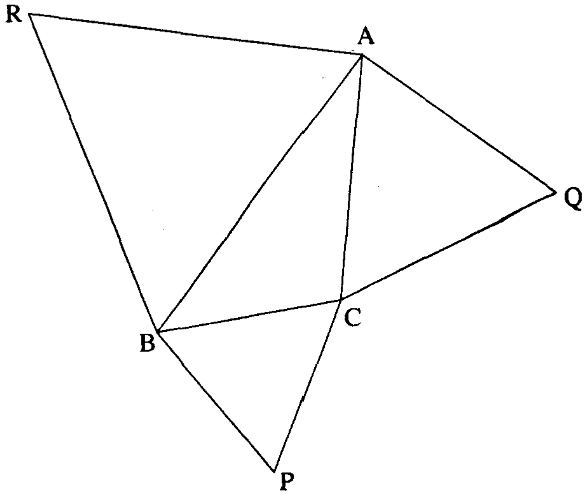
مسألهٔ ۲۷. فرض کنید ABC مثلثی دلخواه و P نقطه‌ای درون آن باشد. فرض کنید d_1، d_2 و d_3 به‌ترتیب فاصله‌های نقطهٔ P از ضلعهای BC، CA و AB باشند. فرض کنید h_1، h_2 و h_3 به‌ترتیب طول ارتفاعهای وارد بر ضلعهای روبه‌رو به A، B و C باشند. ثابت کنید

$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}=1$$

مسألهٔ ۲۸. در هر یک از n خانه‌ای که در امتداد خطی راست واقع‌اند پسری زندگی می‌کند. این n پسر باید در چه نقطه‌ای قرار ملاقات بگذارند تا مجموع مسافتهایی که هر یک از آنها از خانه تا محل ملاقات می‌پیماید به حداقل ممکن برسد؟

مسألهٔ ۲۹. فرض کنید P یکی از دو نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ متقاطع باشد. از P خطی مانند l رسم کنید که شامل وتر مشترک دو دایره نباشد و دو دایره پاره‌خطهایی برابر روی l جدا کنند.

مسألهٔ ۳۰. روی هر ضلع مثلث دلخواه ABC، مانند شکل ۶، مثلثی متساوی‌الاضلاع (در بیرون ABC) رسم شده است. ثابت کنید $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}$.



شکل۶

مسألهٔ ۳۱. ثابت کنید که اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد،

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

عددی صحیح نیست.

مسألهٔ ۳۲. دو نقطه روی کره‌ای به شعاع ۱ با کمانی که طولش از ۲ کمتر و روی کره واقع است به یکدیگر وصل شده‌اند. ثابت کنید که این کمان باید در یک نیمکرهٔ کرهٔ مفروض واقع باشد (المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۷۴).

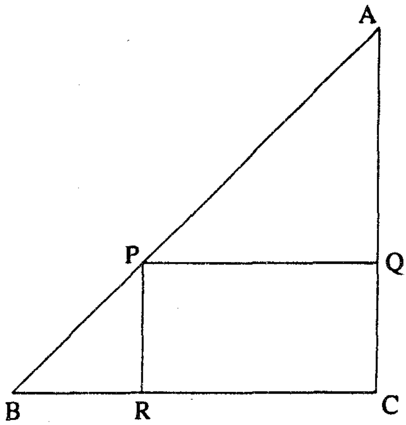
مسألهٔ ۳۳. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n+2}{6}\right]+\left[\frac{n+4}{6}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n+3}{6}\right]$$

مسألهٔ ۳۴. ثابت کنید مجموع همهٔ عددهای طبیعی n رقمی $(n>2)$ برابر است با

$$494\underbrace{99\cdots9}_{n-3\ \text{تا}\ 9}55\underbrace{00\cdots0}_{n-2\ \text{تا}\ 0}$$

مسألهٔ ۳۵. فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه باشد که طول هر یک از دو ضلع برابرش ۱ است. P نقطه‌ای روی وتر این مثلث است و Q و R پای عمودهایی هستند که از P بر دو ضلع دیگر مثلث رسم شده‌اند. مساحت مثلثهای APQ و PBR و مساحت مستطیل $QCRP$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید بدون توجه به محل انتخاب نقطهٔ P، بزرگترین مساحت بین این سه مساحت دست‌کم $\frac{2}{9}$ است. (شکل ۷ را ببینید.)



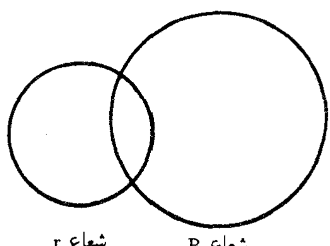
$\overline{BC} = \overline{CA} = ۱$ شکل۷

مسألهٔ ۳۶. ثابت کنید مساحت مثلثی با طول ضلعهای ۵، ۵ و ۶ برابر با مساحت مثلثی با طول ضلعهای ۵، ۵ و ۸ است. زوجهای دیگری از مثلثهای متساوی‌الساقین غیرهمنهشت بیابید که طول ضلعهایشان عددهایی صحیح باشند و مساحتهایی برابر داشته باشند.

مسألهٔ ۳۷. هر یک از چهار رأس چهارضلعیی روی یکی از ضلعهای مربعی به طول ضلع ۱ واقع‌اند. اگر طول ضلعهای این چهارضلعی a، b، c و d باشند، ثابت کنید

$$۲ \leqslant a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ \leqslant ۴$$

مسألهٔ ۳۸. دایره‌ای به شعاع r دایرهٔ دیگری به شعاع R را قطع کرده است $(R > r)$. (شکل ۸ را ببینید.) تفاضل مساحت بخشهای غیرمشترک دو دایره را بیابید.



شکل۸

مسألهٔ ۳۹. عدد ۳ را به چهار روش می‌توان به‌شکل مجموع مرتبی از یک یا چند عدد طبیعی نوشت، یعنی

$$۳,\ \ ۱+۲,\ \ ۲+۱,\ \ ۱+۱+۱$$

ثابت کنید که عدد طبیعی n را به $۲^{n-۱}$ روش می‌توان به‌شکل مجموع مرتبی از یک یا چند عدد طبیعی نوشت.

مسألهٔ ۴۰. تیمهای $T_۱$، $T_۲$، $\cdots$ و T_n در مسابقه‌ای دوره‌ای شرکت کرده‌اند که در آن هر تیم با تیمهای

دیگر دقیقاً یک‌بار بازی می‌کند. هر برد یک امتیاز دارد و فرض بر این است که هیچ‌کدام از بازیها به نتیجهٔ تساوی ختم نمی‌شود. فرض کنید s_1، s_2، $\cdots$ و s_n به‌ترتیب امتیاز (کلّ) تیمهای T_1، T_2، $\cdots$ و T_n باشند. ثابت کنید که اگر $1 < k < n$،

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_k \leqslant nk - \frac{1}{2}k(k+1)$$

مسألهٔ ۴۱. ملاحظه کنید که

$$1^2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$$

$$1^2 + 3^2 = \frac{3 \times 4 \times 5}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = \frac{5 \times 6 \times 7}{6}$$

قانونی کلی که از این مثالها به ذهن می‌رسد حدس بزنید و آن‌را ثابت کنید.

مسألهٔ ۴۲. در این مسأله نباید از هیچ «وسیلهٔ کمکی» مثل جدول، ماشین‌حساب، و غیره، کمک‌بگیرید.

الف) ثابت‌کنید مقدارهای x که در معادلهٔ $\frac{x^2+1}{198} = x$ صدق می‌کنند، بین $\frac{1}{198}$ و $197{,}99494949\cdots$ واقع‌اند.

ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف) ثابت کنید که

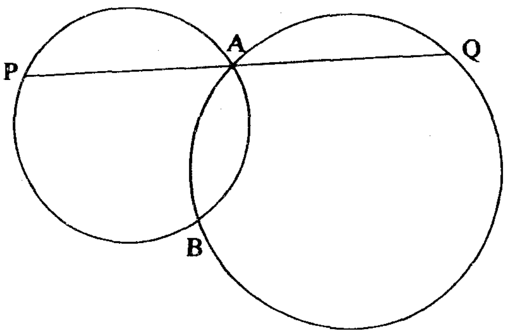
$$\sqrt{2} < 1{,}414213564213564213 56\cdots$$

ج) آیا $\sqrt{2} < 1{,}41421356$؟

مسألهٔ ۴۳. ثابت کنید که اگر ۵ سنجاق به ورقه‌ای از مقوا به‌شکل مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌طول ضلع ۲ فرو کنیم، فاصلهٔ ۲تا از این سنجاقها از یکدیگر از ۱ کمتر خواهد بود.

مسألهٔ ۴۴. تعداد زوجی نقطه در صفحه مفروض‌اند. آیا خط راستی وجود دارد که در هر طرفش نصف این نقاط واقع باشند؟

مسألهٔ ۴۵. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطع‌اند. (شکل ۹ را ببینید.) PQ پاره‌خطی است که از A



شکل۹

می‌گذرد و دو سرش بر این دو دایره واقع‌اند. ثابت کنید که مقدار $\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$ به‌ازای هر وضعیت قابل‌قبولی از PQ ثابت است.

مسألهٔ ۴۶. فرض کنید $f(n)$ مجموع نخستین n جملهٔ دنبالهٔ زیر باشد:

$$۰, ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۳, ۴, ۴, \cdots, r, r, r+۱, r+۱, \cdots$$

الف) دستوری برای $f(n)$ بیابید.

ب) اگر s و t عددهایی طبیعی باشند و $s > t$، ثابت کنید

$$f(s+t) - f(s-t) = st$$

مسألهٔ ۴۷. سه نقطهٔ ناهمخط P، Q و R مفروض‌اند. مثلثی بیابید که نقاط P، Q و R وسط اضلاعش باشند.

مسألهٔ ۴۸. ثابت کنید $۵^{۹۹} + ۴^{۹۹} + ۳^{۹۹} + ۲^{۹۹} + ۱^{۹۹}$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۴۹. ثابت کنید عددهایی صحیح مانند a، b و c وجود ندارند که $a^۲ + b^۲ - ۸c = ۶$.

مسألهٔ ۵۰. اگر a، b، c و d چهار عدد متمایز باشند، می‌توانیم شش مجموع از هر دو تا از آنها تشکیل دهیم، یعنی $a+b$، $a+c$، $a+d$، $b+c$، $b+d$ و $c+d$. عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ را به دو مجموعهٔ چهارعضوی طوری تقسیم کنید که این شش مجموع برای دو مجموعه (بدون توجه به‌ترتیب) یکی باشند. همهٔ راههای ممکن را برای انجام این‌کار بنویسید.

مسألهٔ ۵۱. اگر $۲\log(x - ۲y) = \log x + \log y$، $\frac{x}{y}$ را بیابید.

مسألهٔ ۵۲. فرض کنید f تابعی با ویژگیهای زیر باشد:

۱. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $f(n)$ تعریف شده است؛
۲. $f(n)$ عددی صحیح است؛
۳. $f(۲) = ۲$؛
۴. به‌ازای هر m و n، $f(mn) = f(m)f(n)$؛
۵. اگر $m > n$، $f(m) > f(n)$.

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $f(n) = n$.

مسألهٔ ۵۳. اگر خط l در فضا با سه خط مفروض در صفحهٔ π زاویه‌های مساوی بسازد، ثابت کنید که l بر π عمود است.

مسألهٔ ۵۴. فرض کنید

$$a = \underbrace{۱۱۱\cdots۱}_{m \text{ تا } ۱}$$

و

$$b = ۱\underbrace{۰۰\cdots۰۰}_{۰ \text{ تا } m-۱}۵$$

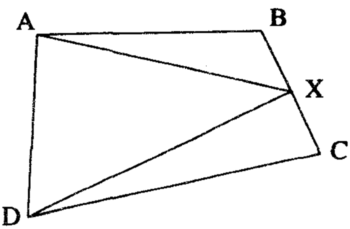
ثابت کنید $ab+۱$ مربع عددی صحیح است. ریشهٔ دوم $ab+۱$ را به همان شکلی که a و b نوشته شده‌اند بنویسید.

مسألهٔ ۵۵. دو دیرک پرچم به طولهای h و k به فاصلهٔ $۲a$ واحد از یکدیگر در سطحی افقی قرار گرفته‌اند. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی از این سطح افقی را بیابید که در هر یک از آنها زاویهٔ فراز نوک دو دیرک یکی باشد.

مسألهٔ ۵۶. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!} < ۳$$

مسألهٔ ۵۷. فرض کنید X نقطه‌ای بین B و C روی ضلع BC از چهارضلعی محدب $ABCD$ باشد (مانند شکل ۱۰). خطی از B موازی با AX و خطی از C موازی با DX رسم می‌کنیم. این دو خط یکدیگر را در P قطع می‌کنند. ثابت کنید مساحت مثلث APD با مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر است.



شکل ۱۰

مسألهٔ ۵۸. فرض کنید

$$s_n = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

ثابت کنید $۲\sqrt{n+۱} - ۲ < s_n < ۲\sqrt{n} - ۱$.

مسألهٔ ۵۹. ثابت کنید که در هر چهارضلعی محاط در دایره‌ای به شعاع ۱، طول کوتاهترین ضلع از $\sqrt{۲}$ بیشتر نیست.

مسألهٔ ۶۰. ثابت کنید که اگر چهارضلعی محدبی چهار زاویهٔ ۹۰° داشته باشد باید مستطیل باشد.

مسألهٔ ۶۱. شش توپ هم‌اندازه دارید که ۲ تا از آنها قرمز، ۲ تا سفید و ۲ تا آبی است. در ضمن، از هر رنگ یکی از توپها ۱۵ گرم و توپ دیگر ۱۶ گرم وزن دارد. سه توپ ۱۶ گرمی را فقط با دوبار استفاده از یک ترازوی شاهین‌دار شناسایی کنید.

مسألهٔ ۶۲. هواپیمایی با سرعت موتور ثابت از شهر A به شهر B پرواز می‌کند و سپس مجدداً به A برمی‌گردد. می‌توانید از زمان دور زدن بر فراز شهر B چشمپوشی کنید. زمان این مسافرت در کدام

حالت بیشتر است: وقتی‌که باد نمی‌وزد یا وقتی‌که باد با سرعت ثابت در جهت A به B می‌وزد؟ (آیا جوابتان با شهود شما یکی است؟)

مسألهٔ ۶۳. چهاروجهی $OABC$ چنان است که هر جفت از خطهای OA، OB و OC متعامدند. ثابت کنید مثلث ABC قائم‌الزاویه نیست.

مسألهٔ ۶۴. همهٔ سه‌تاییهای عددی مانند (x, y, z) را چنان بیابید که وقتی هر یک از این عددها با حاصل‌ضرب دو عدد دیگر جمع شود حاصل ۲ باشد.

مسألهٔ ۶۵. نُه نقطه درون مربعی به‌طول ضلع ۱ مفروض‌اند. ثابت کنید مثلثی وجود دارد که رأسهایش سه نقطه از این ۹ نقطه و مساحتش حداکثر $\frac{۱}{۸}$ است. (مسألهٔ ۱۴ یا مسألهٔ ۴۳ را نیز ببینید.)

مسألهٔ ۶۶. فرض کنید a، b و c طول ضلعهای مثلثی باشند. ثابت کنید که اگر

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ = bc + ca + ab$$

این مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مسألهٔ ۶۷. طول ضلعهای مثلثی a، b و c و طول ارتفاعهای وارد بر این ضلعها به‌ترتیب h_a، h_b و h_c است. اگر $a \geqslant b \geqslant c$، ثابت کنید $a + h_a \geqslant b + h_b \geqslant c + h_c$.

مسألهٔ ۶۸. فرض کنید n عددی پنج‌رقمی باشد (که اولین رقمش صفر نیست) و فرض کنید m عددی چهاررقمی باشد که از حذف کردن رقم وسط n به‌دست می‌آید. همهٔ عددهای n را تعیین کنید که $\frac{n}{m}$ عددی صحیح باشد.

مسألهٔ ۶۹. ثابت کنید که به‌ازای هر سه عدد ناصفر مانند x، y و z عبارتهای

$$x^n + y^n + z^n, \qquad (x + y + z)^n$$

در صورتی‌که به‌ازای $n = -۱$ برابر باشند، به‌ازای هر عدد صحیح فرد مانند n نیز برابرند.

مسألهٔ ۷۰. افسری می‌خواهد دیدبانی را در محلی مستقر کند که از دو نقطهٔ مشخص و جاده‌ای مستقیم هم‌فاصله باشد. آیا همیشه یافتن چنین محلی ممکن است؟ همهٔ نقاط مناسب را مشخص کنید. به بیان دیگر، در صفحهٔ اقلیدسی چند نقطه وجود دارد که از دو نقطهٔ مفروض هم‌فاصله باشند؟ در صورت امکان، این نقطه‌ها را با ستاره و پرگار مشخص کنید.

مسألهٔ ۷۱. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\left[\frac{n+۱}{۲}\right] + \left[\frac{n+۲}{۴}\right] + \left[\frac{n+۴}{۸}\right] + \left[\frac{n+۸}{۱۶}\right] + \cdots = n$$

مسألهٔ ۷۲. سه نقطهٔ ناهمخط A، B و C مفروض‌اند. دایره‌ای به مرکز C چنان رسم کنید که مماسهای رسم‌شده از A و B بر این دایره با هم موازی باشند.

مسألهٔ ۷۳. فرض کنید

$$f(x) = x^{۴} + x^{۳} + x^{۲} + x + ۱$$

باقیماندهٔ تقسیم $f(x^{۵})$ بر $f(x)$ را بیابید.

مسألهٔ ۷۴. فرض کنید که در چندجمله‌ای

$$f(x) = x^n + a_{۱}x^{n-۱} + a_{۲}x^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱}x + an$$

ضریبهای $a_{۱}$، $a_{۲}$، $\cdots$ و a_n عددهایی صحیح باشند. اگر چهار عدد صحیح متمایز مانند a، b، c و d وجود داشته باشند به‌طوری‌که $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = ۵$، ثابت کنید عدد صحیحی مانند k وجود ندارد به‌طوری‌که $f(k) = ۸$.

مسألهٔ ۷۵. آرایهٔ $n \times n$ زیر از اعداد مثبت مفروض است:

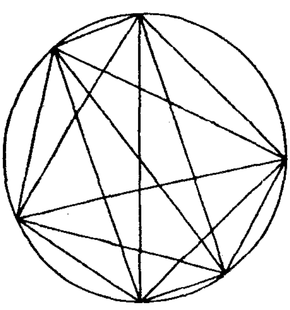
$$\begin{array}{cccc} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{array}$$

فرض کنید m_j کوچکترین عدد در ستون jاُم و m بزرگترین m_j باشد. فرض کنید M_i بزرگترین عدد در سطر iاُم و M کوچکترین M_i باشد. ثابت کنید $m \leqslant M$.

مسألهٔ ۷۶. بیشترین تعداد ممکن جمله‌های تصاعدی هندسی با قدرنسبت بزرگتر از ۱ که همهٔ جمله‌هایش عضو مجموعهٔ عددهای صحیح بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ (و خود این دو عدد) هستند چقدر است؟

مسألهٔ ۷۷. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $۶^n - ۳^n - ۸^n + ۱^n$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۷۸. n نقطه روی دایره‌ای مفروض‌اند و وترهایی که آنها را به‌هم وصل می‌کنند رسم شده‌اند. اگر هیچ سه وتری نقطهٔ مشترک نداشته باشند، در این شکل چند مثلث وجود دارد که هر سه رأسش درون دایره باشد؟ (شکل ۱۱ آرایشی را در مورد ۶ نقطه و یک مثلث با ویژگی موردنظر نشان می‌دهد.)



شکل ۱۱

مسألهٔ ۷۹. دنبالهٔ a_1، a_2، $\cdots$، a_n، $\cdots$ از عددهای صحیح این‌طور تعریف شده است:

$$a_1 = 2,\ \ a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$$

چندجملهٔ اول این دنباله عبارت‌اند از $a_1 = 2$، $a_2 = 3$، $a_3 = 7$، $a_4 = 43$ و $a_5 = 1807$. ثابت کنید هر جفت از عددهای صحیح a_1، a_2، a_3، $\cdots$ نسبت به‌هم اول‌اند.

مسألهٔ ۸۰. ثابت کنید که عدد صحیح N را می‌توان چنان بزرگ انتخاب کرد که

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}$$

بزرگتر از ۱۰۰ باشد.

مسألهٔ ۸۱. فرض کنید a_1، a_2، $\cdots$، a_n، b_1، b_2، $\cdots$ و b_n، $2n$ عدد حقیقی مثبت باشند. ثابت کنید که یا

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant n$$

یا

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geqslant n$$

مسألهٔ ۸۲. فرض کنید

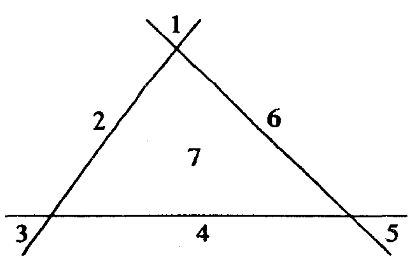
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

چندجمله‌ایی از درجهٔ n، $n \geqslant 1$، با ضرایب صحیح باشد. ثابت کنید که بی‌نهایت عدد طبیعی مانند m وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(m) = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0$$

اول نباشد.

مسألهٔ ۸۳. در شکل ۱۲ سه خط نشان داده شده است که صفحه را به ۷ ناحیه تقسیم کرده‌اند. n خط صفحه را حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟



شکل۱۲

مسألهٔ ۸۴. در شهری خانه‌های مسکونی در بلوکهایی مستطیلی ساخته شده‌اند؛ خیابانها (با عرض صفر) در امتداد شرق ـ غرب و کوچه‌ها در امتداد شمال ـ جنوب ساخته شده‌اند. مردی می‌خواهد از چهارراهی به چهارراهی دیگر برود که به‌اندازهٔ m بلوک در شرق و n بلوک در شمال مبدأ حرکتش قرار دارد. چندین مسیر برای انجام این‌کار وجود دارد که کوتاهترین مسیرند. تعداد این کوتاهترین مسیرها چندتاست؟

مسألهٔ ۸۵. شش عدد مفروض‌اند و در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$y^۲ + yz + z^۲ = a^۲ \qquad (۱)$$

$$z^۲ + zx + x^۲ = b^۲ \qquad (۲)$$

$$x^۲ + xy + y^۲ = c^۲ \qquad (۳)$$

مجموع $x+y+z$ را برحسب a، b و c به‌دست آورید. اگر همهٔ این عددها مثبت باشند، تعبیر هندسی نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌اید چیست؟

مسألهٔ ۸۶. شش نقطه در فضا چنان قرار دارند که هیچ سه‌تایی از آنها بر یک خط واقع نیستند. پانزده پاره‌خطی که این نقطه‌ها را به یکدیگر وصل می‌کنند رسم و بعضی با رنگ قرمز و بقیه با رنگ آبی رنگ شده‌اند. ثابت کنید برخی مثلثها که از تقاطع این پاره‌خطها پدید آمده‌اند سه ضلعشان همرنگ‌اند.

مسألهٔ ۸۷. عدد ۱ را به‌صورت مجموع معکوسهای تعدادی متناهی عدد صحیح متمایز بزرگتر از ۲ یا برابر با آن بنویسید. آیا برای انجام این‌کار بیش از یک‌راه وجود دارد؟ اگر پاسختان مثبت است، تعداد راهها را تعیین کنید.

مسألهٔ ۸۸. نشان دهید که چگونه می‌توان با ستاره و پرگار دایره‌ای را به ۹ ناحیه با مساحتهای برابر تقسیم کرد.

مسألهٔ ۸۹. n نقطه در صفحه مفروض‌اند. هر ترتیبی (جایگشتی) از این نقطه‌ها مانند $p_۱$، $p_۲$، $\cdots$ و p_n مسیری از $p_۱$ به $p_۲$، سپس از $p_۲$ به $p_۳$، $\cdots$ و سرانجام از $p_{n-۱}$ به p_n را در امتداد پاره‌خطهای راست تعیین می‌کند. ثابت کنید که کوتاهترین مسیر خط شکسته از این نوع، بین $p_۱$ و p_n، خودش را قطع نمی‌کند.

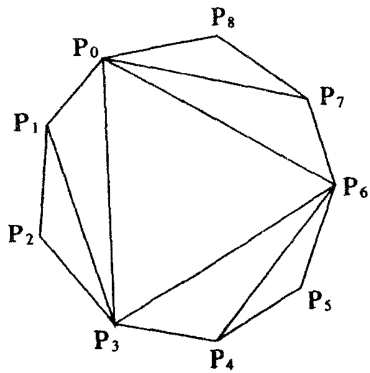
مسألهٔ ۹۰. فرض کنید $P(x,y)$ چندجمله‌ایی از x و y باشد به‌طوری‌که

۱. $P(x,y)$ متقارن است؛ یعنی $P(x,y) \equiv P(y,x)$.

۲. $x-y$ عاملی از $P(x,y)$ است؛ یعنی $P(x,y) \equiv (x-y)Q(x,y)$.

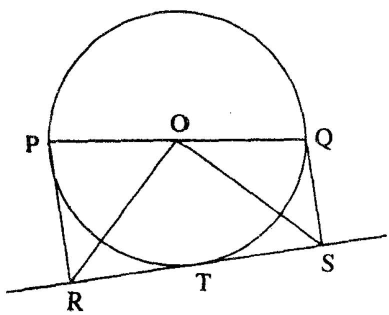
ثابت کنید $(x-y)^۲$ عاملی از $P(x,y)$ است.

مسألهٔ ۹۱. شکل ۱۳ چندضلعی محدبی را نشان می‌دهد که نُه رأس دارد. شش قطری که در این شکل رسم شده‌اند چندضلعی را به ۷ مثلث تقسیم می‌کنند: $P_۰P_۱P_۳$، $P_۰P_۳P_۶$، $P_۰P_۶P_۷$، $P_۰P_۷P_۸$، $P_۱P_۲P_۳$، $P_۳P_۴P_۶$ و $P_۴P_۵P_۶$. به چند طریق می‌توان این مثلثها را با نامهای $\triangle_۱$، $\triangle_۲$، $\triangle_۳$، $\triangle_۴$، $\triangle_۵$، $\triangle_۶$ و $\triangle_۷$ نامگذاری کرد به‌طوری‌که P_i، $i = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$، رأسی از مثلث $\triangle_i$ باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.



شکل۱۳

مسألهٔ ۹۲. در شکل ۱۴ نقطهٔ O مرکز دایره و خط POQ قطر است. نقطهٔ R پای عمودی است که از P بر مماس بر دایره در T رسم می‌شود و S پای عمودی است که از Q بر همین مماس رسم می‌شود. ثابت کنید $\overline{OR} = \overline{OS}$.

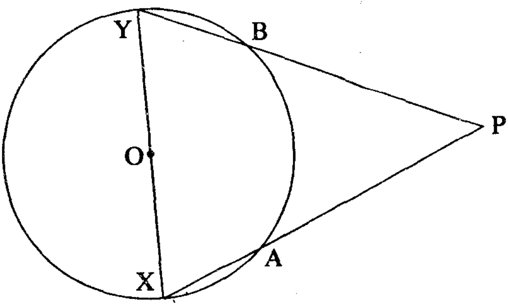


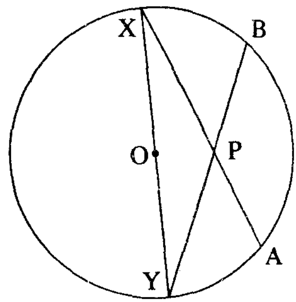
شکل۱۴

مسألهٔ ۹۳. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_n عددهایی حقیقی باشند که از ۱ کمتر نیستند. ثابت کنید

$$(۱ + a_۱^*)(۱ + a_۲)\cdots(۱ + a_n) \geqslant \frac{۲^n}{n + ۱}(۱ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)$$

مسألهٔ ۹۴. اگر A و B نقطه‌های ثابتی روی دایره‌ای مفروض باشند به‌طوری‌که با O، مرکز دایره، هم‌خط نباشند، و اگر XY قطر متغیری از این دایره باشد (شکل ۱۵ را ببینید)، مکان‌هندسی نقطهٔ P را بیابید (P نقطهٔ تقاطع خطوطی است که از A و X و از B و Y می‌گذرند).





شکل۱۵

مسألهٔ ۹۵. ملاحظه کنید که

$$\frac{۱}{۱}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲};\quad \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶};\quad \frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲};\quad \frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۰}$$

قانونی کلی که از این مثالها به ذهن می‌رسد بیان و آن‌را ثابت کنید. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که بزرگتر از ۱ باشد، عددهایی طبیعی مانند i و j وجود دارند به‌طوری‌که

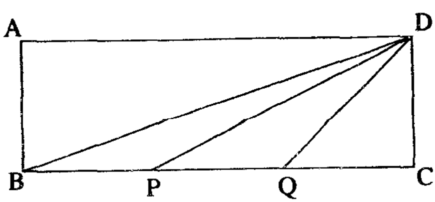
$$\frac{۱}{n}=\frac{۱}{i(i+۱)}+\frac{۱}{(i+۱)(i+۲)}+\frac{۱}{(i+۲)(i+۳)}+\cdots+\frac{۱}{j(j+۱)}$$

مسألهٔ ۹۶. فرض کنید $ABCD$ مستطیلی باشد که در آن $\overline{BC}=۳\overline{AB}$. ثابت کنید که اگر P و Q دو نقطه روی ضلع BC باشند و

$$\overline{BP}=\overline{PQ}=\overline{QC}$$

آنگاه

$$\angle DBC+\angle DPC=\angle DQC$$



شکل۱۶

مسألهٔ ۹۷. فرض کنید n عددی طبیعی و ثابت باشد. به هر انتخابی از n عدد حقیقی مانند $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$

و x_n که در شرطهای $۰ \leqslant x_i \leqslant ۱$، $i = ۱, ۲, \cdots, n$، صدق می‌کنند، مجموع زیر را متناظر می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{۱\leqslant i<j\leqslant n} |x_i - x_j| = &|x_۱ - x_۲| + |x_۱ - x_۳| + |x_۱ - x_۴| + \cdots + |x_۱ - x_{n-۱}| + |x_۱ - x_n| \\ &+ |x_۲ - x_۳| + |x_۲ - x_۴| + \cdots + |x_۲ - x_{n-۱}| + |x_۲ - x_n| \\ &+ |x_۳ - x_۴| + \cdots + |x_۳ - x_{n-۱}| + |x_۳ - x_n| \\ &+ \cdots \\ &+ |x_{n-۲} - x_{n-۱}| + |x_{n-۲} - x_n| \\ &+ |x_{n-۱} - x_n|\end{aligned}$$

فرض کنید $S(n)$ بیشترین مقدار ممکن چنین مجموعهایی باشد. $S(n)$ را بیابید.

مسألهٔ ۹۸. ملاحظه کنید که

$$\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳}, \qquad ۴^۲ + ۳^۲ = ۵^۲$$
$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} = \frac{۸}{۱۵}, \qquad ۸^۲ + ۱۵^۲ = ۱۷^۲$$
$$\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۷} = \frac{۱۲}{۳۵}, \qquad ۱۲^۲ + ۳۵^۲ = ۳۷^۲$$

حکمی کلی از این مثالها به‌ذهن می‌رسد بیان و آن‌را ثابت کنید.

مسألهٔ ۹۹. علی ۶ سکهٔ سالم و محمد ۵ سکهٔ سالم پرتاب می‌کند. احتمال اینکه علی بیشتر از محمد «شیر» بیاورد چقدر است؟

مسألهٔ ۱۰۰. شش‌ضلعی محاط در دایره‌ای، سه ضلع متوالی به‌طول a و سه ضلع متوالی به‌طول b دارد. شعاع دایره را تعیین کنید.

مسألهٔ ۱۰۱. الف) ثابت کنید ۱۰۲۰۱ در هر مبنایی عددی مرکب است.

ب) ثابت کنید ۱۰۱۰۱ در هر مبنایی عددی مرکب است.

ج) ثابت کنید ۱۰۰۰۱۱ در هر مبنایی عددی مرکب است.

مسألهٔ ۱۰۲. فرض کنید n نفر هرکدام بخشی از مجموعه‌ای از اطلاعات را می‌دانند و این n بخش از اطلاعات ازهم متمایزند. هربار که شخصی مانند A به شخصی مانند B تلفن می‌کند، A هرچه را که می‌داند به B می‌گوید اما B هیچ‌چیز به A نمی‌گوید. حداقل تعداد مکالمه‌های تلفنی لازم بین این افراد برای اینکه همهٔ آنها همه‌چیز را بدانند چقدر است؟

مسألهٔ ۱۰۳. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، $n \geqslant ۶$، هر مربع را می‌توان به n مربع ناهمپوش تقسیم کرد.

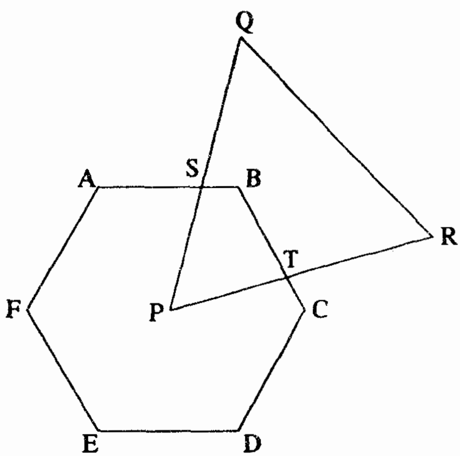
مسألهٔ ۱۰۴. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی ناتباهیده‌ای باشد که لزوماً مسطح نیست (رأسهای چهارضلعی دوری نامگذاری شده‌اند) و

$$\overline{AC}^{۲} + \overline{BD}^{۲} = \overline{AB}^{۲} + \overline{BC}^{۲} + \overline{CD}^{۲} + \overline{DA}^{۲}$$

ثابت کنید $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

مسألهٔ ۱۰۵. ثابت کنید که هر چندوجهی ساده دست‌کم دو وجه دارد که تعداد یالهایشان برابر است.

مسألهٔ ۱۰۶. $ABCDEF$ شش‌ضلعی منتظمی به مرکز P و PQR مثلثی متساوی‌الاضلاع است (شکل ۱۷ را ببینید). اگر $\overline{AB} = ۳$، $\overline{SB} = ۱$ و $\overline{PQ} = ۶$، مساحت بخش مشترک میان دو شکل را تعیین کنید.



شکل۱۷

مسألهٔ ۱۰۷. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \cdots + \frac{۱}{۲n - ۱} = \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n + ۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n - ۱}$$

مسألهٔ ۱۰۸. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n فرض کنید

$$h(n) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$$

مثلاً

$$h(۱) = ۱, \quad h(۲) = ۱ + \frac{۱}{۲}, \quad h(۳) = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}$$

ثابت کنید

$$n + h(۱) + h(۲) + h(۳) + \cdots + h(n - ۱) = nh(n), \quad n = ۲, ۳, ۴, \cdots$$

مسألهٔ ۱۰۹. به‌ازای کدام عددهای صحیحی نامنفی مانند n و k مجموع

$$(k+1)^n + (k+2)^n + (k+3)^n + (k+4)^n + (k+5)^n$$

بر ۵ بخش‌پذیر است؟

مسألهٔ ۱۱۰. روشی را برای ترسیم مثلثی با دو زاویهٔ معلوم α و β و محیط معلوم p (با استفاده از ستاره و پرگار) شرح دهید.

مسألهٔ ۱۱۱. عددی ثابت مانند k را طوری تعیین کنید که $x+y+z$ عامل چندجمله‌ای

$$P(x,y,z) = x^5 + y^5 + z^5 + k(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)$$

باشد. ثابت کنید که به‌ازای این مقدار k، $(x+y+z)^2$ عامل چندجمله‌ای $P(x,y,z)$ است.

مسألهٔ ۱۱۲. به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی مثبت مانند p، q، r و s ثابت کنید

$$(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1) \geqslant 81pqrs$$

مسألهٔ ۱۱۳. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n و هر عدد حقیقی مانند x ثابت کنید

$$\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$$

مسألهٔ ۱۱۴. به‌این دو دسته از برابریها توجه کنید:

الف)

$$1 = 1$$

$$2 \times 1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

$$3 \times 1 - 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$4 \times 1 - 6 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

ب)

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{2} = 2 \times 1 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3} = 3 \times 1 - 3\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{4} = 4 \times 1 - 6\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 4\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

برای هر یک از این دو دسته، قانونی کلی بیان و آن‌را ثابت کنید. همچنین رابطهٔ بین این دو دسته از برابریها را تعمیم دهید.

مسألهٔ ۱۱۵. $2n+3$ نقطه ($n \geqslant 1$) در صفحه مفروض‌اند به‌طوری‌که هیچ سه‌تایی از آنها روی یک

خط و هیچ چهارتایی از آنها بر یک دایره نیستند. ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که از سه تا از این نقطه‌ها می‌گذرد، و از $2n$ نقطهٔ باقی‌مانده، nتا درون این دایره و nتای دیگر بیرون از آن واقع‌اند.

مسألهٔ ۱۱۶. از نقطهٔ ثابت P خارج صفحه‌ای مفروض، سه پاره‌خط که هر جفت از آنها متعامدند طوری رسم شده‌اند که انتهایشان بر این صفحه واقع است. فرض کنید a، b و c طول این سه پاره‌خط باشند. ثابت کنید در همهٔ حالتهای ممکن، $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ مقدار ثابتی دارد.

مسألهٔ ۱۱۷. اگر a، b و c طول ضلعهای مثلثی باشند، ثابت کنید

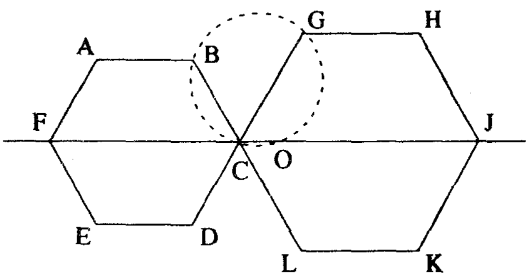
$$3(bc+ca+ab) \leqslant (a+b+c)^2 < 4(bc+ca+ab)$$

مسألهٔ ۱۱۸. علی هنگام ظهر با اتومبیل از شهر A حرکت می‌کند و با سرعت ثابت به شهر B می‌رود، سپس دوباره به A برمی‌گردد و همچنان این رفت و برگشت را ادامه می‌دهد. محمد نیز هنگام ظهر با اتومبیل از شهر B حرکت می‌کند و با سرعت ثابت ۴۰ کیلومتر بر ساعت در همان بزرگراهی که علی در آن رانندگی می‌کند بین شهرهای A و B رفت و برگشت می‌کند. علی بیست دقیقه بعد از اولین ملاقات با محمد در جاده به شهر B می‌رسد، و محمد چهل‌وپنج دقیقه بعد از اولین ملاقات با علی در جاده به شهر A می‌رسد. در چه زمانی علی و محمد برای nاُمین بار از کنار هم می‌گذرند؟

مسألهٔ ۱۱۹. دو شش‌ضلعی منتظم و نابرابر $ABCDEF$ و $CGHIJKL$ (شکل ۱۸ را ببینید) در رأس C مشترک و طوری قرارگرفته‌اند که F، C و J همخط‌اند. ثابت کنید که

الف) دایرهٔ محیطی BCG پاره‌خط FJ را (مثلاً در نقطهٔ O) نصف می‌کند؛

ب) $\triangle BOG$ متساوی‌الاضلاع است.



شکل۱۸

مسألهٔ ۱۲۰. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید ضرایب دوجمله‌ای

$$\binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \ldots,\ \binom{n}{n-1}$$

همگی زوج‌اند اگر و فقط اگر n توانی از ۲ باشد.

مسألهٔ ۱۲۱. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$۱۴۹۲^n - ۱۷۷۰^n - ۱۸۶۳^n + ۲۱۴۱^n$$

بر ۱۹۴۶ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۲۲. اگر $P(x)$ چندجمله‌ایی از درجهٔ n باشد به‌طوری‌که $P(k) = \frac{۱}{k}$، $k = ۱, ۲, \cdots, n + ۱$، $P(n + ۲)$ را تعیین کنید.

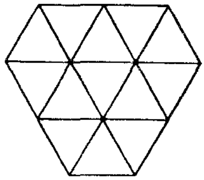
مسألهٔ ۱۲۳. ثابت کنید $\log x$ را نمی‌توان به‌شکل $\frac{f(x)}{g(x)}$ نوشت به‌طوری‌که $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌ایهایی از x باشند.

مسألهٔ ۱۲۴. قطاری رأس موعد مقرر از ایستگاهی حرکت می‌کند. رانندهٔ قطار پس از پیمودن ۸ مایل به ساعت خود نگاه می‌کند و می‌بیند که عقربهٔ دقیقه‌شمار دقیقاً روی عقربهٔ ساعت‌شمار قرار دارد. سرعت میانگین در این ۸ مایل ۳۳ مایل بر ساعت بوده است. قطار چه زمانی از ایستگاه حرکت کرده است؟

مسألهٔ ۱۲۵. روشی برای ترسیم چهارضلعی $ABCD$ با این مفروضات بیان کنید:

۱. طول چهارضلع معلوم‌اند؛
۲. پاره‌خط AB با پاره‌خط CD موازی است؛
۳. پاره‌خطهای BC و DA یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

مسألهٔ ۱۲۶. تعداد زیادی آجر به‌شکل مثلثهای متساوی‌الاضلاع همنهشت در اختیار داریم و می‌خواهیم با کنار هم قراردادن nتا از این مثلثها روی میز، شش‌ضلعی محدبی با زاویه‌های برابر بسازیم (یعنی همهٔ زاویه‌های درونی شش‌ضلعی ۱۲۰° باشند). روشن است که نمی‌توان n را هر عدد طبیعی انتخاب کرد. کوچکترین مقدار ممکن n، ۶ است. کوچکترین مقدار بعدی ۱۰ و مقدار بعدی ۱۳ است (شکل ۱۹). مقادیر ممکن n را تعیین کنید.



شکل ۱۹ $n = ۱۳$

مسألهٔ ۱۲۷. فرض کنید a، b و c سه عدد صحیح متمایز باشند و $P(x)$ چندجمله‌ایی با ضرایب صحیح باشد. ثابت کنید که امکان ندارد $P(a) = b$، $P(b) = c$ و $P(c) = a$ (المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۷۴).

مسألهٔ ۱۲۸. فرض کنید که چندجمله‌ای

$$x^n + a_۱ x^{n-۱} + a_۲ x^{n-۲} + \cdots + a_n$$

را بتوان به‌شکل

$$(x + r_۱)(x + r_۲)\cdots(x + r_n)$$

تجزیه کرد که در آن $r_۱$، $r_۲$، $\cdots$ و r_n عددهایی حقیقی‌اند. ثابت کنید

$$(n - ۱)a_۱^۲ \geqslant ۲na_۲$$

مسألهٔ ۱۲۹. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، کوچکترین عدد طبیعی مانند $k(n)$ را بیابید به‌طوری‌که اگر A، B و C زاویه‌های مثلثی باشند، عددهای

$$k(n) + \sin\frac{A}{n},\ \ k(n) + \sin\frac{B}{n},\ \ k(n) + \sin\frac{C}{n}$$

طول اضلاع مثلثی باشند.

مسألهٔ ۱۳۰. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

الف) $(n+۱)^n \geqslant ۲^n n!$

ب) $(n+۱)^n(۲n+۱)^n \geqslant ۶^n(n!)^۲$

مسألهٔ ۱۳۱. فرض کنید $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ عددهایی مختلط باشند به‌طوری‌که

۱. $z_۱z_۲z_۳ = ۱$

۲. $z_۱ + z_۲ + z_۳ = \frac{۱}{z_۱} + \frac{۱}{z_۲} + \frac{۱}{z_۳}$

ثابت کنید که دست‌کم یکی از این عددها برابر با ۱ است.

مسألهٔ ۱۳۲. فرض کنید m_a، m_b، m_c و w_a، w_b، w_c به‌ترتیب طول میانه‌ها و نیمسازهای مثلثی باشند. ثابت کنید

$$\sqrt{m_a} + \sqrt{m_b} + \sqrt{m_c} \geqslant \sqrt{w_a} + \sqrt{w_b} + \sqrt{w_c}$$

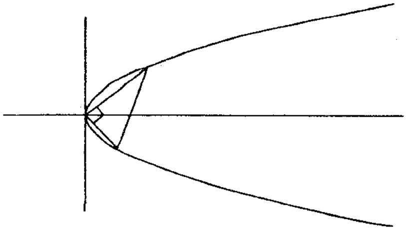
مسألهٔ ۱۳۳. فرض کنید n و r عددهایی صحیح باشند به‌طوری‌که $۰ \leqslant r \leqslant n$. عبارت زیر را ساده کنید

$$S = \binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} - \cdots + (-۱)^r\binom{n}{r}$$

مسألهٔ ۱۳۴. اگر x، y و z عددهایی مثبت باشند، ثابت کنید

$$\frac{x^۲}{y^۲} + \frac{y^۲}{z^۲} + \frac{z^۲}{x^۲} \geqslant \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

مسألهٔ ۱۳۵. ثابت کنید همهٔ وترهای سهمی $y^۲ = ۴ax$ که از رأس سهمی تحت زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند همرس‌اند (شکل ۲۰ را ببینید).

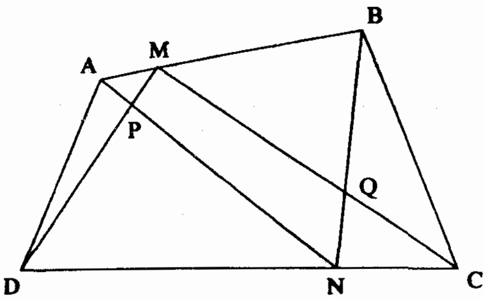


شکل ۲۰

مسألهٔ ۱۳۶. $ABCD$ چهارضلعی محدب دلخواهی است و نقاط M و N روی ضلعهای AB و DC طوری انتخاب شده‌اند که

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{DC}}$$

(شکل ۲۱ را ببینید). ثابت کنید مساحت چهارضلعی $PMQN$ با مجموع مساحتهای دو مثلث APD و BQC برابر است.



شکل۲۱

مسألهٔ ۱۳۷. نشان دهید که چگونه می‌توان کره‌ای رسم کرد که از ۵ نقطهٔ غیرواقع بر یک کره که هیچ چهارتایی از آنها در یک صفحه واقع نیستند به یک فاصله باشد. آیا جواب یکتاست؟

مسألهٔ ۱۳۸. ثابت کنید $۵^{۲n+۱} + ۱۱^{۲n+۱} + ۱۷^{۲n+۱}$ به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی مانند n بر ۳۳ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۳۹. چندجمله‌ای درجهٔ nاُم $P(x)$ در برابریهای $P(k) = ۲^k$، $k = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$، صدق می‌کند. $P(n+۱)$ را تعیین کنید.

مسألهٔ ۱۴۰. فرض کنید $۰ \leqslant x_i \leqslant ۱$، $i = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$. ثابت کنید

$$۲^{n-۱}(۱ + x_۱x_۲\cdots x_n) \geqslant (۱+x_۱)(۱+x_۲)\cdots(۱+x_n)$$

و در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر $n-۱$ تا از x_iها برابر با ۱ باشند.

مسألهٔ ۱۴۱. در یک مراسم قرعه‌کشی، درون کیسه‌ای ۵۲ مهره که شماره‌های ۱ تا ۵۲ روی آنها نوشته شده ریخته شده است و هر نفر سه مهره بیرون می‌آورد. اگر شمارهٔ هیچ‌یک از این سه مهره بالاتر از ۴۰ نباشد، شخص موردنظر برنده است. آیا حاضرید در این قرعه‌کشی شرکت کنید؟

مسألهٔ ۱۴۲. عددهای a، b، c و d معلوم‌اند. همهٔ عددهایی مانند x، y، z و w را بیابید که

۱. $y^۲z^۲w^۲x = a^۷$

۲. $z^۲w^۲x^۲y = b^۷$

۳. $w^۲x^۲y^۲z = c^۷$

۴. $x^۲y^۲z^۲w = d^۷$

مسألهٔ ۱۴۳. ثابت کنید که اگر سطح مقطع هر صفحه با شکلی فضایی و کراندار دایره باشد، این شکل فضایی کره است.

مسألهٔ ۱۴۴. به چند طریق می‌توانیم n سکهٔ متمایز را در ستونی روی‌هم قرار دهیم به‌طوری‌که دو سکهٔ مشخص مجاور یکدیگر نباشند؟

مسألهٔ ۱۴۵. دو دایرهٔ ثابت، نابرابر، نامتقاطع و نامتداخل بر دایرهٔ متغیری در دو نقطهٔ P و Q مماس‌اند. ثابت کنید دو نقطهٔ ثابت وجود دارد که PQ باید از یکی از آنها بگذرد.

مسألهٔ ۱۴۶. اگر $S = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n$، که در آن $x_i > ۰$ $(i = ۱, \cdots, n)$، ثابت کنید

$$\frac{S}{S - x_۱} + \frac{S}{S - x_۲} + \cdots + \frac{S}{S - x_n} \geqslant \frac{n^۲}{n - ۱}$$

و در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n$.

مسألهٔ ۱۴۷. عبارت زیر را تجزیه کنید

$$a^۵(c - b) + b^۵(a - c) + c^۵(b - a)$$

مسألهٔ ۱۴۸. در یک مسابقهٔ ریاضی هر شرکت‌کننده ممکن است در هر مسأله ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و یا ۰ امتیاز بگیرد. به چند طریق ممکن است امتیاز کلّ شرکت‌کننده‌ای از ۷ مسأله ۳۰ باشد؟

مسألهٔ ۱۴۹. ملاحظه کنید که

$$۶^۲ - ۵^۲ = ۱۱$$

$$۵۶^۲ - ۴۵^۲ = ۱۱۱۱$$

$$۵۵۶^۲ - ۴۴۵^۲ = ۱۱۱۱۱۱$$

$$۵۵۵۶^۲ - ۴۴۴۵^۲ = ۱۱۱۱۱۱۱۱$$

قانونی کلی که از این مثالها به ذهن می‌رسد بیان و آن‌را ثابت کنید.

مسألهٔ ۱۵۰. x، y و z را از معادله‌های زیر (برحسب a، r، s و t) به‌دست آورید:

$$yz = a(y + z) + r$$

$$zx = a(z + x) + s$$

$$xy = a(x + y) + t$$

مسألهٔ ۱۵۱. فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و P نقطه‌ای در درون این مثلث باشد. عمودهای PD، PE و PF را بر سه ضلع مثلث رسم می‌کنیم. ثابت کنید که نقطهٔ P هرجاکه انتخاب شده باشد،

$$\frac{\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF}}{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$$

مسألهٔ ۱۵۲. معادلهٔ زیر را حل کنید

$$\sqrt[۳]{۱۳x+۳۷}-\sqrt[۳]{۱۳x-۳۷}=\sqrt[۳]{۲}$$

مسألهٔ ۱۵۳. اگر A تعداد عددهای صحیحی باشد که مفسر لگاریتمشان (در پایهٔ ۱۰) a است، و B تعداد عددهای صحیحی باشد که مفسر لگاریتم معکوسشان $-b$ است، حاصل $(\log A-a)-(\log B-b)$ را تعیین کنید. (مفسر $\log x$ عدد صحیح $[\log x]$ است.)

مسألهٔ ۱۵۴. ثابت کنید که سه جواب مانند $(x_۱,y_۱)$، $(x_۲,y_۲)$ و $(x_۳,y_۳)$ از چهار جواب دستگاه معادله‌های

$$(x-h)^۲+(y-k)^۲=۴(h^۲+k^۲)$$

$$xy=hk$$

رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع‌اند. تعبیر هندسی نتیجهٔ این مسأله را بیان کنید.

مسألهٔ ۱۵۵. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند m، کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از $(\sqrt{۳}+۱)^{۲m}$ بر $۲^{m+۱}$ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۵۶. فرض کنید r عددی گویا و نامنفی باشد که تقریبی از $\sqrt{۲}$ است. ثابت کنید که همواره $\frac{r+۲}{r+۱}$ تقریب گویای بهتری از $\sqrt{۲}$ است.

مسألهٔ ۱۵۷. همهٔ اعداد گویا مانند k را بیابید به‌طوری‌که $۰\leqslant k\leqslant \frac{۱}{۲}$ و $\cos k\pi$ عددی گویا باشد.

مسألهٔ ۱۵۸. دستگاه معادله‌های زیر را حل کنید

$$x+y+z=۰$$

$$x^۲+y^۲+z^۲=۶ab$$

$$x^۳+y^۳+z^۳=۳(a^۳+b^۳)$$

مسألهٔ ۱۵۹. ثابت کنید که مجموع مساحتهای هر سه وجهی از چهاروجهی بزرگتر از مساحت وجه چهارم است.

مسألهٔ ۱۶۰. فرض کنید a، b و c طول ضلعهای مثلثی قائم‌الزاویه باشند (c طول وتر است)، ثابت کنید $a+b\leqslant\sqrt{۲}c$. در این رابطه چه موقع برابری برقرار است؟

مسألهٔ ۱۶۱. همهٔ مقادیر θ را بیابید به‌طوری‌که $\frac{\pi}{۲}\geqslant\theta\geqslant ۰$ و $\sin^۵\theta+\cos^۵\theta=۱$.

مسألهٔ ۱۶۲. اگر pاُمین جمله و qاُمین جملهٔ تصاعدی حسابی به‌ترتیب q و p باشند، $(p+q)$اُمین جملهٔ این تصاعد را بیابید.

مسألهٔ ۱۶۳. فرض کنید a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC باشند و نیمساز زاویهٔ C ضلع AB را در D قطع کند. ثابت کنید طول CD برابر است با

$$\frac{۲ab\cos\frac{C}{۲}}{a+b}$$

مسألهٔ ۱۶۴. درکدام مبناها مانند b، ۱۳۶۷۶۳۱، که در مبنای b نوشته شده است، مکعب کامل است؟

مسألهٔ ۱۶۵. اگر x عدد حقیقی مثبتی مخالف ۱ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$\frac{۱-x^{۲n+۱}}{۱-x}\geqslant(۲n+۱)x^n$$

مسألهٔ ۱۶۶. جمله‌های pاُم، qاُم و rاُم تصاعدی حسابی به‌ترتیب q، r و p هستند. تفاضل جمله‌های $(p+q)$اُم و $(q+r)$اُم را بیابید.

مسألهٔ ۱۶۷. دایرهٔ Γ و دو نقطهٔ A و B در صفحه مفروض‌اند. دایره‌ای رسم کنید که از A و B بگذرد و Γ را در دو نقطه که دو سر قطر مفروضی از Γ هستند قطع کند.

مسألهٔ ۱۶۸. چندجمله‌ایی بیابید که هر یک از ریشه‌هایش مکعب یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای $t^۳+at^۲+bt+c$ (که در آن a، b و c عددهایی ثابت‌اند) باشد.

مسألهٔ ۱۶۹. اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی و مثبت باشند، ثابت کنید

$$\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{a+b+c}+\frac{b^۲+c^۲+d^۲}{b+c+d}+\frac{c^۲+d^۲+a^۲}{c+d+a}+\frac{d^۲+a^۲+b^۲}{d+a+b}\geqslant a+b+c+d$$

و برابری فقط وقتی برقرار است که $a=b=c=d$.

مسألهٔ ۱۷۰. الف) همهٔ عددهای صحیحی را بیابید که با رقم ۶ آغاز شوند و عدد صحیحی که با حذف رقم ۶ از این عدد حاصل می‌شود $\frac{۱}{۲۵}$ عدد اصلی باشد.

ب) ثابت کنید که هیچ عدد صحیحی وجود ندارد که با حذف اولین رقمش عددی حاصل شود که $\frac{۱}{۳۵}$ عدد اصلی باشد.

مسألهٔ ۱۷۱. ثابت کنید که اگر چندضلعی محدبی سه زاویهٔ ۶۰° داشته باشد باید مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

مسألهٔ ۱۷۲. ثابت کنید که اگر x، y و z عددهایی حقیقی باشند،

$$x^۴(۱+y^۴)+y^۴(۱+z^۴)+z^۴(۱+x^۴) \geqslant ۶x^۲y^۲z^۲$$

چه موقع برابری برقرار است؟

مسألهٔ ۱۷۳. چند عدد صحیح از ۱ تا $۱۰^{۳۰}$ (این دو عدد را هم درنظر می‌گیریم) مربع کامل، مکعب کامل، یا توان پنجم کامل نیستند؟

مسألهٔ ۱۷۴. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک مجموعهٔ اعداد زیر را تعیین کنید:

$$\{۱۶^n+۱۰n-۱ \mid n=۱,۲,۳,\cdots\}$$

مسألهٔ ۱۷۵. اگر $a_i \geqslant ۱$، $i=۱,۲,\cdots$، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$n+a_۱a_۲\cdots a_n \geqslant ۱+a_۱+a_۲+\cdots+a_n$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر بیش از یکی از a_iها مخالف ۱ نباشد.

مسألهٔ ۱۷۶. باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-a$، $x-b$ و $x-c$ به‌ترتیب a، b و c است. باقیماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)$ چیست؟ (a، b و c متمایزند.)

مسألهٔ ۱۷۷. تابع $F(x)$ را طوری تعیین کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x در معادلهٔ تابعی زیر صدق کند

$$x^۲F(x)+F(۱-x)=۲x-x^۴$$

مسألهٔ ۱۷۸. ثابت کنید عددهایی طبیعی مانند a، b و c وجود ندارند به‌طوری‌که

$$a^۲+b^۲+c^۲=a^۲b^۲$$

مسألهٔ ۱۷۹. دنبالهٔ $\{a_n\}$ از عددهای حقیقی این‌طور تعریف شده است

$$a_۱=۱,\ \ a_{n+۱}=۱+a_۱a_۲\cdots a_n \qquad (n\geqslant ۱)$$

ثابت کنید

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{a_n}=۲$$

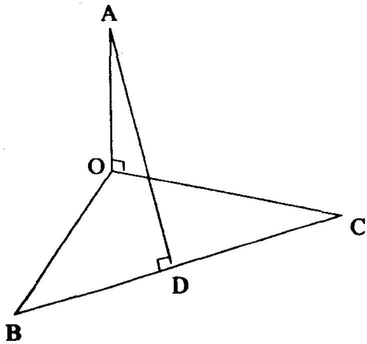
مسألهٔ ۱۸۰. دو نقطهٔ A و B مفروض‌اند. نشان دهید چگونه می‌توان فقط با استفاده از ستاره‌ای که طولش از $\overline{AB}$ کمتر است خط راستی رسم کرد که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل کند.

مسألهٔ ۱۸۱. ثابت کنید که اگر دو دایره که در یک صفحه واقع نیستند یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند یا بر یکدیگر مماس باشند، باید بر یک کره واقع باشند.

مسألهٔ ۱۸۲. فرض کنید x، y و z ریشهٔ سوم سه عدد اول متمایز باشند. ثابت کنید x، y و z سه جملهٔ

تصاعدی حسابی نیستند (لزومی ندارد جمله‌ها متوالی باشند).

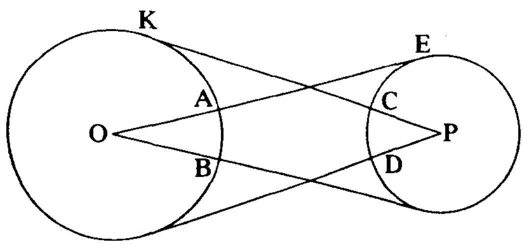
مسألهٔ ۱۸۳. OBC مثلثی در فضا و A نقطه‌ای است که در صفحهٔ این مثلث واقع نیست. AO بر صفحهٔ OBC عمود و D پای عمودی است که از A بر BC رسم شده است. (شکل ۲۲ را ببینید.) ثابت کنید $OD \perp BC$.



شکل۲۲

مسألهٔ ۱۸۴. فرض کنید A، B، C و D چهار نقطه در فضا باشند. مکان هندسی مرکز متوازی‌الاضلاعی را بیابید که چهار رأسش بر چهار پاره‌خط AB، BC، CD و DA واقع‌اند.

مسألهٔ ۱۸۵. از مرکزهای دو دایرهٔ متخارج، مانند شکل ۲۳، مماسهایی بر دایرهٔ دیگر رسم می‌کنیم. ثابت کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$.



شکل۲۳

مسألهٔ ۱۸۶. P، Q، R و S نقطه‌هایی به‌ترتیب روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهارضلعی کج[1] $ABCD$ هستند، و همه بر یک صفحه واقع‌اند. همچنین P'، Q'، R' و S' نقطه‌هایی به‌ترتیب روی ضلعهای $A'B'$، $B'C'$، $C'D'$ و $D'A'$ از چهارضلعی کج $A'B'C'D'$ هستند. فرض کنید

$$\overline{AB} = \overline{A'B'},\ \overline{BC} = \overline{B'C'},\ \overline{CD} = \overline{C'D'},\ \overline{DA} = \overline{D'A'}$$

$$\overline{AP} = \overline{A'P'},\ \overline{BQ} = \overline{B'Q'},\ \overline{CR} = \overline{C'R'},\ \overline{DS} = \overline{D'S'}$$

ثابت کنید P'، Q'، R' و S' نیز هم‌صفحه‌اند.

۱. در چهارضلعی کج، هر دو ضلع متقابل متنافرند.

مسألهٔ ۱۸۷. عددی طبیعی مانند k چنان بیابید که مثلثی مانند ABC (که طول ضلعهای آن a، b و c و زاویه‌های روبه‌روی این ضلعها به‌ترتیب A، B و C هستند) با شرایط زیر وجود داشته باشد:

۱. $a+b=kc$

۲. $\cot\frac{A}{۲}+\cot\frac{B}{۲}=k\cot\frac{C}{۲}$

مسألهٔ ۱۸۸. A، B، C و D چهار نقطه در فضا هستند به‌طوری‌که

$$\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=۹۰^\circ$$

ثابت کنید A، B، C و D همصفحه‌اند.

مسألهٔ ۱۸۹. اگر در مثلث ABC، $\angle B=۱۸^\circ$ و $\angle C=۳۶^\circ$، ثابت کنید $a-b$ برابر با شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

مسألهٔ ۱۹۰. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی محاطی محدبی باشد به‌طوری‌که $AB\perp CD$. طول ضلعهای AB، BC، CD و DA را به‌ترتیب a، b، c و d می‌نامیم. ثابت کنید

$$(ab+cd)^۲+(ad+bc)^۲=(b^۲-d^۲)^۲$$

مسألهٔ ۱۹۱. فرض کنید P، Q، R و S نقطه‌هایی به‌ترتیب روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از چهاروجهی $ABCD$ باشند به‌طوری‌که خطهای PS و QR متقاطع‌اند. ثابت کنید خطهای PQ، RS و AC همرس‌اند.

مسألهٔ ۱۹۲. فرض کنید ABC و ABD دو مثلث متساوی‌الاضلاع باشند که در دو صفحه که با یکدیگر زاویهٔ θ می‌سازند واقع‌اند. $\angle CAD$ را (برحسب θ) بیابید.

مسألهٔ ۱۹۳. ABC مثلثی است که در آن $\overline{BC}=۴$، $\overline{CA}=۵$ و $\overline{AB}=۶$. نسبت $\frac{\angle BCA}{\angle CAB}$ را تعیین کنید.

مسألهٔ ۱۹۴. نشان دهید که چگونه می‌توان با در دست داشتن دو پرگار، یک ستاره و یک قطعه کاغذ مسطح شعاع کرهٔ مفروضی را رسم کرد.

مسألهٔ ۱۹۵. فرض کنید n عددی طبیعی است که از ۳ کمتر نیست. تعبیر ترکیبیاتی سرراستی برای درستی اتحاد زیر بیابید:

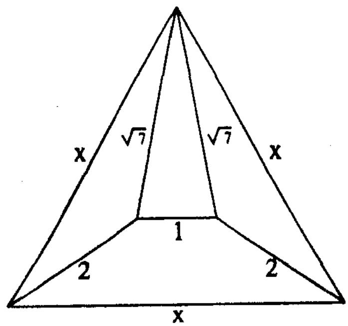
$$\binom{\binom{n}{۲}}{۲}=۳\binom{n+۱}{۴}$$

مسألهٔ ۱۹۶. ثابت کنید که چندوجهی محدبی مانند P در هیچ‌یک از دو شرط زیر صدق نمی‌کند:

الف) P دقیقاً هفت یال دارد؛

ب) همهٔ وجه‌های P شش‌ضلعی‌اند.

مسألهٔ ۱۹۷. مقدار x را در مثلث متساوی‌الاضلاع شکل ۲۴ تعیین کنید.



شکل۲۴

مسألهٔ ۱۹۸. A، B، C و D چهار نقطه در فضا هستند به‌طوری‌که خط AC بر خط BD عمود است. فرض کنید A'، B'، C' و D' چهار نقطه باشند به‌طوری‌که

$$\overline{AB} = \overline{A'B'},\ \overline{BC} = \overline{B'C'},\ \overline{CD} = \overline{C'D'},\ \overline{DA} = \overline{D'A'}$$

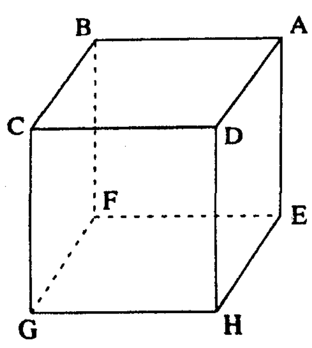
ثابت کنید خط $A'C'$ بر خط $B'D'$ عمود است.

مسألهٔ ۱۹۹. فرض کنید $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ سه چندجمله‌ای‌اند به‌طوری‌که

$$P(x^۵) + xQ(x^۵) + x^۲R(x^۵)$$

بر $x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $P(x)$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر است (المپیاد ریاضی آمریکا، ۱۹۷۶).

مسألهٔ ۲۰۰. مکعب $ABCDEFGH$ را مانند شکل ۲۵ درنظر بگیرید. مینیمم محیط مثلث PQR را که رأسهایش، P، Q و R، به‌ترتیب روی یالهای AB، CG و EH واقع‌اند تعیین کنید.



شکل۲۵

مسألهٔ ۲۰۱. مردی هر روز صبح برای رسیدن به محل‌کار خود شش کیلومتر رانندگی می‌کند. او هر رو در زمان مشخصی از منزل خارج می‌شود و برای اینکه به موقع به محل‌کارش برسد، باید دقیقاً سرعت میانگینش ۳۶ کیلومتر بر ساعت باشد. روزی این مرد در ۲ کیلومتر اول مسیر پشت کامیونی می‌افتد که نمی‌توان از آن سبقت گرفت و در نتیجه سرعت میانگینش در این فاصله به ۱۲ کیلومتر بر ساعت کاهش می‌یابد. با این فرض که اتومبیل او حداکثر ۱۵۰ کیلومتر بر ساعت سرعت بگیرد، آیا ممکن است در این روز به موقع به محل‌کار برسد؟

مسألهٔ ۲۰۲. تقویمی رومیزی به‌شکل ۱۲وجهی منتظمی است که نام هر ماه روی یکی از ۱۲ وجه پنج‌ضلعی شکل آن نوشته شده است. چند طریق اساساً متفاوت برای نوشتن ماهها روی وجه‌های این ۱۲وجهی وجود دارد؟

مسألهٔ ۲۰۳. الف) ثابت کنید (در مبنای ۱۰) ۱ تنها عدد طبیعی است که با مجموع رقمهایش برابر است
ب) همهٔ عددهای طبیعی، علاوه‌بر ۱، راکه با مجموع مکعبهای رقمهای خود (در مبنای ۱۰) برابرند بیابید

مسألهٔ ۲۰۴. همهٔ راههای اساساً متفاوت را برای قرار دادن چهار نقطه در صفحه بیابید به‌طوری‌که طول شش پاره‌خطی که این نقاط را به یکدیگر وصل می‌کنند از میان دقیقاً دو عدد متفاوت انتخاب شده باشند

مسألهٔ ۲۰۵. سه نفر در نوعی بازی شرکت کرده‌اند. هر بازیکن تعدادی مهره در اختیار دارد (ممکن است تعداد مهره‌های آنها یکی نباشد) و بازندهٔ هر بازی باید آنقدر مهره به دو بازیکن دیگر بدهد که مهره‌های هر یک از آنها دوبرابر شود. پس از سه بازی معلوم می‌شود که هریک از بازیکنان فقط یک‌بار باخته است و ۲۴ مهره در اختیار دارد. در ابتدا هریک از این سه نفر چند مهره داشته است؟

مسألهٔ ۲۰۶. الف) در مثلث ABC، $\overline{AB} = ۲\overline{BC}$. ثابت کنید BC باید کوتاهترین ضلع مثلث باشد اگر محیط مثلث برابر با ۲۴ باشد، ثابت کنید $۴ < \overline{BC} < ۶$.
ب) اگر طول یک ضلع مثلثی سه‌برابر طول ضلعی دیگر و محیط مثلث برابر با ۲۴ باشد، کرانهایی برای طول کوتاهترین ضلع مثلث بیابید.

مسألهٔ ۲۰۷. ثابت کنید که اگر k عددی صحیح و نامنفی باشد،
الف) $۱^{۲k} + ۲^{۲k} + ۳^{۲k} \geqslant ۲ \times ۷^k$
ب) $۱^{۲k+۱} + ۲^{۲k+۱} + ۳^{۲k+۱} \geqslant ۶^{k+۱}$،
در این رابطه‌ها چه‌موقع برابری برقرار است؟

مسألهٔ ۲۰۸. معادلهٔ زیر را حل کنید

$$(x+۱)(x+۲)(x+۳) = (x-۳)(x+۴)(x+۵)$$

مسألهٔ ۲۰۹. کوچکترین عدد صحیحی که باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۲، ۳، ۴، ... و ۱۰ به‌ترتیب ۱، ۲، ۳،

۰۰۰ و ۹ است چیست؟

مسألهٔ ۲۱۰. دو اتومبیل همزمان از نقاط A و B در یک جاده در جهت مخالف یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند. سرعت این اتومبیلها ثابت و به نسبت ۵ به ۴ است و سرعت اتومبیلی که از A حرکت کرده است بیشتر است. این دو اتومبیل متناوباً بین نقاط A و B حرکت می‌کنند. اگر این دو اتومبیل دومین‌بار در کیلومتر ۱۴۵ جاده و سومین‌بار در کیلومتر ۲۰۱ به‌هم برسند، نقاط A و B در کیلومتر چندم جاده واقع‌اند؟

مسألهٔ ۲۱۱. سه رقم آخر عدد $۷^{۹۹۹۹}$ را تعیین کنید.

مسألهٔ ۲۱۲. ABC مثلثی است که در آن $\overline{AB} = \overline{AC}$ و $\angle BAC = ۲۰^\circ$. نقطهٔ X روی AB چنان انتخاب شده است که $\angle XCB = ۵۰^\circ$؛ نقطهٔ Y روی AC چنان انتخاب شده است که $\angle YBC = ۶۰^\circ$. $\angle AXY$ را تعیین کنید.

مسألهٔ ۲۱۳. رأسهای چهاروجهیی دوسر دو پاره‌خط واقع بر دو خط متنافرند. ثابت کنید که اگر پاره‌خطها را در امتداد این دو خط حرکت دهیم (به‌طوری‌که طول پاره‌خطها تغییر نکند)، حجم چهاروجهی تغییر نمی‌کند.

مسألهٔ ۲۱۴. الف) تعدادی سرباز در صفی یک کیلومتری آمادهٔ حرکت‌اند. با شروع حرکت سربازان افسری از انتهای صف با سرعت ثابت به جلو صف می‌آید و سپس برمی‌گردد و تا انتهای صف با همان سرعت ثابت حرکت می‌کند. وقتی‌که افسر به آخرین نفر در انتهای صف می‌رسد، صف یک کیلومتر پیش‌رفته است، یعنی آخرین نفر صف در محلی قرارگرفته که در ابتدای حرکت اولین نفر در آن محل بوده است. افسر چه مسافتی را پیموده است؟
ب) در صورتی‌که سربازان در چندین صف و در مربعی به ضلع ۱ کیلومتر صف بسته باشند، و بعد از شروع حرکت، افسر دورتادور آرایش مربعی سربازان را بازدید کند، به‌همان پرسش قسمت (الف) پاسخ دهید.

مسألهٔ ۲۱۵. فرض کنید $ABCD$ چهاروجهی باشد و مساحت وجه‌هایش برابر باشند. فرض کنید O نقطه‌ای درون $ABCD$ باشد و L، M، N و P پای عمودهایی باشند که از O بر چهار وجه رسم شده‌اند. ثابت کنید

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} \geqslant ۳(\overline{OL} + \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP})$$

مسألهٔ ۲۱۶. در بدنهٔ قایقی شکاف ایجاد شده است و آب با آهنگ یکنواخت وارد قایق می‌شود. وقتی‌که یکی از ملوانان متوجه شکاف بدنهٔ قایق می‌شود، مقداری آب در قایق جمع شده است. از این لحظه به بعد، ۱۲ ملوان با مهارت یکسان می‌توانند در ۳ ساعت آب درون قایق را کاملاً تخلیه کنند، در حالی‌که ۵ نفر از این ملوانان در ۱۰ ساعت می‌توانند آب درون قایق را کاملاً تخلیه کنند. برای اینکه آب

درون قایق در ۲ ساعت کاملاً تخلیه شود چند ملوان باید کار کنند؟

مسألهٔ ۲۱۷. مهرهٔ اسب در صفحهٔ شطرنج در هر حرکت دو خانه به موازات یک ضلع صفحه و یک خانه در جهت عمود بر این ضلع حرکت می‌کند. منظور از گردش اسب مجموعه‌ای از حرکتهای اسب است به‌طوری‌که در هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج دقیقاً یک‌بار قرار گیرد. گردشی را بسته می‌نامیم که آخرین خانه‌ای که اسب در آن قرار می‌گیرد درست به‌اندازهٔ یک حرکت اسب از اولین خانهٔ شروع حرکت فاصله داشته باشد. ثابت کنید که اگر m و n عددهایی فرد باشند، گردش بستهٔ اسب روی صفحهٔ شطرنج $m \times n$ ممکن نیست.

مسألهٔ ۲۱۸. بنابر زمانی که ساعتی بسیار دقیق نشان می‌دهد، عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار ساعت من دقیقاً هر ۶۵ دقیقه یک‌بار روی‌هم قرار می‌گیرند. ساعت من جلو است یا عقب؟ چقدر؟ چقدر طول می‌کشد تا ساعت من یک ساعت جلو یا عقب بیفتد؟

مسألهٔ ۲۱۹. نمودار نامعادلهٔ زیر را رسم کنید

$$|x^۲ + y| \leqslant |y^۲ + x|$$

مسألهٔ ۲۲۰. ثابت کنید که نابرابری زیر به‌ازای هر مقدار حقیقی از a و b برقرار است:

$$۳a^۴ - ۴a^۳b + b^۴ \geqslant ۰$$

مسألهٔ ۲۲۱. همهٔ مثلثهایی را بیابید که طول ضلعهایشان عددهایی صحیح باشند و در آنها یک زاویه دوبرابر زاویه‌ای دیگر باشد.

مسألهٔ ۲۲۲. الف) ثابت کنید که اگر n عددی مثلثی باشد، $۹n + ۱$ نیز عددی مثلثی است. (عددهای مثلثی عبارت‌اند از ۱، ۳، ۶، ۱۰، $\ldots$، $\frac{k(k+۱)}{۲}$، $\ldots$؛ پیوست، ب(۹) را ببینید.)
ب) همهٔ عددها مانند a و b را بیابید به‌طوری‌که اگر n عددی مثلثی باشد، $an + b$ نیز عددی مثلثی باشد.

مسألهٔ ۲۲۳. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n + ۱}\right] = \left[\sqrt{۴n + ۲}\right]$$

در اینجا [ ] نمایش تابع جزءِ صحیح است.

مسألهٔ ۲۲۴. این حکم را ثابت یا رد کنید: اگر خط l و دو نقطهٔ A و B خارج از l مفروض باشند، نقطهٔ P، روی l، که به‌ازای آن $\angle APB$ بیشترین مقدار ممکن را دارد، باید بین پای عمودهایی واقع باشد که از A و B بر l رسم می‌شوند.

مسألهٔ ۲۲۵. همهٔ مثلثهایی مانند ABC را تعیین کنید که در آنها

$$\cos A\cos B+\sin A\sin B\sin C=۱$$

مسألهٔ ۲۲۶. فرض کنید

$$a_۱=۲^۲+۳^۲+۶^۲,\ \ a_۲=۳^۲+۴^۲+۱۲^۲,\ \ a_۳=۴^۲+۵^۲+۲۰^۲$$

این مثالها را به‌گونه‌ای تعمیم دهید که a_n همواره مربع کامل باشد.

مسألهٔ ۲۲۷. فرض کنید x، y و z عددهایی حقیقی و نامنفی باشند. ثابت کنید

$$۸(x^۳+y^۳+z^۳)^۲\geqslant ۹(x^۲+yz)(y^۲+zx)(z^۲+xy)$$

مسألهٔ ۲۲۸. هر کسی که تاکنون بر روی زمین زیسته است، تعداد دفعات مشخصی در طول زندگی خود با انسانهای دیگر (غیر از خود) دست داده است. ثابت کنید تعداد کسانی که در طول زندگی خود به تعداد دفعات فرد با انسانهای دیگر دست داده‌اند زوج است.

مسألهٔ ۲۲۹. اگر a، b و c عددهای معلومی باشند، دستگاه معادله‌های زیر را برحسب x، y و z حل کنید

$$x^۲-yz=a^۲ \qquad (۱)$$

$$y^۲-zx=b^۲ \qquad (۲)$$

$$z^۲-xy=c^۲ \qquad (۳)$$

مسألهٔ ۲۳۰. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$۱^۲-۲^۲+۳^۲-۴^۲+\cdots+(-۱)^n(n-۱)^۲+(-۱)^{n+۱}n^۲=(-۱)^{n+۱}(۱+۲+۳+\cdots+n)$$

مسألهٔ ۲۳۱. اگر a، b و c طول سه ضلع مثلثی باشند، ثابت کنید

$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

مسألهٔ ۲۳۲. ثابت کنید که طولانیترین وتر در ناحیه‌ای با تقارن مرکزی باید از مرکز این ناحیه بگذرد.

مسألهٔ ۲۳۳. قرصی به k قطاع تقسیم شده است و در هر قطاع یک سکه قرار داده شده است. در هر حرکت، دو سکه را (که لزوماً در یک قطاع نیستند)، یکی در جهت ساعتگرد و دیگری در جهت پادساعتگرد به قطاعهای مجاور منتقل می‌کنیم. تعیین کنید آیا دنباله‌ای از حرکتها وجود دارد که در نهایت همهٔ سکه‌ها در یک قطاع جمع شوند؟

مسألهٔ ۲۳۴. فرض کنید $\sin x+\sin y=a$ و $\cos x+\cos y=b$. مقادیر $\tan\frac{x}{۲}$ و $\tan\frac{y}{۲}$ را تعیین کنید.

مسألهٔ ۲۳۵. دو نقطهٔ ثابت A و B و نقطهٔ متحرک M را روی دایره‌ای درنظر می‌گیریم. بر امتداد پاره‌خط AM، بیرون از دایره، نقطهٔ N را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overline{MN} = \overline{MB}$. مکان هندسی نقطهٔ N را بیابید.

مسألهٔ ۲۳۶. مقادیر حقیقی x را که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند بیابید

$$(x+۱)(x^۲+۱)(x^۳+۱) = ۳۰x^۳$$

مسألهٔ ۲۳۷. مقدار بنزینی که لازم است تا اتومبیلی یک دور کامل در مسیری دایره‌ای شکل حرکت کند به چند بخش تقسیم می‌شود و این بخشها به‌تصادف در نقاطی از مسیر قرار داده می‌شوند. ثابت کنید نقطه‌ای در مسیر وجود دارد که اگر اتومبیل با باک خالی در آن نقطه قرار گیرد، بتواند در یکی از دو جهت ممکن مسیر دایره‌ای را به‌طور کامل بپیماید.

مسألهٔ ۲۳۸. ثابت کنید که به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x (برحسب رادیان)،

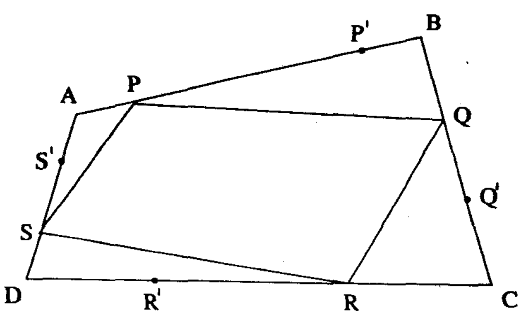
$$\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$$

مسألهٔ ۲۳۹. ثابت کنید در صورتی‌که m عددی طبیعی باشد، معادلهٔ

$$x^۲ + y^۲ + ۲xy - mx - my - m - ۱ = ۰$$

دقیقاً m جواب مانند (x,y) دارد که در آنها x و y هر دو عددهایی طبیعی‌اند.

مسألهٔ ۲۴۰. $PQRS$، مطابق شکل ۲۶، چهارضلعی محدب دلخواهی محاط در چهارضلعی محدب $ABCD$ است. $P'Q'R'S'$ چهارضلعی دیگری محاط در $ABCD$ است به‌طوری‌که P'، Q'، R' و S' تصویرهای «آینه‌ای» P، Q، R و S به‌ترتیب نسبت به نقطهٔ وسط AB، BC، CD و DA هستند. همهٔ چهارضلعیها مانند $ABCD$ را تعیین کنید به‌طوری‌که مساحت $PQRS$ و $P'Q'R'S'$ (لزوماً) برابر باشد.



شکل ۲۶

مسألهٔ ۲۴۱. عددهای a، b، c و d که هیچ دوتایی از آنها باهم برابر نیستند مفروض‌اند. دستگاه معادله‌های زیر را برحسب x، y، z و w حل کنید:

$$x + ay + a^2z + a^3w = a^4$$

$$x + by + b^2z + b^3w = b^4$$

$$x + cy + c^2z + c^3w = c^4$$

$$x + dy + d^2z + d^3w = d^4$$

مسألهٔ ۲۴۲. فرض کنید عددهای صحیح a، b و c طول ضلعهای مثلثی قائم‌الزاویه باشند و $a < b < c$. ثابت کنید $ab(b^2 - a^2)$ بر ۸۴ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۴۳. اگر A، B و C زاویه‌های مثلثی باشند، ماکسیمم عبارت زیر را تعیین کنید

$$\sin^2 A + \sin B \sin C \cos A$$

مسألهٔ ۲۴۴. اگر روی دایره‌ای مفروض سه نقطه را به‌تصادف، به‌طور یکنواخت نسبت به طول قوس، انتخاب کنیم، احتمال اینکه مثلث مشخص شده با این سه نقطه حاده باشد چقدر است؟

مسألهٔ ۲۴۵. آیا می‌توان در صفحهٔ مختصات دکارتی همهٔ نقطه‌هایی مانند (x, y) را، که در آنها x و y عددهایی صحیح‌اند، با سه رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که

الف) هر رنگ بی‌نهایت بار در بی‌نهایت خط موازی محور xها ظاهر شود؛ و

ب) هیچ سه نقطه‌ای با سه رنگ متفاوت همخط نباشند.

مسألهٔ ۲۴۶. مردی با سرعت ۴ کیلومتر بر ساعت به‌سمت شمال می‌رود و به نظرش می‌رسد که باد از طرف غرب می‌وزد. او سرعت خود را دوبرابر می‌کند و به نظرش می‌رسد که باد از شمال‌غربی می‌وزد. تندی باد چقدر است؟

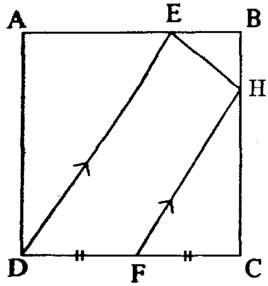
مسألهٔ ۲۴۷. چهار کرهٔ توپر بر سطح میزی قرار دارند. هر کره بر سه کرهٔ دیگر مماس است. اگر شعاع سه تا از کره‌ها R باشد، شعاع کرهٔ چهارم چقدر است؟

مسألهٔ ۲۴۸. یکی از جوابهای معادلهٔ $a^2+b^2+c^2+d^2 = abcd$ این است: $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$. بی‌نهایت جواب دیگر برای این معادله، در مجموعهٔ عددهای طبیعی، بیابید.

مسألهٔ ۲۴۹. یک ضلع مثلثی ۱۰ فوت بلندتر از ضلعی دیگر و زاویهٔ بین این دو ضلع 60° است. دو دایره به قطر این دو ضلع رسم می‌کنیم. یکی از نقاط تقاطع این دو دایره رأس مشترک بین دو ضلع است. فاصلهٔ نقطهٔ تقاطع دیگر دو دایره از امتداد ضلع سوم مثلث چقدر است؟

مسألهٔ ۲۵۰. طول دو ضلع برابر مثلث متساوی‌الساقینی معلوم است. طول ضلع سوم چقدر باشد تا مساحت مثلث ماکسیمم شود؟

مسألهٔ ۲۵۱. فرض کنید $ABCD$ مربع، F نقطهٔ وسط DC و E نقطه‌ای روی AB باشد به‌طوری‌که $\overline{AE} > \overline{EB}$. نقطهٔ H را روی BC طوری انتخاب کنید که $FH \parallel DE$. ثابت کنید EH بر دایرهٔ محاطی مربع مماس است. (شکل ۲۷ را ببینید.)

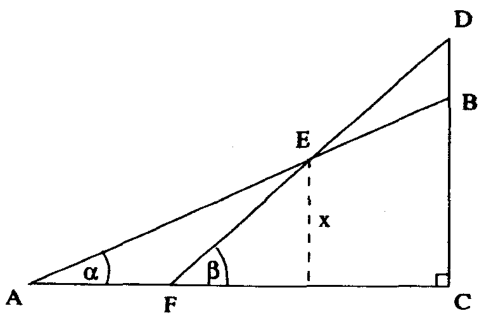


شکل۲۷

مسألهٔ ۲۵۲. با فرض اینکه a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند به‌طوری‌که $a^a = b$ و $b^b = a$، ثابت کنید $a = b = ۱$.

مسألهٔ ۲۵۳. کوچکترین عدد مربع کامل که به چهار رقم ۹۰۰۹ ختم می‌شود کدام است؟

مسألهٔ ۲۵۴. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و FDC چنان‌اند که وترهایشان، AB و FD، مطابق شکل ۲۸، در نقطهٔ E متقاطع‌اند. x (فاصلهٔ نقطهٔ E از ضلع FC) را برحسب $\alpha = \angle BAC$، $\beta = \angle DFC$ و طول دو وتر بیابید.



شکل۲۸

مسألهٔ ۲۵۵. ملاحظه کنید که

$$\frac{۱-\frac{۱}{۲^۳}}{۱+\frac{۱}{۲^۳}} = \frac{۲}{۳}\left(۱+\frac{۱}{۲\times ۳}\right)$$

و

$$\frac{۱-\frac{۱}{۲^۳}}{۱+\frac{۱}{۲^۳}} \times \frac{۱-\frac{۱}{۳^۳}}{۱+\frac{۱}{۳^۳}} = \frac{۲}{۳}\left(۱+\frac{۱}{۳\times ۴}\right)$$

قانونی کلی که از این مثالها به ذهن می‌رسد بیان و آن‌را ثابت کنید.

مسألهٔ ۲۵۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید $(x-۱)^۲$ عاملی از چندجمله‌ای زیر است:

$$x^n - n(x-۱) - ۱$$

مسألهٔ ۲۵۷. توجه کنید که در جدول زیر هریک از ۳۶ عدد آرایهٔ مربعی برابر است با مجموع عدد بالای ستون و عدد سمت چپ سطر مربوط به‌آن عدد.

	۱	۹	۳	۲	۴	۸
۲	۳	۱۱	<u>۵</u>	۴	۶	۱۰
۷	۸	<u>۱۶</u>	۱۰	۹	۱۱	۱۵
۳	۴	۱۲	۶	<u>۵</u>	۷	۱۱
۵	۶	۱۴	۸	۷	۹	<u>۱۳</u>
۸	<u>۹</u>	۱۷	۱۱	۱۰	۱۲	۱۶
۷	۸	۱۶	۱۰	۹	<u>۱۱</u>	۱۵

مثلاً $۸ + ۹ = ۱۷$ و $۵ + ۸ = ۱۳$.

شش عدد «سیاه» در جدول طوری انتخاب شده‌اند که در هر سطر و در هر ستون یک عدد سیاه باشد. عددهای زیرخط‌دار نیز به‌روشی مشابه انتخاب شده‌اند. ملاحظه کنید که مجموع عددهای سیاه

$$۳ + ۱۰ + ۱۲ + ۹ + ۱۶ + ۹ = ۵۹$$

و مجموع عددهای زیرخط‌دار

$$۵ + ۱۶ + ۵ + ۱۳ + ۹ + ۱۱ = ۵۹$$

است. ثابت کنید مجموع هر شش عدد انتخابی از این ۳۶ عدد، به‌طوری‌که از هر سطر و از هر ستون دقیقاً یکی برداریم، برابر با ۵۹ است.

مسألهٔ ۲۵۸. دایره‌هایی برابر طوری در صفحه چیده شده‌اند که هر دایره بر شش دایرهٔ دیگر مماس است. سطح این دایره‌ها چه درصدی از صفحه را پوشانده است؟

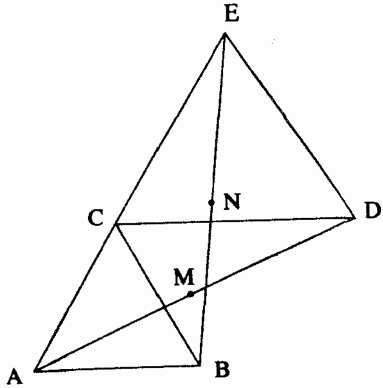
مسألهٔ ۲۵۹. ثابت کنید که اگر a، b و c عددهایی صحیح باشند که در برابری $a + b\sqrt{۲} + c\sqrt{۳} = ۰$ صدق کنند، آنگاه $a = b = c = ۰$.

مسألهٔ ۲۶۰. ثابت کنید که اگر a، b و c سه عدد گویای متمایز باشند، عدد

$$\frac{۱}{(b-c)^۲} + \frac{۱}{(c-a)^۲} + \frac{۱}{(a-b)^۲}$$

مربع عددی گویاست.

مسألهٔ ۲۶۱. فرض کنید ABC مثلثی متساوی‌الاضلاع و E نقطهٔ دلخواهی بر امتداد AC باشد. فرض کنید نقطهٔ D، مانند شکل ۲۹، طوری انتخاب شده است که CDE مثلثی متساوی‌الاضلاع شود. اگر M نقطهٔ وسط پاره‌خط AD و N نقطهٔ وسط پاره‌خط BE باشد، ثابت کنید $\triangle CMN$ متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۲۹

مسألهٔ ۲۶۲. فرض کنید

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$$

و

$$p = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

$$q = a_1a_3 + a_3a_5 + a_5a_1 + a_2a_4 + a_4a_6 + a_6a_2$$

$$r = a_1a_3a_5 + a_2a_4a_6$$

آیا همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ سوم $2x^3 - px^2 + qx - r$ حقیقی‌اند؟

مسألهٔ ۲۶۳. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ عددی مرکب است.

مسألهٔ ۲۶۴. در مربع «جادویی» ضربی زیر، حاصل‌ضرب عناصر هریک از سه ردیف، هریک از سه ستون، و هریک از دو قطر یکسان‌اند؛ یعنی abc، def، ghi، adg، beh، cfi، aei و ceg همگی برابر با عددی مانند k هستند. اگر همهٔ درایه‌های مربع عددهایی صحیح باشند، ثابت کنید که k باید مکعب کامل باشد.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

مسألهٔ ۲۶۵. چهار متهم ارتکاب جرمی جمله‌های زیر را به پلیس گفته‌اند:

اکبر: پدرام مرتکب این جرم شد.

بهرام: من مرتکب این جرم نشده‌ام.

پدرام: تیمور مرتکب این جرم شد.

تیمور: پدرام دروغ گفت که من مرتکب این جرم شده‌ام.

الف) با این فرض که دقیقاً یکی از چهار جملهٔ بالا راست است، چه کسی مرتکب جرم شده است؟

ب) با این فرض که دقیقاً یکی از چهار جملهٔ بالا دروغ است، چه کسی مرتکب جرم شده است؟

مسألهٔ ۲۶۶. آیا می‌توانید دو تاس را (نه لزوماً به یک شکل) طوری دستکاری کنید که در پرتاب دو تاس باهم، احتمال وقوع پیشامدهای ۲، ۳، $\cdots$ و ۱۲ یکی باشد؟

مسألهٔ ۲۶۷. الف) مساحت ناحیه‌ای از صفحهٔ مختصات دکارتی را تعیین کنید که هر نقطه از آن مانند (x,y) در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$|x| + |y| + |x + y| \leqslant ۲$$

ب) حجم ناحیه‌ای از فضا را تعیین کنید که هر نقطه از آن مانند (x,y,z) در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

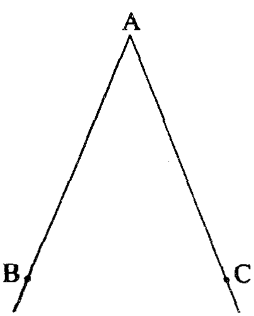
$$|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \leqslant ۲$$

مسألهٔ ۲۶۸. به چند طریق اساساً متفاوت می‌توان ۳ جفت گوشواره به شکلهای مختلف را دور جعبه‌ای دایره‌ای‌شکل چید به‌طوری‌که هیچ گوشواره‌ای کنار جفت خود نباشد؟ (منظور از دو آرایش «اساساً متفاوت» این است که یکی از دوران دیگری به‌دست نیاید.)

مسألهٔ ۲۶۹. در شکل ۳۰، AB و AC دو جاده‌اند که زمین بین آنها ناهموار است. طول AB و طول AC هر دو p و طول BC، q است. مردی در نقطهٔ B ایستاده است و می‌خواهد به نقطهٔ C برود. سرعت این مرد در جاده v و در زمین ناهموار بین جاده‌ها w است. ثابت کنید دو مسیر مشخص وجود دارد که اگر این مرد بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به مقصد برسد باید یکی از این دو مسیر را در پیش بگیرد. در واقع، استدلال کنید که

الف) اگر $۲pw \leqslant qv$، باید مسیر جاده را طی کند و از A بگذرد؛

ب) اگر $۲pw \geqslant qv$، باید در امتداد خط مستقیم BC حرکت کند.



شکل ۳۰

مسألهٔ ۲۷۰. ثابت کنید چندجمله‌ایی مانند $p(x)$ وجود ندارد به‌طوری‌که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$p(n) = \log ۱ + \log ۲ + \cdots + \log n$$

مسألهٔ ۲۷۱. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n تعریف کنید

$$f(n) = ۱^n + ۲^{n-۱} + ۳^{n-۲} + ۴^{n-۳} + \cdots + (n-۲)^۳ + (n-۱)^۲ + n$$

مینیمم $\frac{f(n+۱)}{f(n)}$ چیست؟

مسألهٔ ۲۷۲. فرض کنید a، b، c و d عددهایی طبیعی باشند که از ۲ کوچکتر نیستند. با استفاده از پرانتز، همهٔ تعبیرهای مختلف عبارت زیر را بنویسید:

$$a^{b^{c^d}}$$

مثلاً می‌توانیم بنویسیم $a^{((b^c)^d)} = a^{(b^{cd})}$ یا $(a^b)^{(c^d)} = a^{b(c^d)}$. در حالت کلی، این تعبیرها با یکدیگر برابر نیستند.

بین کدام جفت از تعبیرها همواره نابرابری برقرار است؟ برای جفت تعبیرهایی که بین آنها، در حالت کلی، لزوماً نابرابری برقرار نیست، مثالهایی عددی بیاورید که حالتهای مختلف رابطهٔ بین آنها را نشان دهند.

مسألهٔ ۲۷۳. ۳۵ نفر در هر ۱۰۰۰ نفر فشارخون بالا دارند. ۸۰٪ ازکسانی‌که فشارخون بالا دارند و ۶۰٪ ازکسانی‌که فشارخون بالا ندارند مشروبات الکلی می‌نوشند. چه درصدی ازکسانی‌که مشروبات الکلی می‌نوشند فشارخون بالا دارند؟

مسألهٔ ۲۷۴. تعداد جایگشتهای $(۱, ۲, \cdots, n)$ مانند $(s_۱, s_۲, \cdots, s_n)$، $n!$ است. چه تعداد از این جایگشتها در شرطهای $s_k \geqslant k - ۲$، $k = ۱, ۲, \cdots, n$، صدق می‌کنند؟

مسألهٔ ۲۷۵. ثابت کنید در هر چهارضلعی با طول ضلعهای a، b، c و d رابطهٔ زیر برقرار است:

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ > \frac{۱}{۳}d^۲$$

مسألهٔ ۲۷۶. ۸ عدد طبیعی متمایز مانند $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_n از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, ۱۵, ۱۶\}$ مفروض‌اند. ثابت کنید عددی مانند k وجود دارد که به‌ازای آن،

$$a_i - a_j = k$$

دست‌کم سه جواب متمایز مانند (a_i, a_j) دارد.

مسألهٔ ۲۷۷. آیا عددی صحیح و ثابت مانند k وجود دارد که به‌ازای آن تصویر نگاشت

$$(a, y) \longmapsto x^۲ + kxy + y^۲, \qquad (x \text{ و } y \text{ صحیح‌اند})$$

شامل (الف) همهٔ عددهای صحیح؛ (ب) همهٔ عددهای طبیعی باشد؟ اگر جواب مثبت است مقداری از k بیابید، و اگر جواب منفی است، برهانی بیاورید.

مسألهٔ ۲۷۸. فرض کنید a، b و c عددهایی صحیح باشند و همه همزمان برابر با صفر نباشند. ثابت کنید که اگر $ax^{۲} + bx + c$ ریشه‌ای گویا داشته باشد دست‌کم یکی از عددهای a، b و یا c زوج است.

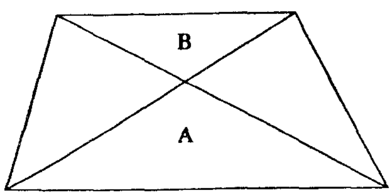
مسألهٔ ۲۷۹. باربو می‌گوید: «من از کلامکین چاقترم و کلامکین از موزر چاقتر است». کلامکین می‌گوید «موزر از من چاقتر است، و موزر از باربو هم چاقتر است». موزر می‌گوید «کلامکین از من چاقتر است و باربو هم‌وزن من است». با این فرض که بین دو نفر کسی که لاغرتر است بیشتر راست می‌گوید، باربو، کلامکین و موزر را به‌ترتیب وزنشان مرتب کنید.

مسألهٔ ۲۸۰. فرض کنید $f(x,y)$ تابعی از دو متغیر حقیقی باشد که متحد با صفر نیست. اگر به‌ازای همهٔ مقادیر x و y، $f(x,y) = kf(y,x)$، مقادیر ممکن k کدام‌اند؟

مسألهٔ ۲۸۱. نقطه‌ای از صفحه بیابید که مجموع فاصله‌هایش از رأسهای چهارضلعی محدب مفروضی مینیمم باشد.

مسألهٔ ۲۸۲. در ابتدای زمستان، محور زمین نسبت به خط عمود بر صفحهٔ مدار دوران زمین حدود ′۲۷°۲۳ انحراف دارد و این انحراف به‌گونه‌ای است که قطب شمال از قطب جنوب به خورشید دورتر است. مدت زمان تقریبی بین طلوع و غروب خورشید را در این موقع از سال در محلی واقع در عرض جغرافیایی ′۴۵°۴۳ شمالی بیابید. (طول روز در شهر شما چقدر است؟)

مسألهٔ ۲۸۳. ذوزنقه‌ای را قطرهایش به چهار مثلث تقسیم کرده‌اند. فرض کنید A و B مساحت مثلثهای مجاور به دو ضلع متوازی ذوزنقه باشند (شکل ۳۱ را ببینید). مساحت ذوزنقه را برحسب A و B بیابید.

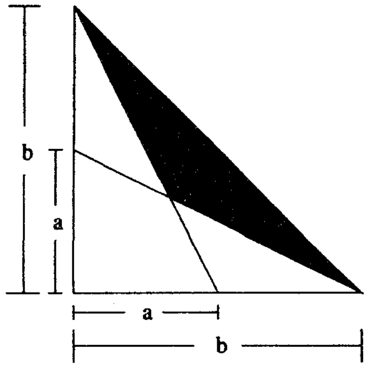


شکل۳۱

مسألهٔ ۲۸۴. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. مجموع رقمهایی را که در عددهای زیر آمده‌اند بیابید:

$$۱, ۲, ۳, \cdots, ۱۰^{n} - ۲, ۱۰^{n} - ۱$$

مسألهٔ ۲۸۵. مساحت قسمت سیاه‌شده را در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۳۲ برحسب a و b بیابید.



شکل۳۲

مسألهٔ ۲۸۶. نقطه‌ای درون پنج‌ضلعی منتظمی مفروض است. ۹ نقطهٔ دیگر درون این پنج‌ضلعی بیابید به‌طوری‌که مجموع فاصله‌های هریک از آنها از ضلعهای پنج‌ضلعی (و در صورت لزوم از امتداد آنها) برابر مجموع فاصله‌های نقطهٔ مفروض از ضلعهای پنج‌ضلعی باشد.

مسألهٔ ۲۸۷. $(x+y)^{۷}-(x^{۷}+y^{۷})$ را تجزیه کنید.

مسألهٔ ۲۸۸. $ABCDE$ پنج‌ضلعیی منتظم است. BE پاره‌خطهای AC و AD را به‌ترتیب در H و K قطع می‌کند. خطی که از H موازی با AD رسم می‌شود AB را در F قطع می‌کند. خطی که از K موازی با AC رسم می‌شود AE را در G قطع می‌کند. ثابت کنید که $AFHKG$ پنج‌ضلعیی منتظم است.

مسألهٔ ۲۸۹. اگرچه ممکن است جمع زیر درست به‌نظر آید، ثابت کنید که در واقع به هیچ ترتیبی نمی‌توان رقمهای متمایزی را به حروف مختلف نسبت داد تا حکم زیر از لحاظ عددی درست باشد:

$$\begin{array}{r} THREE \\ +\quad FIVE \\ \hline EIGHT \end{array}$$

مسألهٔ ۲۹۰. فرض کنید a، b و c سه عدد طبیعی باشند و

x بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک b و c باشد،

y بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و c باشد،

z بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد.

ثابت کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a، b و c با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x، y و z برابر است.

مسألهٔ ۲۹۱. اندازهٔ کشت نوعی باکتری هر ۱۲ ساعت دوبرابر می‌شود. ظرفی که برای ۱,۰۰۰,۰۰۰ باکتری جا دارد بعد از ۱۳ روز پر می‌شود. چقدر طول می‌کشد تا ظرفی به‌ظرفیت ۲,۰۰۰,۰۰۰ باکتری پر شود؟

مسألهٔ ۲۹۲. فرض کنید $f(x)$ تابعی غیرنزولی از متغیری حقیقی باشد، به‌طوری‌که شیب خطی که از هر دو نقطهٔ منحنی $y = f(x)$ می‌گذرد منفی نباشد. فرض کنید c عددی حقیقی باشد. معادلهٔ زیر را حل کنید:

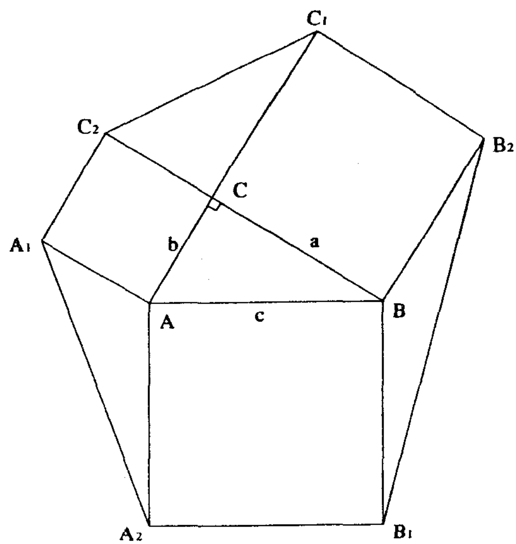
$$x = c - f(x + f(c))$$

مسألهٔ ۲۹۳. فرض کنید E نقطهٔ وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد و نقطهٔ F روی پاره‌خط AC طوری انتخاب شده باشد که $\overline{AC} = ۳\overline{FC}$. نسبت مساحتهای مثلث FEC و چهارضلعی $ABEF$ را بیابید.

مسألهٔ ۲۹۴. بدون استفاده از جدول لگاریتم مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$\left(\log_{۳} ۱۶۹\right) \times \left(\log_{۱۳} ۲۴۳\right)$$

مسألهٔ ۲۹۵. با استفاده از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که طول ضلعهای آن a، b و c هستند ($c^۲ = a^۲ + b^۲$) شش‌ضلعیی رسم کرده‌ایم (شکل ۳۳ را ببینید) که رأسهایش، رأسهای «بیرونی» مربعهایی هستند که روی ضلعهای AB، BC و CA رسم شده‌اند. مساحت این شش‌ضلعی را برحسب a، b و c بیابید.



شکل۳۳

مسألهٔ ۲۹۶. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، مثلثی که طول ضلعهایش

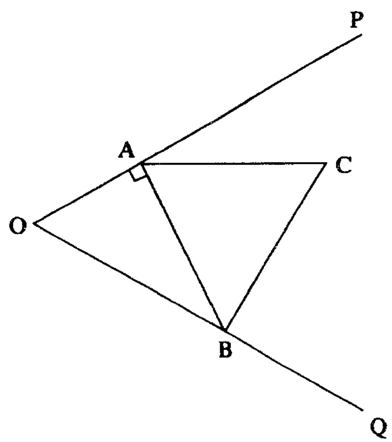
$$۶ \times ۱۰^{n+۲},\ \ ۱۱۲۵ \times ۱۰^{۲n+۱} - ۸,\ \ ۱۱۲۵ \times ۱۰^{۲n+۱} + ۸$$

باشد، قائم‌الزاویه است.

مسألهٔ ۲۹۷. ۳۲ بازیکن تنیس که در بازی مهارت یکسان دارند، در یک دوره مسابقهٔ حذفی شرکت کرده‌اند (در دور اول بازیکنان مسابقه می‌دهند و بازندهٔ هر بازی از ادامهٔ بازیها کنارگذاشته می‌شود و به‌همین ترتیب تا آخر). چقدر احتمال دارد که دو نفر خاص از این بازیکنان در طول این دوره با یکدیگر بازی کنند؟

مسألهٔ ۲۹۸. روش زیر برای تثلیث زاویهٔ حادهٔ دلخواه POQ به کمک ستاره و پرگار پیشنهاد شده است (شکل ۳۴ را ببینید).

«از نقطهٔ دلخواه B روی OQ عمودی بر OP رسم می‌کنیم تا آن‌را در A قطع کند. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را طوری رسم می‌کنیم که C و O در یک طرف خط AB نباشند. در این‌صورت $\angle POC = \frac{۱}{۳}\angle POQ$.»



شکل۳۴

زاویه‌هایی مانند POQ را که این روش برای تثلیث آنها به‌کار می‌آید پیدا کنید و ثابت کنید که این روش برای تثلیث هیچ زاویهٔ دیگری، غیر از اینها، به‌کار نمی‌آید.
(این مسأله براساس ایده‌ای از جان و استوارت روزنتال، هنگامی‌که دانش‌آموز دبیرستان دولتی فورست‌هیل در تورنتو بوده‌اند، طرح شده است.)

مسألهٔ ۲۹۹. عدد ۱۱۱۰۰۰۱۱، که در مبنای ۲ نوشته شده است، مفروض است. مجذور این عدد را در مبنای ۲ بیابید.

مسألهٔ ۳۰۰. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k ثابت کنید

$$\sin\frac{\pi}{۲k}\sin\frac{۳\pi}{۲k}\sin\frac{۵\pi}{۲k}\cdots\sin\left(۲\left[\frac{k+۱}{۲}\right]-۱\right)\frac{\pi}{۲k}=\frac{۱}{\sqrt{۲}^{\,k-۱}}$$

مسألهٔ ۳۰۱. الف) تحقیق کنید که

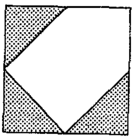
$$۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۴۱} + \frac{۱}{۱۱۰} + \frac{۱}{۱۶۴۰}$$

ب) ثابت کنید هر نمایش ۱ به‌صورت مجموعی از معکوسهای عددهای متمایزی که از تصاعد حسابی

$$\{۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, \cdots\}$$

انتخاب شده باشند، مانند نمایش قسمت (الف)، باید دست‌کم هشت جمله داشته باشد.

مسألهٔ ۳۰۲. سه‌گوشه از چهارگوشهٔ مربعی را به‌شکل مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، مانند شکل ۳۵، بریده‌ایم. دو خط راست در پنج‌ضلعی باقی‌مانده رسم کنید به‌طوری‌که پنج‌ضلعی را به سه بخش تقسیم کنند و با کنارهم قرار دادن این سه بخش بتوان یک مربع ساخت.



شکل ۳۵

مسألهٔ ۳۰۳. آمارگیری با تعداد مشخصی از افراد، N نفر، برای تعیین اینکه از رادیو، تلویزیون، و/یا روزنامه برای کسب اخبار استفاده می‌کنند مصاحبه کرد. او یافته‌های زیر را گزارش کرد:

۵۰ نفر از تلویزیون برای کسب اخبار، به‌تنهایی یا همراه با منابع دیگر، استفاده می‌کنند.

۶۱ نفر از رادیو برای کسب اخبار استفاده نمی‌کنند.

۱۳ نفر از روزنامه برای کسب اخبار استفاده نمی‌کنند.

۷۴ نفر دست‌کم دو منبع اخبار دارند.

ماکسیمم و مینیمم مقادیر N را که با این اطلاعات سازگار باشد به‌دست آورید. مثالهایی بیاورید که در آنها مقدار ماکسیمم یا مقدار مینیمم روی دهد.

مسألهٔ ۳۰۴. فرض کنید V رأس سهمی و F کانون آن باشد. فرض کنید P نقطه‌ای روی سهمی، متمایز از V، و Q نقطه‌ای درون سهمی باشد به‌طوری‌که

۱. PQ عمود بر سهمی باشد، و

۲. $\overline{PQ} = \overline{VF}$.

ثابت کنید پاره‌خط PQ محور سهمی را قطع نمی‌کند.

مسألهٔ ۳۰۵. x، y و z عددهایی حقیقی‌اند و

$$x + y + z = ۵,\quad xy + yz + zx = ۳$$

بیشترین مقدار ممکن هریک از این سه عدد را تعیین کنید.

مسألهٔ ۳۰۶. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $۷^{۲n} - ۲۳۵۲n - ۱$ بر ۲۳۰۴ بخش‌پذیر است.

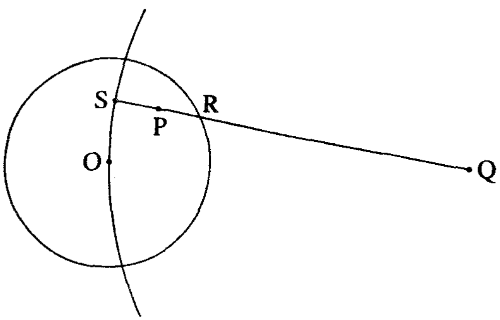
مسألهٔ ۳۰۷. حجم چهاروجهی $ABCD$ را تعیین کنید در صورتی‌که

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = ۵,\ \ \overline{BC} = ۳,\ \ \overline{CD} = ۴,\ \ \overline{DB} = ۵$$

مسألهٔ ۳۰۸. عبارت زیر را به‌صورت حاصل‌ضرب چندجمله‌ایهای حقیقی غیرثابت بنویسید:

$$۲(x^۴ + y^۴ + z^۴ + w^۴) - (x^۲ + y^۲ + z^۲ + w^۲)^۲ + ۸xyzw$$

مسألهٔ ۳۰۹. Q نقطه‌ای خارج از دایره‌ای به مرکز O است. دایرهٔ دیگری به مرکز Q و شعاع OQ رسم می‌کنیم. نیمخطی به مبدأ Q رسم می‌کنیم تا دو دایره را در R و S قطع کند (شکل ۳۶ را ببینید). ثابت کنید مکان‌هندسی P، نقطهٔ وسط پاره‌خط RS، خطی راست نیست.



شکل ۳۶

مسألهٔ ۳۱۰. ملاحظه کنید که

$$۱ = ۱^۲$$
$$۲ + ۳ + ۴ = ۳^۲$$
$$۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ = ۵^۲$$
$$۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ = ۷^۲$$

قانونی کلی که از این مثالها به ذهن می‌رسد و بیان و آن‌را ثابت کنید.

مسألهٔ ۳۱۱. فرض کنید

$$f(x) = a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + \cdots + a_n x^n$$

چندجمله‌ایی باشد که ضرایبش در شرطهای $۰ \leqslant a_i \leqslant a_۰$ $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ صدق می‌کنند. فرض‌کنید

$$(f(x))^۲ = b_۰ + b_۱ x + \cdots + b_{n+۱} x^{n+۱} + \cdots + b_{۲n} x^{۲n}$$

ثابت کنید

$$b_{n+۱} \leqslant \frac{۱}{۲}(f(۱))^۲$$

مسألهٔ ۳۱۲. الف) ثابت کنید

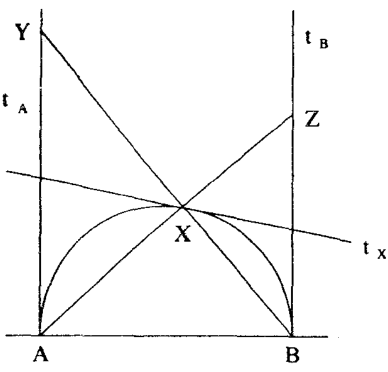
$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۲k-۱)(۲k+۱)} = \frac{۱}{۱\times ۳} + \frac{۱}{۳\times ۵} + \frac{۱}{۵\times ۷} + \cdots = \frac{۱}{۲}$$

ب) ثابت کنید

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k(k+۱)(k+۲)} = \frac{۱}{۱\times ۲\times ۳} + \frac{۱}{۲\times ۳\times ۴} + \frac{۱}{۳\times ۴\times ۵} + \cdots = \frac{۱}{۴}$$

مسألهٔ ۳۱۳. مجموعه‌ای از $n+۱$ عدد طبیعی که هیچ‌یک از آنها بزرگتر از $۲n$ نیست مفروض است. ثابت کنید که دست‌کم یکی از عضوهای این مجموعه بر عضوی دیگر بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۳۱۴. دایره‌ای به قطر AB و نقطهٔ X، متمایز از A و B، روی آن مفروض‌اند. فرض کنید t_A، t_B و t_X خطوط مماس بر دایره به‌ترتیب در نقطه‌های A، B و X باشند. فرض کنید که امتداد AX مماس t_B را در Z، و امتداد BX مماس t_A را در Y قطع کند. ثابت کنید سه خط YZ، t_X و AB یا از یک نقطه می‌گذرند یا باهم موازی‌اند. (شکل ۳۷ را ببینید.)



شکل۳۷

مسألهٔ ۳۱۵. ثابت کنید که هیچ مجموعه‌ای از شش عدد صحیح متوالی را نمی‌توان به دو زیرمجموعه به‌گونه‌ای افراز کرد که کوچکترین مضرب مشترک عددهای یکی از آنها برابر با کوچکترین مضرب مشترک عددهای زیرمجموعهٔ دیگر باشد.

مسألهٔ ۳۱۶. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n فرض کنید $f(n)$، nاُمین عدد طبیعی است که مربع کامل نیست؛ مثلاً

$$f(۱)=۲,\ \ f(۲)=۳,\ \ f(۳)=۵,\ \ f(۴)=۶$$
$$f(۵)=۷,\ \ f(۶)=۸,\ \ f(۷)=۱۰$$

ثابت کنید

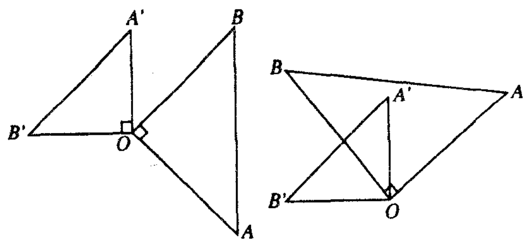
$$f(n) = n + \{\sqrt{n}\}$$

که در آن $\{x\}$ به‌معنی نزدیکترین عدد صحیح به x است (مثلاً ۱ $= \{\sqrt{۱}\}$، ۱ $= \{\sqrt{۲}\}$، ۲ $= \{\sqrt{۳}\}$ و ۲ $= \{\sqrt{۴}\}$).

مسألهٔ ۳۱۷. شما را به‌این بازی دونفره دعوت می‌کنم: درون کیسه‌ای ۵۲ مهره که ۲۶ تا از آنها سیاه و ۲۶ تای دیگر قرمز است می‌ریزیم. هر نفر به نوبت دو مهره بیرون می‌آورد. اگر هر دو مهرهٔ بیرون آمده سیاه باشند شما آنها را برمی‌دارید؛ اگر هر دو مهره قرمز باشند من آنها را برمی‌دارم؛ اگر یکی از دو مهره قرمز و دیگری سیاه باشد، هیچ‌یک از ما این دو مهره را برنمی‌دارد. وقتی‌که همهٔ مهره‌ها از کیسه بیرون آمده باشند بازی تمام است.

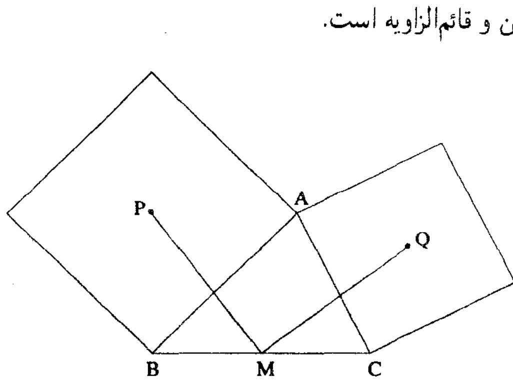
من یک امتیاز می‌گیرم و اجازه می‌دهم شما بازی را شروع کنید. در انتهای بازی، اگر تعداد مهره‌های شما بیشتر از تعداد مهره‌های من نباشد، امتیازی نمی‌گیرید. اما اگر تعداد مهره‌های شما بیشتر از تعداد مهره‌های من باشد، در ازای هر مهرهٔ اضافی ۳ امتیاز می‌گیرید. برنده کسی است که امتیاز بیشتری کسب کند. با من بازی می‌کنید؟

مسألهٔ ۳۱۸. فرض کنید ABO و $A'B'O$ دو مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه باشند که رأس قائمهٔ آنها مشترک است. (شکل ۳۸ را ببینید) ثابت کنید $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ و $AA' \perp BB'$.



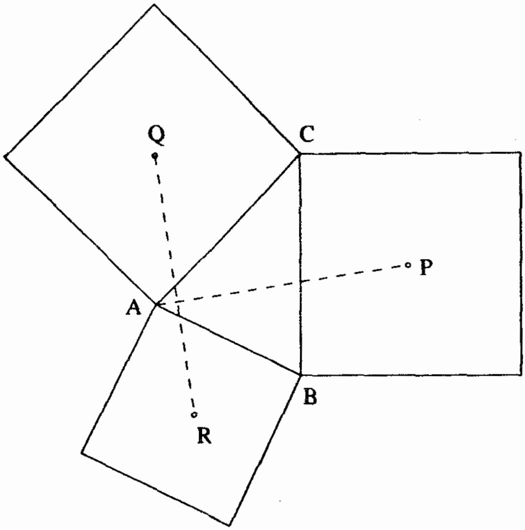
شکل۳۸

مسألهٔ ۳۱۹. مثلث دلخواه ABC مفروض است. فرض کنید P و Q به‌ترتیب مرکز مربعهایی باشند که روی AB و AC رسم شده‌اند (شکل ۳۹ را ببینید). ثابت کنید که اگر M نقطهٔ وسط BC باشد، مثلث MPQ متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.



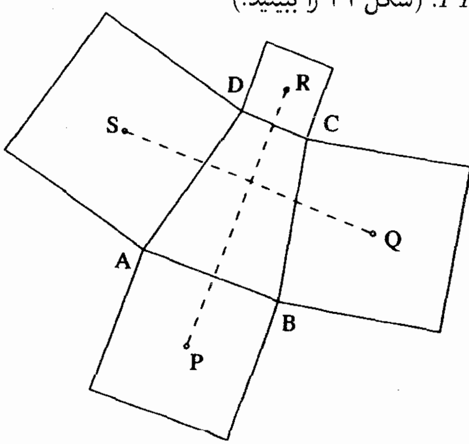
شکل۳۹

مسألهٔ ۳۲۰. الف) فرض کنید P، Q و R به‌ترتیب مرکز مربعهایی باشند که روی ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC رسم شده‌اند (شکل ۴۰ را ببینید). ثابت کنید $\overline{AP} = \overline{QR}$ و $AP \perp QR$.



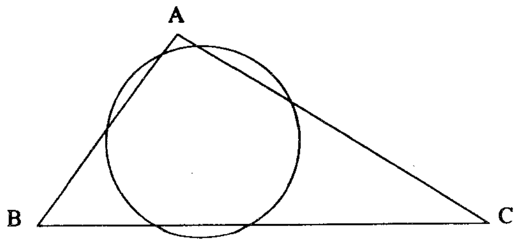
شکل ۴۰

ب) چهارضلعی محدب $ABCD$ مفروض است. فرض کنید P، Q، R و S به‌ترتیب مرکز مربعهایی باشند که روی ضلعهای AB، BC، CD و DA بیرون از چهارضلعی رسم شده‌اند. ثابت کنید $\overline{PR} = \overline{QS}$ و $PR \perp QS$. (شکل ۴۱ را ببینید.)



شکل ۴۱

مسألهٔ ۳۲۱. ABC مثلثی است که زاویه‌هایش در نابرابریهای $\angle C \leqslant \angle B \leqslant \angle A$ صدق می‌کنند. دایره‌هایی رسم می‌کنیم، به‌طوری‌که هر دایره هر ضلع مثلث را در دو نقطهٔ متمایز که هیچ‌کدام رأس مثلث نیست قطع کند. (شکل ۴۲ را ببینید.)



شکل۴۲

الف) ثابت کنید کران پایین شعاعهای چنین دایره‌هایی شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC است.
ب) ثابت کنید کران بالای شعاعهای این دایره‌ها لزوماً شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC نیست. اگر شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، R باشد، کران بالای موردنظر را برحسب R، A و B بیابید.

مسألهٔ ۳۲۲. الف) فرض کنید $f(n)$ تعداد جوابهایی مانند (x,y) برای معادلهٔ $x + ۲y = n$ باشد که در آن x و y هر دو عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. ثابت کنید

$$f(۰) = f(۱) = ۱$$
$$f(n) = f(n - ۲) + ۱, \;\; n = ۲, ۳, ۴, \cdots$$

دستور ساده‌ای برای محاسبهٔ $f(n)$ بیابید.
ب) فرض کنید $g(n)$ تعداد جوابهایی مانند (x, y, z) برای معادلهٔ $x + ۲y + ۳z = n$ باشد که در آن x، y و z هر سه عددهایی صحیح و نامنفی‌اند. ثابت کنید

$$g(۰) = g(۱) = ۱, \;\; g(۲) = ۲$$
$$g(n) = g(n - ۳) + \left[\frac{n}{۲}\right] + ۱, \;\; n = ۳, ۴, ۵, \cdots$$

که در آن،

$$\left[\frac{n}{۲}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{۲} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \\ \dfrac{n - ۱}{۲} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \end{cases}$$

مسألهٔ ۳۲۳. جوابهای حقیقی معادله زیر را به‌دست آورید:

$$۳x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲x(y + z)$$

مسألهٔ ۳۲۴. یک مداد، یک پاک‌کن و یک دفتر روی‌هم ۱۰۰ تومان قیمت دارند. قیمت دفتر بیشتر از قیمت دو مداد است؛ قیمت سه مداد بیشتر از قیمت چهار پاک‌کن است؛ قیمت سه پاک‌کن بیشتر از قیمت دفتر است. قیمت هر یک از این سه کالا چقدر است؟ (فرض کنید که قیمت هر کالا برحسب تومان عددی صحیح باشد.)

مسألهٔ ۳۲۵. فرض کنید A آرایه‌ای مربعی از اعداد و s عددی است که از مجموع اعداد هر ستون و نیز مجموع اعداد هر سطر آرایهٔ A کمتر نیست. ثابت کنید که می‌توان هر درایهٔ آرایهٔ A را با عددی که کوچکتر از آن نباشد عوض کرد به‌طوری‌که در آرایهٔ جدید، B، مجموع اعداد هر سطر و مجموع اعداد هر ستون برابر با s باشد.

مثلاً (در اینجا عددهای صحیح را انتخاب کرده‌ایم تا مثال ساده باشد)،

$$A = \begin{pmatrix} ۳ & -۵ & ۲ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} ۱۴ & -۵ & ۲ \\ -۴ & ۱۴ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۸ \end{pmatrix}$$

$$s = ۱۱$$

مجموع سطرها: ۱۱، ۱۱، ۱۱   مجموع سطرها: ۰، ۱−، ۹

مجموع ستونها: ۱۱، ۱۱، ۱۱   مجموع ستونها: ۲−، ۱−، ۱۱

مسألهٔ ۳۲۶. ملاحظه کنید که

$$۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۱۴^۲ = ۱۵^۲$$

$$۴^۲ + ۵^۲ + ۶^۲ + ۳۸^۲ = ۳۹^۲$$

$$۶^۲ + ۷^۲ + ۸^۲ + ۷۴^۲ = ۷۵^۲$$

$$۸^۲ + ۹^۲ + ۱۰^۲ + ۱۲۲^۲ = ۱۲۳^۲$$

نتیجه‌ای کلی که از این مثالها به ذهن می‌رسد بیان و آن‌را ثابت کنید.

مسألهٔ ۳۲۷. سه دایرهٔ هم‌مرکز مفروض‌اند به‌طوری‌که شعاع بزرگترین دایره از مجموع شعاعهای دو دایرهٔ کوچکتر کمتر است. مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنید که هر رأسش روی یکی از این سه دایره باشد.

مسألهٔ ۳۲۸. عدد !۱۰۰۰۰ به چند صفر ختم می‌شود؟

مسألهٔ ۳۲۹. مردی روی پل راه‌آهنی که دو نقطهٔ A و B را به‌هم وصل می‌کند، در نقطه‌ای که فاصله‌اش از A برابر با $\frac{۳}{۸}$ فاصلهٔ میان A و B است ایستاده است. او صدای قطاری را می‌شنود که به‌سمت A می‌رود؛ قطار با سرعت ۸۰ کیلومتر بر ساعت حرکت می‌کند. این مرد اگر به‌طرف A بدود در A به قطار می‌رسد، و اگر به‌طرف B بدود در B قطار به او می‌رسد. سرعت دویدن او چقدر است؟

مسألهٔ ۳۳۰. فرض کنید دنبالهٔ $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$، $\cdots$ این‌طور تعریف شده باشد

$$u_۱ = ۱,\ \ u_{n+۱} = u_n + ۸n \quad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots)$$

ثابت کنید $u_n = (۲n - ۱)^۲$.

مسألهٔ ۳۳۱. ثابت کنید که هر یک از چندجمله‌ایهای زیر به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی متغیرها نامنفی است، ولی هیچ‌یک از این چندجمله‌ایها را نمی‌توان به‌شکل مجموع مربعهای چندجمله‌ایهایی حقیقی نوشت:

الف) $x^۲y^۲ + y^۲z^۲ + z^۲x^۲ + w^۴ - ۴xyzw$

ب) $x^۴y^۲ + y^۴z^۲ + z^۴x^۲ - ۳x^۲y^۲z^۲$

مسألهٔ ۳۳۲. الف) به‌ازای کدام عددهای حقیقی مانند p و q ریشه‌های چندجمله‌ای

$$x^۳ - px^۲ + ۱۱x - q$$

سه عدد صحیح متوالی‌اند؟ در این حالتها ریشه‌ها را بیابید.

ب) به‌ازای کدام عددهای حقیقی مانند p و q چندجمله‌ای $x^۳ - px^۲ + ۱۱x - q$ دقیقاً یک ریشه دارد؟ این ریشه را بیابید.

مسألهٔ ۳۳۳. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید $۲^{۲n} + ۲۴n - ۱۰$ بر ۱۸ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۳۳۴. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_n عددهای صحیح متمایزی باشند که از مجموعهٔ

$$\{۱, ۲, \cdots, ۲n - ۲, ۲n - ۱\}$$

انتخاب شده‌اند. ثابت کنید به‌ازای زیروندهایی مانند i و j (که لزوماً متمایز نیستند)،

$$a_i + a_j = ۲n$$

مسألهٔ ۳۳۵. $n + ۲$ عدد صحیح مفروض‌اند. ثابت کنید در میان این عددها دو عدد وجود دارد که مجموع یا تفاضلشان بر $۲n$ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۳۳۶. فرض کنید ABC مثلث و D نقطه‌ای، متمایز از A، B و C، روی دایرهٔ محیطی آن باشد. ثابت کنید پای عمودهایی که از D بر سه ضلع مثلث (یا در صورت لزوم بر امتداد آنها) رسم می‌شوند همخط‌اند.

مسألهٔ ۳۳۷. فرض کنید u و v دو عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که u، v و uv ریشه‌های چندجمله‌ایی درجهٔ سوم با ضرایب گویا باشند. ثابت کنید که دست‌کم یکی از این ریشه‌ها عددی گویاست.

مسألهٔ ۳۳۸. فرض کنید n عددی صحیح باشد. ثابت کنید بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $n^۲ + ۱$ و $(n + ۱)^۲ + ۱$ یا ۱ است یا ۵.

مسألهٔ ۳۳۹. مقدار عبارتهای زیر را بدون استفاده از جدول تعیین کنید:

الف) $\cos ۳۶^\circ - \cos ۷۲^\circ$

ب) $\cos ۳۶^\circ \cdot \cos ۷۲^\circ$

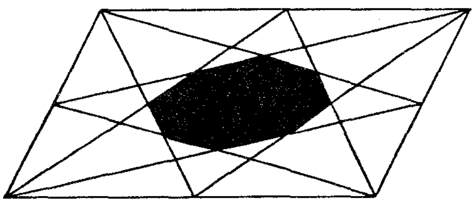
مسألهٔ ۳۴۰. بدون استفاده از ماشین‌حساب ثابت کنید

$$۷^{\frac{۱}{۲}}+۷^{\frac{۱}{۳}}+۷^{\frac{۱}{۴}}<۷,\ \ ۴^{\frac{۱}{۲}}+۴^{\frac{۱}{۳}}+۴^{\frac{۱}{۴}}>۴$$

مسألهٔ ۳۴۱. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند. بازیکن اول عددی صحیح بین ۱ و ۱۱ (و یا خود این دو عدد را) انتخاب می‌کند. بازیکن دوم عددی طبیعی بین ۱ و ۱۱ (و یا خود این دو عدد) را با عدد انتخابی بازیکن اول جمع می‌کند. دو بازیکن همین کار را یکی در میان انجام می‌دهند. بازیکنی که زودتر به ۵۶ برسد بازی را می‌برد. امکان برد کدام بازیکن بیشتر است؟

مسألهٔ ۳۴۲. دایره‌ای به شعاع r در قطاعی از دایره‌ای به شعاع R محاط شده است. طول بزرگترین وتر قطاع $۲a$ است. رابطه‌ای بین r، R و a بیابید که در آن هرکدام یک‌بار آمده باشد.

مسألهٔ ۳۴۳. هر رأس متوازی‌الاضلاعی را با خطهای راست به نقاط وسط دو ضلع روبه‌رویش وصل می‌کنیم. (شکل ۴۳ را ببینید.) مساحت شکل محدود به‌این خطها چه بخشی از مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



شکل۴۳

مسألهٔ ۳۴۴. فرض کنید u عددی دلخواه ولی ثابت بین ۰ و ۱ باشد، یعنی $۱ > u > ۰$. دنبالهٔ $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$، $\cdots$ را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$u_۱=۱+u,\ u_۲=\frac{۱}{u_۱}+u,\ u_۳=\frac{۱}{u_۲}+u,\cdots$$

یعنی $u_n=\frac{۱}{u_{n-۱}}+u$، $n=۲,۳,۴,\cdots$. آیا عددی مانند n وجود دارد که $u_n\leqslant ۱$؟

مسألهٔ ۳۴۵. الف) ثابت کنید که هر دو عدد طبیعی متوالی نسبت به‌هم اول‌اند. (توجه: دو عدد طبیعی را نسبت به‌هم اول می‌گوییم به‌شرطی‌که تنها مقسوم‌علیه مشترکشان ۱ باشد. به‌طورکلی، (a,b) معرف بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است؛ بنابراین، اگر a و b نسبت به‌هم اول باشند، می‌نویسیم $(a,b)=۱$.)

ب) عددی طبیعی (بجز ۱) بیابید که نسبت به ۲، ۳، ۴، $\cdots$ و n اول باشد.

ج) فرض کنید r عددی طبیعی باشد. عددی طبیعی مانند t، $t\geqslant r$، بیابید به‌طوری‌که

$$(r+i,t+r+i)=۱,\ \ i=۱,۲,\cdots,r$$

مسألهٔ ۳۴۶. فرض کنید ماشین‌حساب شما عیبی پیدا کرده است و عمل ضرب را انجام نمی‌دهد، ولی عمل جمع (و تفریق) را انجام می‌دهد و وارون عدد x، $\frac{1}{x}$، را حساب می‌کند. آیا می‌توانید با استفاده از این ماشین‌حساب معیوب عددها را درهم ضرب کنید؟

مسألهٔ ۳۴۷. آیا ممکن است زیرمجموعه‌ای ناتهی و سره از صفحه دست‌کم سه محور تقارن ناهمرس داشته باشد؟ (محور تقارن خطی است که منعکس زیرمجموعه نسبت به‌آن بر خودش منطبق شود.)

مسألهٔ ۳۴۸. ملاحظه کنید که

$$3 + 5 = 8 = 2^3$$

$$5 + 7 = 12 = 2^2 \times 3$$

$$7 + 11 = 18 = 2 \times 3^2$$

$$11 + 13 = 24 = 2^3 \times 3$$

ثابت کنید که اگر p و q دو عدد اول فرد متوالی باشند، $p + q$ برابر با حاصل‌ضرب دست‌کم سه عدد اول (که لزومی ندارد متمایز باشند) است.

مسألهٔ ۳۴۹. الف) ثابت کنید $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ عددی گویا نیست.

ب) عددهای طبیعی m و n مفروض‌اند. تحت چه شرایطی $\sqrt{n} + \sqrt{m}$ عددی گویاست؟

مسألهٔ ۳۵۰. فرض کنید P_1، P_2، $\cdots$ و P_m، m نقطه روی یک خط و Q_1، Q_2، $\cdots$ و Q_n، n نقطه روی خطی متمایز از خط اول و موازی با آن باشند. همهٔ پاره‌خطها مانند P_iQ_j را رسم می‌کنیم. بیشترین تعداد نقاط تقاطع این پاره‌خطها چقدر است؟

مسألهٔ ۳۵۱. عبارت $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ را تجزیه کنید.

مسألهٔ ۳۵۲. بدون استفاده از ضرب «طولانی»، کامپیوتر، یا ماشین‌حساب، تحقیق کنید که

الف) $13! = 112296^2 - 79896^2$.

ب) $240^4 + 340^4 + 430^4 + 599^4 = 651^4$.

مسألهٔ ۳۵۳. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، عبارت «جمع و جور»ی برای مجموع زیر بیابید:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$$

مسألهٔ ۳۵۴. فرض کنید k، m و n عددهایی طبیعی باشند به‌طوری‌که به‌ازای عددی مانند x، $x \neq 1$، عددهای $\log_k x$، $\log_m x$ و $\log_n x$ جمله‌های متوالی تصاعدی حسابی باشند. ثابت کنید

$$n^2 = (kn)^{\log_k m}$$

مسألهٔ ۳۵۵. دستگاه ۱۰۰ معادله ۱۰۰ مجهولی زیر را حل کنید

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰$$
$$x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۰$$
$$\vdots$$
$$x_{۹۸} + x_{۹۹} + x_{۱۰۰} = ۰$$
$$x_{۹۹} + x_{۱۰۰} + x_۱ = ۰$$
$$x_{۱۰۰} + x_۱ + x_۲ = ۰$$

مسألهٔ ۳۵۶. ثابت کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y، و هر عدد طبیعی مانند n،

الف) $۰ \leqslant [nx] - n[x] \leqslant n - ۱$.

ب) $[x] + [y] + (n - ۱)[x + y] \leqslant [nx] + [ny]$.

مسألهٔ ۳۵۷. پاره‌خط راستی را با استفاده از گونیا نصف کنید. (با گونیا می‌توان خط راستی رسم کرد که از دو نقطهٔ مفروض می‌گذرد و نیز می‌توان از هر نقطهٔ مفروض روی خط، عمودی بر آن رسم کرد.)

مسألهٔ ۳۵۸. فرض کنید p محیط و m مجموع طولهای سه میانهٔ مثلثی باشد. ثابت کنید

$$\frac{۳}{۴}p < m < p$$

مسألهٔ ۳۵۹. الف) کدام‌یک از دو عدد $۲۹\sqrt{۱۴} + ۴\sqrt{۱۵}$ و ۱۲۴ بزرگتر است؟

ب) کدام‌یک از دو عدد $۷۵۹\sqrt{۷} + ۲\sqrt{۲۵۴}$ و ۲۰۴۰ بزرگتر است؟

(از ماشین‌حساب استفاده نکنید.)

مسألهٔ ۳۶۰. ملاحظه کنید که

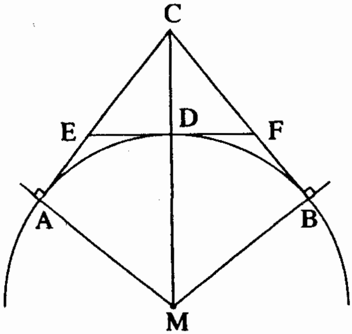
$$۱ = ۱^۲$$
$$۲ = -۱^۲ - ۲^۲ - ۳^۲ + ۴^۲$$
$$۳ = -۱^۲ + ۲^۲$$
$$۴ = -۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲$$
$$۵ = ۱^۲ + ۲^۲$$
$$۶ = ۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲$$

از این مثالها چنین به‌نظر می‌رسد که هر عدد طبیعی را می‌توان به‌شکل

$$\varepsilon_۱ ۱^۲ + \varepsilon_۲ ۲^۲ + \varepsilon_۳ ۳^۲ + \cdots + \varepsilon_m m^۲$$

نوشت به‌طوری‌که m عددی طبیعی باشد و $\varepsilon_i = \pm ۱$، $i = ۱, ۲, \cdots, m$. این حدس را ثابت کنید.

مسألهٔ ۳۶۱. فرض کنید M مرکز دایره‌ای باشد و A و B دو نقطه روی این دایره باشند که دو سر قطری از آن نیستند. مماسهایی که در A و B بر دایره رسم می‌شوند یکدیگر را در C قطع می‌کنند. فرض کنید CM دایره را در D قطع کند و مماس بر دایره در نقطهٔ D، AC و BC را به‌ترتیب در E و F قطع کند. (شکل ۴۴ را ببینید.)



شکل ۴۴

الف) ثابت کنید مساحت چهارضلعی $ADBM$ میانگین هندسی مساحت مثلث ABM و مساحت چهارضلعی $ACBM$ است.

ب) ثابت کنید مساحت پنج‌ضلعی $AEDFBM$ میانگین همساز (توافقی) مساحت چهارضلعی $ADBM$ و مساحت چهارضلعی $ACBM$ است.

مسألهٔ ۳۶۲. دو عدد مثبت که اولین رقمشان یکسان نیست درهم ضرب شده‌اند. آیا ممکن است اولین رقم این حاصل‌ضرب اکیداً بین رقمهای اول این دو عدد باشد؟

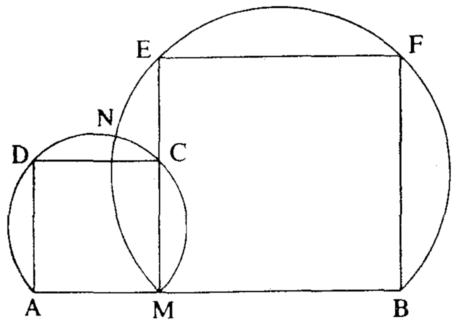
مسألهٔ ۳۶۳. مردی ساعت خود راکه خوابیده است کوک می‌کند، ولی چون نمی‌داند ساعت چند است نمی‌تواند ساعت خود را تنظیم کند. او ساعتش را در خانه می‌گذارد و به خانهٔ دوستش که ساعتش زمان صحیح را نشان می‌دهد می‌رود. مدتی در آنجا می‌ماند و سپس به خانه بازمی‌گردد (بازگشت به خانه همان‌قدر طول می‌کشد که رفتن به خانهٔ دوستش طول کشیده بود). به محض رسیدن به خانه، با وجود اینکه نمی‌داند چه مدت در راه بوده است، ساعتش را تنظیم می‌کند و ساعت زمان صحیح را نشان می‌دهد! دلیل را توضیح دهید.

مسألهٔ ۳۶۴. قماربازی با دوستش این بازی را انجام می‌دهد: او نصف پول خود را بر روی پرتاب سکه شرط می‌بندد؛ اگر شیر بیاید می‌برد و اگر خط بیاید می‌بازد. سکه پرتاب و پول رد و بدل می‌شود. بازی تکرار می‌شود و هربار شرط‌بندی بر روی نصف پول قمارباز است. در انتها تعداد دفعاتی که قمارباز باخته است برابر تعداد دفعاتی است که برده است. در کلّ، پول او کم شده است، زیاد شده است، یا تغییر نکرده است؟

مسألهٔ ۳۶۵. مأمور آمارگیری مردی را جلو در خانه‌اش دید و از او پرسید «سن افرادی که در این خانه زندگی می‌کنند چقدر است؟». مرد پاسخ داد «سن هریک از افراد خانوادهٔ من مربع عددی صحیح است. سن من مجموع سن همسر، پسر و دخترم است. سن پدرم مجموع سن من و همسرم و دخترم است. پدرم اگرچه دوران اول زندگی را پشت سر نهاده است، سن او عددی اول است.» مأمور آمارگیری سن ساکنان این خانه را چگونه ثبت می‌کند و چه نکتهٔ روشنی را در مورد سن همسر مرد درمی‌یابد؟

مسألهٔ ۳۶۶. الف) پنج‌ضلعیی بیابید که پنج نقطهٔ مفروض نقاط وسط ضلعهای آن باشند.
ب) اگر نقاط وسط ضلعهای nضلعیی معلوم باشند، آیا همواره می‌توان این nضلعی را مشخص کرد؟

مسألهٔ ۳۶۷. فرض کنید M نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد، مربعهای $AMCD$ و $MBFE$ را مانند شکل ۴۵ رسم و فرض می‌کنیم N دومین نقطهٔ تلاقی دایره‌های محیطی این مربعها باشد. ثابت کنید خطهای BC و AE هر دو از N می‌گذرند.



شکل۴۵

مسألهٔ ۳۶۸. الف) به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید عددهای صحیح $۲۱n + ۴$ و $۱۴n + ۳$ نسبت به‌هم اول‌اند.
ب) به‌ازای کدام عددهای صحیح مانند a و b، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $۷an + ۴$ و $۷bn + ۳$ نسبت به‌هم اول‌اند؟

مسألهٔ ۳۶۹. ثابت کنید در میان افرادی که در سالن سینمایی برای دیدن فیلم جمع شده‌اند، دست‌کم دو نفر وجود دارند که تعداد آشنایانشان بین حاضرین در سینما یکی است.

مسألهٔ ۳۷۰. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. فرض کنید

$a_۱$ تعداد جوابهایی مانند (x,y)، از عددهای صحیح نامنفی، برای معادلهٔ $x + ۲y = n$ باشد،
$a_۲$ تعداد جوابهایی مانند (x,y)، از عددهای صحیح نامنفی، برای معادلهٔ $۲x + ۳y = n - ۱$ باشد،
$a_۳$ تعداد جوابهایی مانند (x,y)، از عددهای صحیح نامنفی، برای معادلهٔ $۳x + ۴y = n - ۲$ باشد،
⋮
a_n تعداد جوابهایی مانند (x,y)، از عددهای صحیح نامنفی، برای معادلهٔ $nx + (n+۱)y = ۱$ باشد.

ثابت کنید $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = n$. مثلاً در حالتی که $n = ۷$،
$x + ۲y = ۷$، ۴ جواب دارد: (۱,۳)، (۳,۲)، (۵,۱)، (۷,۰)،
$۲x + ۳y = ۶$، ۲ جواب دارد: (۰,۳)، (۲,۰)،
$۳x + ۴y = ۵$ جواب ندارد،
$۴x + ۵y = ۴$، ۱ جواب دارد: (۱,۰)،

$۵x + ۶y = ۳$ جواب ندارد،
$۶x + ۷y = ۲$ جواب ندارد،
$۷x + ۸y = ۱$ جواب ندارد، و

$$۴ + ۲ + ۰ + ۱ + ۰ + ۰ + ۰ = ۷$$

مسألهٔ ۳۷۱. فرض کنید $a(n)$ تعداد راههایی باشد که عدد طبیعی n را می‌توان به‌شکل مجموع مرتبی از عددهای ۱ و ۲ نوشت. مثلاً $a(۵) = ۸$، زیرا

$$۵ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۲ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱ + ۲ + ۱ + ۱ = ۱ + ۱ + ۲ + ۱$$
$$= ۱ + ۱ + ۱ + ۲ = ۲ + ۲ + ۱ = ۲ + ۱ + ۲ = ۱ + ۲ + ۲$$

فرض کنید $b(n)$ تعداد راههایی باشد که می‌توان n را به‌شکل مجموع مرتبی از عددهای صحیح بزرگتر از ۱ نوشت. مثلاً $b(۷) = ۸$، زیرا

$$۷ = ۳ + ۲ + ۲ = ۲ + ۳ + ۲ = ۲ + ۲ + ۳ = ۳ + ۴ = ۴ + ۳ = ۲ + ۵ = ۵ + ۲ = ۷$$

ثابت کنید

$$a(n) = b(n + ۲), \quad n = ۱, ۲, \cdots$$

مسألهٔ ۳۷۲. پنج نفر به نامهای A، B، C، D و E هریک تعدادی مهره در اختیار دارند و باهم به‌نوعی بازی می‌کنند. در انتهای هر بازی یک نفر می‌بازد و باید به هریک از چهار نفر دیگر به‌اندازهٔ تعداد مهره‌هایشان مهره بدهد. مثلاً اگر در ابتدای بازی تعداد مهره‌های A، B، C، D و E به‌ترتیب α، β، γ، δ و ϵ باشد و B ببازد، B باید α مهره به A، γ مهره به C، δ مهره به D و ϵ مهره به E بدهد، و به‌این‌ترتیب تعداد مهره‌های بازیکنان در انتهای بازی به‌ترتیب ۲α، $\beta - \alpha - \gamma - \delta - \epsilon$، ۲γ، ۲δ و ۲ϵ خواهد بود. این افراد پنج بار بازی می‌کنند: در بازی اول A، در بازی دوم B، در بازی سوم C، در بازی چهارم D و در بازی پنجم E می‌بازد. در انتها، بعد از اینکه E به چهار بازیکن دیگر به تعداد لازم مهره می‌دهد، تعداد مهره‌های هر پنج نفر یکسان می‌شود. کمترین تعداد ممکن مهره‌های هریک از این پنج نفر در ابتدا چقدر است؟

مسألهٔ ۳۷۳. آرایه‌ای مربعی از اعداد متشکل از m سطر و m ستون درنظر بگیرید. فرض کنید a_{ij} عددی باشد که در سطر iاُم و ستون jاُم این آرایه قرار دارد. به‌ازای هر i، فرض کنید r_i مجموع عددهای سطر iاُم و c_i مجموع عددهای ستون iاُم باشد. ثابت کنید زیروندهای متمایزی مانند i و j وجود دارند به‌طوری‌که

$$(r_i - c_i)(r_j - c_j) \leqslant ۰$$

مسألهٔ ۳۷۴. تابع f این ویژگی را دارد که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند a و b،

$$|f(a) - f(b)| \leqslant |a - b|^۲$$

ثابت کنید f تابعی ثابت است.

مسألهٔ ۳۷۵. نوعی اتومبیل مسابقه در آزمایشی به مسافت یک کیلومتر از ۰ تا ۲۴۰ کیلومتر بر ساعت شتاب می‌گیرد. اگر در طول آزمایش افزایش شتاب مجاز نباشد (ولی کاهش شتاب مجاز باشد)، این آزمایش حداکثر چقدر ممکن است طول بکشد؟

مسألهٔ ۳۷۶. دنبالهٔ زیر را درنظر بگیرید

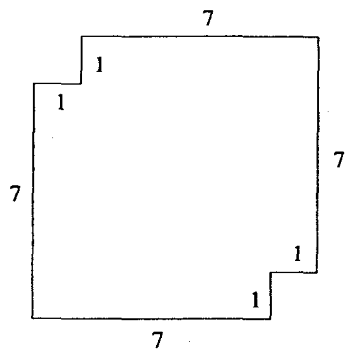
$$w_۱ = \sqrt{۲}, \quad w_{n+۱} = \sqrt{۲ - w_n} \qquad (n = ۱, ۲, \cdots)$$

ثابت کنید این دنباله همگراست.

مسألهٔ ۳۷۷. فرض کنید r یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x(۱-x) = ۱$ باشد؛ ریشهٔ دیگر $۱ - r$ است. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$r^n + (۱-r)^n = \begin{cases} ۲(-۱)^n & ۳|n \\ (-۱)^{n-۱} & ۳\nmid n \end{cases}$$

مسألهٔ ۳۷۸. مردی می‌خواهد زمین نشان داده شده در شکل ۴۶ را با ۳۱ موزاییک مستطیل شکل ۲ فوت در ۱ فوت فرش کند. او تصمیم می‌گیرد که هیچ موزاییکی را نشکند. به‌این‌ترتیب، با پشتکار زیاد ساعتها به چیدن و برچیدن موزاییکها می‌پردازد، ولی موفق نمی‌شود. آیا می‌توانید به او کمک کنید؟



شکل ۴۶

مسألهٔ ۳۷۹. دنبالهٔ فیبوناچی $(f_۱, f_۲, f_۳, \cdots)$ این‌طور تعریف می‌شود

$$f_۱ = f_۲ = ۱, \quad f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲} \qquad (n \geqslant ۳)$$

به‌این‌ترتیب چند جملهٔ اول این دنباله عبارت‌اند از

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, \cdots$$

فرض کنید

$$Q = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

ثابت کنید

$$Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots$$

و

$$f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

مسألهٔ ۳۸۰. ثابت کنید تابع

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

نگاشتی یک‌به‌یک از مجموعهٔ

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 0 \text{ و } x,y \geqslant 0 \text{ ،عددهایی صحیح‌اند } y,x\}$$

(نقاط مشبکه‌ای بجز $(0,0)$ در ربع اول) بر روی مجموعهٔ

$$\{m \mid \text{عددی طبیعی است } m\}$$

است.

مسألهٔ ۳۸۱. دو چهاروجهی منتظم و برابر طوری یکدیگر را قطع می‌کنند که هر وجه هریک از آنها از نقاط وسط سه یال همرس دیگری می‌گذرد. اجتماع این دو چهاروجهی، U، «ستاره»ای سه‌بعدی است. اشتراک این دو چهاروجهی، V، را توصیف کنید. نسبت حجمهای U و V را به‌دست آورید.

مسألهٔ ۳۸۲. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید

$$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$$

مربع عددی صحیح نیست.

مسألهٔ ۳۸۳. باشگاه شطرنجی ۸ عضو دارد که به‌ترتیبی ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۱ و ۱۲ سال تجربهٔ بازی دارند. مدیر باشگاه تصمیم می‌گیرد که این اعضا را به دو تیم تقسیم کند به‌طوری‌که مجموع سالهای تجربهٔ بازیکنان دو تیم یکی باشد. بعد از تقسیم اعضا به دو تیم، مدیر باشگاه درکمال تعجب درمی‌یابد که مجموع مجذور سالهای تجربهٔ اعضای دو تیم و همچنین مجموع مکعبهای سالهای تجربهٔ اعضای دو تیم یکی است. اعضای باشگاه چگونه تقسیم شده‌اند؟

مسألهٔ ۳۸۴. تاجری می‌خواهد ۱۵۰ ماشین لباسشویی را به شهری بفرستد. او درمی‌یابد که دو نوع کامیون در دسترس است. یکی از آنها کامیونی بزرگ است که گنجایشش ۱۸ ماشین لباسشویی است؛ نوع دیگر کامیون کوچکتری است که گنجایشش فقط ۱۳ ماشین لباسشویی است. هزینهٔ حمل‌ونقل با کامیون بزرگتر ۳۵۰۰۰ تومان با کامیون کوچکتر ۲۵۰۰۰ تومان است. به‌صرفه‌ترین راه برای ارسال این ۱۵۰ ماشین لباسشویی چیست؟

مسألهٔ ۳۸۵. دو کشتی S و T در مسیرهای مستقیم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. در ساعت ۰۰ : ۱۰ فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۵ کیلومتر است؛ در ساعت ۰۰ : ۱۱ فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۴ کیلومتر است؛ در ساعت ۰۰ : ۱۳ فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۱۰ کیلومتر است. در ساعت ۰۰ : ۷، S در غرب T بوده است.

الف) دوکشتی در ساعت ۰۰ : ۷ چقدر از یکدیگر فاصله داشته‌اند؟

ب) در چه زمانی فاصلهٔ آنها از یکدیگر ۲۶ کیلومتر است؟

ج) کمترین فاصلهٔ ممکن آنها از یکدیگر چقدر است؟ در چه زمانی به‌این نزدیکترین فاصله می‌رسند؟

د) در چه زمانی S در شمال T است؟

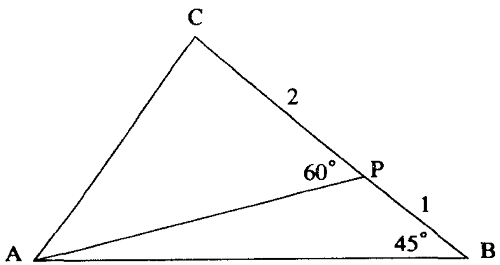
ﻫ) در چه زمانی S در جنوب غربی T است؟

و) فرض کنید S و T سرعت یکسان داشته باشند و T به‌سمت جنوب در حرکت باشد. سرعت و جهت حرکت S را تعیین کنید.

مسألهٔ ۳۸۶. الف) اگر محیط شش‌ضلعیی منتظم و مثلثی متساوی‌الاضلاع یکی باشد، نسبت مساحتهای آنها را تعیین کنید.

ب) دایره‌ای مفروض است. نسبت مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر این دایره را به مساحت شش‌ضلعی منتظم محاط در آن پیدا کنید.

مسألهٔ ۳۸۷. نقطهٔ P ضلع BC از مثلث ABC را به نسبت $\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کند، و $\angle CBA = ۴۵^\circ$ و $\angle APC = ۶۰^\circ$ (شکل ۴۷ را ببینید). $\angle ACB$ را بدون استفاده از مثلثات بیابید.



شکل۴۷

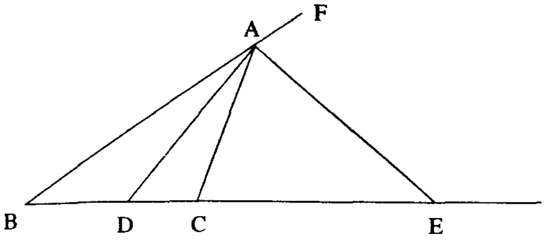
مسألهٔ ۳۸۸. فرض کنید l و m دو خط موازی باشند و P نقطه‌ای بین آنها باشد. مثلث APB را طوری تعیین کنید که A روی l و B روی m باشد، $\angle APB = ۹۰^\circ$ و مساحت مثلث APB کمترین مقدار ممکن باشد.

مسألهٔ ۳۸۹. نمودار منحنی زیر را رسم کنید

$$|۳x^۲ + y^۲ - ۱۲| = |x^۲ - y^۲ + ۴|$$

مسألهٔ ۳۹۰. فرض کنید p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد. ثابت کنید که مجموع مانده‌های درجهٔ دوم به‌پیمانهٔ p که بین ۱ و $p-1$ (خود این دو عدد را هم درنظر می‌گیریم) قرار دارند بر p بخش‌پذیر است. (پیوست ب.۱۱ را ببینید.)

مسألهٔ ۳۹۱. نیمسازهای داخلی و خارجی رأس A از مثلث ABC ضلع BC و امتداد آن‌را به‌ترتیب در D و E قطع می‌کنند. (شکل ۴۸ را ببینید.) اگر $\overline{AD} = \overline{AE}$، $\angle BCA - \angle CBA$ را بیابید.



شکل۴۸

مسألهٔ ۳۹۲. الف) ملاحظه کنید که

$$۹^۳ + ۱۵^۳ + ۱۲^۳ = ۱۸^۳$$
$$۲۸^۳ + ۵۳^۳ + ۷۵^۳ = ۸۴^۳$$
$$۶۵^۳ + ۱۲۷^۳ + ۲۴۸^۳ = ۲۶۰^۳$$

قانونی کلی برای این مثالها بیابید.

ب) ملاحظه کنید که

$$۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ = ۶^۳$$
$$۱۲^۳ + ۱۹^۳ + ۵۳^۳ = ۵۴^۳$$
$$۲۷^۳ + ۴۶^۳ + ۱۹۷^۳ = ۱۹۸^۳$$

قانونی کلی برای این مثالها بیابید.

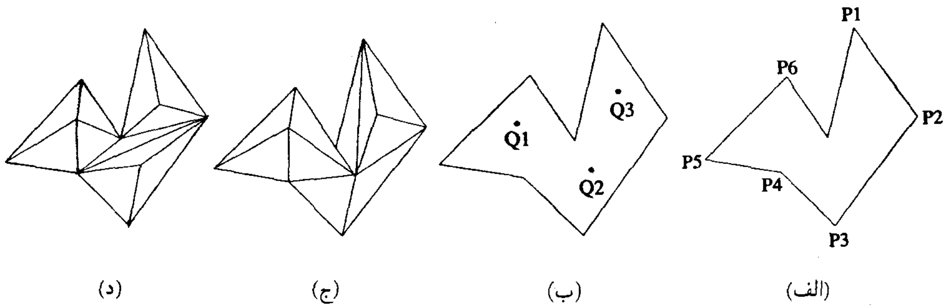
ج) ملاحظه کنید که

$$۳^۳ + ۱۰^۳ + ۱۸^۳ = ۱۹^۳$$
$$۱۲^۳ + ۳۱^۳ + ۱۰۲^۳ = ۱۰۳^۳$$
$$۲۷^۳ + ۶۴^۳ + ۳۰۶^۳ = ۳۰۷^۳$$

قانونی کلی برای این مثالها بیابید.

مسألهٔ ۳۹۳. فرض کنید P، nضلعیی باشد که خودش را قطع نمی‌کند (شکل ۴۹ـالف). m نقطهٔ دیگر مانند Q_1، Q_2، $\cdots$ و Q_m درون P مفروض‌اند (شکل ۴۹ـب). اگر جفتهایی از این $n+m$

نقطه را به‌هم وصل کنیم به‌طوری‌که چندضلعی به تعدادی مثلث تقسیم شود که هیچ P_i یا Q_jای درون هیچ‌یک از این مثلثها نباشد و هیچ Q_jای بر ضلعی از این مثلثها واقع نباشد، می‌گوییم چندضلعی را مثلث‌بندی کرده‌ایم. ممکن است چندین مثلث‌بندی وجود داشته باشد. شکلهای ۴۹ (ج) و ۴۹ (د) دو مثلث‌بندی چندضلعی شکل ۴۹ (ب) را نشان می‌دهند. ثابت کنید که تعداد مثلثها در همهٔ مثلث بندیها یکی است و این تعداد را برحسب n و m بیابید.



شکل ۴۹

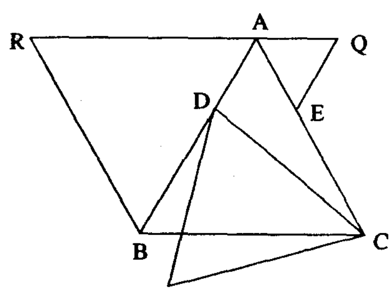
مسألهٔ ۳۹۴. ثابت کنید که اگر A، B و C زاویه‌های مثلثی باشند،

$$۳(\sin^۲ A + \sin^۲ B + \sin^۲ C) - ۲(\cos^۳ A + \cos^۳ B + \cos^۳ C) \leqslant ۶$$

مسألهٔ ۳۹۵. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطهٔ D را بر ضلع AB و نقطهٔ E را بر ضلع AC طوری انتخاب می‌کنیم که $\overline{AD} = \overline{AE}$. مثلثهای متساوی‌الاضلاع PCD، QAE و RAB را مانند شکل ۵۰ رسم می‌کنیم. ثابت کنید

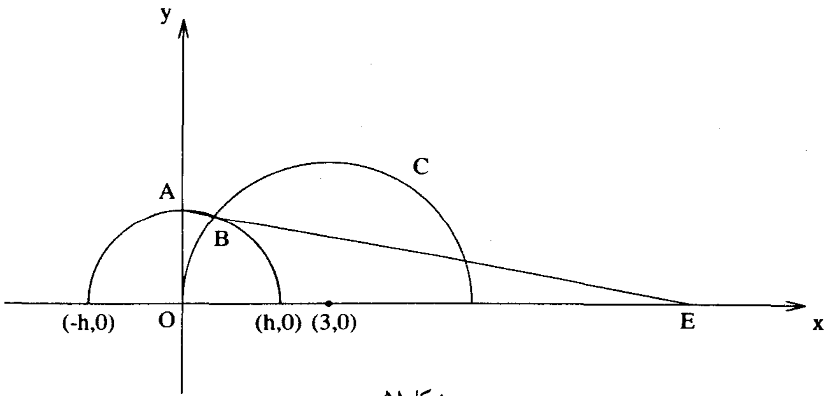
الف) مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است؛

ب) نقاط وسط PE، AQ و RD رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع‌اند.



شکل ۵۰

مسألهٔ ۳۹۶. فرض کنید C دایره‌ای به‌شعاع ۳ و به‌مرکز (۳,۰) باشد. به‌ازای هر عدد مانند h، $۶ > h > ۰$، دایرهٔ به‌شعاع h و به‌مرکز O (مبدأ مختصات) بخش مثبت محور yها را مثلاً در A و نیمهٔ بالایی C را مثلاً در B قطع می‌کند. (شکل ۵۱ را ببینید.) فرض کنید امتداد خط AB محور xها را در E قطع کند. وقتی‌که h را مدام کوچکتر از قبل انتخاب می‌کنیم، در مورد E چه روی می‌دهد؟ آیا E از O دور می‌شود؟ اگر پاسختان مثبت است، چقدر؟ آیا E به O نزدیک می‌شود؟ اگر پاسختان مثبت است، چقدر؟



شکل۵۱

مسألهٔ ۳۹۷. به‌ازای هر عدد گویا و مثبت مانند u توافق می‌کنیم که عددهای $u+۱$ و $\frac{u}{u+۱}$ را فرزندان u بنامیم. ثابت کنید که هر عدد گویا و مثبت به‌طریق یکتایی از نوادهٔ ۱ است.

مسألهٔ ۳۹۸. فرض کنید Q چهارضلعیی باشد که طول ضلعهایش عددهایی طبیعی‌اند و مجموع هر سه تا از آنها مضرب چهارمی است. ثابت کنید دو ضلع از Q یک طول دارند.

مسألهٔ ۳۹۹. آرایه‌ای مستطیلی از نقاط را درنظر بگیرید که تعداد سطرها و ستونهای آن عددهایی زوج‌اند. نقطه‌ها را رنگ می‌کنیم. رنگ هر نقطه یا قرمز است یا آبی، با این شرط که در هر سطر نصف نقطه‌ها قرمزند و نصف دیگر آبی و در هر ستون نیز نصف نقطه‌ها قرمزند و نصف دیگر آبی. اکنون، اگر دو نقطه مجاور (در یک سطر یا در یک ستون) همرنگ باشند، آنها را با یالی به‌همان رنگ به‌یکدیگر وصل می‌کنیم. ثابت کنید تعداد پاره‌خطهای آبی برابر تعداد پاره‌خطهای قرمز است.

مسألهٔ ۴۰۰. در یک میهمانی بیش از ۳ نفر حضور دارند. از هر چهار میهمان یک نفر سه نفر دیگر را می‌شناسد. ثابت کنید هریک از میهمانان، بجز احتمالاً سه نفر از آنها، بقیه را می‌شناسد.

مسألهٔ ۴۰۱. از نظر شهودی روشن است که رأسهای کوچکترین nضلعی منتظمی که می‌توان آن‌را در nضلعی منتظم مفروضی محاط کرد بر نقاط وسط ضلعهای این nضلعی واقع‌اند. این مطلب را ثابت کنید.

مسألهٔ ۴۰۲. عددهای حقیقی x، y و z چنان‌اند که

$$x^۲+(۱-x-y)^۲+(۱-y)^۲=y^۲+(۱-y-z)^۲+(۱-z)^۲=z^۲+(۱-z-x)^۲+(۱-x)^۲$$

مینیمم $x^۲+(۱-x-y)^۲+(۱-y)^۲$ را تعیین کنید.

مسألهٔ ۴۰۳. همهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ چهارم $x^۴-۴x=۱$ را تعیین کنید.

مسألهٔ ۴۰۴. $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند که به‌ازای همهٔ مقادیر حقیقی x در اتحاد

$$P(Q(x)) = Q(P(x))$$

صدق می‌کنند. اگر معادلهٔ $P(x) = Q(x)$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، ثابت کنید که معادلهٔ

$$P(P(x)) = Q(Q(x))$$

نیز ریشهٔ حقیقی ندارد (المپیاد ریاضی کانادا، ۱۹۸۰).

مسألهٔ ۴۰۵. ماکسیمم عبارت زیر را تعیین کنید:

$$P = \frac{(b^۲ + c^۲ - a^۲)(c^۲ + a^۲ - b^۲)(a^۲ + b^۲ - c^۲)}{(abc)^۲}$$

در این عبارت a، b و c عددهایی حقیقی‌اند و

$$\frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{bc} + \frac{c^۲ + a^۲ - b^۲}{ca} + \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{ab} = ۲ \qquad (۱)$$

مسألهٔ ۴۰۶. آیا می‌توان سه‌تاییهایی مانند (a, b, c) از عددهای حقیقی یافت به‌طوری‌که هیچ‌یک از این عددها مکعب عددی صحیح نباشد و عبارت

$$S_n = a^{\frac{n}{۳}} + b^{\frac{n}{۳}} + c^{\frac{n}{۳}}$$

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n عددی صحیح باشد؟

مسألهٔ ۴۰۷. اگر $S = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$، که در آن $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_n طول ضلعهای چندضلعیی دلخواه‌اند، ثابت کنید

$$\frac{n + ۲}{S - a_k} \geqslant \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{S - a_i}, \quad k = ۱, ۲, \cdots, n$$

مسألهٔ ۴۰۸. از نظر شهودی روشن است که اگر مستطیلی در بیضی محاط باشد، اضلاع مستطیل باید موازی محورهای بیضی باشند. این مطلب را ثابت کنید..

مسألهٔ ۴۰۹. ماکسیمم مساحت مستطیلهای محاط در بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ را بیابید.

مسألهٔ ۴۱۰. اگر w و z عددهایی مختلط باشند، ثابت کنید

$$۲|w|\,|z|\,|w - z| \geqslant \{|w| + |z|\}\,|\,w|z| - z|w|\,|$$

مسألهٔ ۴۱۱. اگر a و b دو عدد حقیقی و نابرابر باشند، ثابت کنید معادلهٔ

$$(a - b)x^n + (a^۲ - b^۲)x^{n-۱} + \cdots + (a^n - b^n)x + a^{n+۱} - b^{n+۱} = ۰ \qquad (۱)$$

حداکثر یک ریشهٔ حقیقی دارد.

مسألهٔ ۴۱۲. اگر $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$، ثابت کنید که اگر r ریشه‌ای از چندجمله‌ای

$$P(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

باشد، $|r| \leqslant 1$؛ یعنی همهٔ ریشه‌ها درون یا روی دایرهٔ واحد به‌مرکز صفحهٔ مختلط قرار دارند.

مسألهٔ ۴۱۳. برای بسیاری از مجموعها دستورهای زیبایی وجود دارد، مثل مجموعهای حسابی و هندسی، و همچنین، مجموعهایی مانند

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

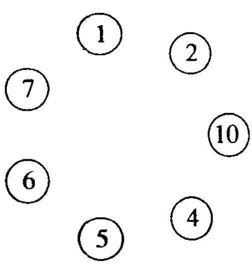
دستورهایی برای مجموعهای زیر بیابید:

$$S_n = \left[1^{\frac{1}{2}}\right] + \left[2^{\frac{1}{2}}\right] + \cdots + \left[(n^2-1)^{\frac{1}{2}}\right], \quad n = 2, 3, \cdots \qquad (1)$$

$$T_n = \left[1^{\frac{1}{3}}\right] + \left[2^{\frac{1}{3}}\right] + \cdots + \left[(n^3-1)^{\frac{1}{3}}\right], \quad n = 2, 3, \cdots \qquad (2)$$

($[x]$ بزرگترین عدد صحیحی است که از x بزرگتر نیست.)

مسألهٔ ۴۱۴. در شکل ۵۲ هفت دایره در آرایشی مدور مرتب شده‌اند و درون هر دایره عددی صحیح نوشته شده است. در این شکل این ویژگی وجود دارد که هر یک از عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ... و ۱۴ یا درون یکی از دایره‌ها نوشته شده است یا برابر با مجموع عددهای درون دو دایرهٔ مجاور است. آیا می‌توانید به‌جای عددهای نوشته شده در شکل ۵۲، عددهای صحیح دیگری، که هیچ‌کدام از آنها ۵ نباشد، بنویسید به‌طوری‌که همین ویژگی حفظ شود؟



شکل ۵۲

مسألهٔ ۴۱۵. رقمهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ را طوری در جاهای خالی در تقسیم زیر قرار دهید که باقیماندهٔ تقسیم ۱۹۸۱ باشد:

۷۱ − ۵۴۳ − ۲ − ۹۸۵ − ۲ − ۳۵۶ − ۸ − ۷ − ۸۳۶ − ۷ − ۳۹۹۹۷ | ۳۱۶۸

(ل. موزر)

مسألهٔ ۴۱۶. همهٔ مثلثها مانند ABC را تعیین کنید به‌طوری‌که

$$\tan(A-B) + \tan(B-C) + \tan(C-A) = 0$$

مسألهٔ ۴۱۷. ثابت کنید ممکن نیست ریشه‌های mاُم (m عددی صحیح و بزرگتر از ۱ است) سه عدد اول متمایز جمله‌های تصاعدی هندسی باشند. (لزومی ندارد جمله‌ها متوالی باشند.)

مسألهٔ ۴۱۸. در هر منحنی سادهٔ بسته ممکن است بیش از یک وتر با طول ماکسیمم وجود داشته باشد. مثلاً در دایره همهٔ قطرها وترهای با طول ماکسیمم‌اند. اما بیضی فقط یک وتر با طول ماکسیمم دارد (یعنی قطر اطول). ثابت کنید که در هر منحنی سادهٔ بسته هیچ دو وتری با طول ماکسیمم با هم موازی نیستند.

مسألهٔ ۴۱۹. ثابت کنید که هر دو شکل کراندار حداکثر دو مرکز تجانس دارند.

مسألهٔ ۴۲۰. پرتابه‌ای در پرواز همزمان در سه ایستگاه رادار که در رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌طول ضلع a واقع‌اند مشاهده می‌شود. فاصلهٔ پرتابه از سه ایستگاه، به‌ترتیبی دوری، $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ است. ارتفاع پرتابه نسبت به صفحهٔ مثلث چقدر است؟

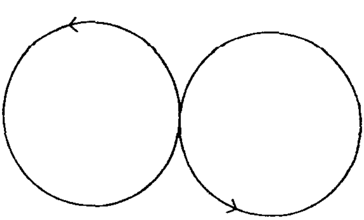
مسألهٔ ۴۲۱. در کرهٔ مفروضی APB، CPD و EPF سه وتر متعامد همرس (در نقطهٔ P) هستند. اگر $\overline{AP} = ۲a$، $\overline{PB} = ۲b$، $\overline{CP} = ۲c$، $\overline{PD} = ۲d$، $\overline{EP} = ۲e$ و $\overline{PF} = ۲f$، شعاع کره، R، را تعیین کنید.

مسألهٔ ۴۲۲. ۷ برگ کاغذ برمی‌داریم. تعدادی از این کاغذها را انتخاب می‌کنیم و هریک را به ۷ قطعهٔ کوچکتر می‌بریم. سپس تعدادی از قطعه‌های کوچکتر را انتخاب می‌کنیم و هریک را به ۷ قطعهٔ بازهم کوچکتر می‌بریم و این‌کار را همین‌طور تکرار می‌کنیم. سرانجام، این‌کار را متوقف می‌کنیم و متوجه می‌شویم که تعداد کلّ قطعه‌های کاغذ عددی بین ۱۹۸۸ و ۱۹۹۸ است. آیا می‌توان تعداد نهایی قطعه‌های کاغذ را دقیقاً تعیین کرد؟

مسألهٔ ۴۲۳. کمترین تعداد برشهای صفحه‌ای را که برای بریدن مکعب مستطیلی به ابعاد $a \times b \times c$ به abc مکعب واحد لازم است تعیین کنید، در صورتی‌که بتوان قطعه‌هایی را که قبلاً بریده شده‌اند پیش از برش روی‌هم قرار داد. (ل. موزر)

مسألهٔ ۴۲۴. شش‌ضلعی غیرمسطحی که اضلاع روبه‌رویش باهم موازی‌اند مفروض است. ثابت کنید که نقاط وسط شش‌ضلعش همصفحه‌اند.

مسألهٔ ۴۲۵. دو دایرهٔ همنهشت مماس بر یکدیگر مفروض‌اند. دو ذره از نقطهٔ تماس دایره‌ها شروع به حرکت می‌کنند. هر دو ذره در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کنند و سرعت آنها (که لزوماً ثابت نیست) در هر لحظه یکسان است. (شکل ۵۳ را ببینید.) ثابت کنید که از دید یکی از دو ذره، ذرهٔ دیگر روی دایره‌ای به‌شعاع قطر دایره‌های مفروض، $۲R$، حرکت می‌کند.



شکل ۵۳

مسألهٔ ۴۲۶. مکان‌هندسی نقاط وسط وترهایی از سهمی را بیابید که همه از نقطهٔ مفروضی در درون سهمی می‌گذرند.

مسألهٔ ۴۲۷. فرض کنید $G(n)$ نزدیکترین عدد صحیح به $\frac{(n+۳)^۲}{۱۲}$ باشد. مثلاً

$$G(۱)=۱,\ G(۲)=۲,\ G(۳)=۳,\ G(۴)=۴,\ G(۵)=۵,\ G(۶)=۷$$

ثابت کنید

$$G(n)=G(n-۶)+n, \quad n=۷,۸,۹,\cdots$$

مسألهٔ ۴۲۸. بیشترین مقدار n را، برحسب m، تعیین کنید که به‌ازای آن، حکم زیر درست باشد: اگر از میان اولین m عدد طبیعی، n عدد انتخاب کنیم، در میان $m-n$ عدد باقی‌مانده دست‌کم یکی مقسوم‌علیه دیگری است.

مسألهٔ ۴۲۹. حدس: اگر $f(t)$، $g(t)$ و $h(t)$ توابعی حقیقی مقدار از متغیری حقیقی باشند، عددهایی مانند x، y و z وجود دارند به‌طوری‌که $۰ \leqslant x,y,z \leqslant ۱$ و

$$|xyz-f(x)-g(x)-h(z)| \geqslant \frac{۱}{۳}$$

این حدس را ثابت کنید. ثابت کنید که اگر در رابطهٔ بالا به‌جای عدد $\frac{۱}{۳}$، عدد ثابتی مانند c، $c>\frac{۱}{۳}$، قرار دهیم، حدس نادرست خواهد بود؛ یعنی، در حدس بالا عدد $\frac{۱}{۳}$ بهترین مقدار ممکن است.

مسألهٔ ۴۳۰. در هندسهٔ اقلیدسی می‌دانیم که مجموع زاویه‌های مثلث ثابت است. با وجود این، ثابت کنید مجموع زاویه‌های دووجهی (فرجه‌های) چهاروجهی ثابت نیست (المپیاد ریاضی کانادا، ۱۹۷۹).

مسألهٔ ۴۳۱. عبارت $x_n x_{n-۱}\cdots x_۱ x_۰$ (که در آن هر x_i یک رقم است) نمایش عدد A در مبنای a و همچنین نمایش عدد B در مبنای b است، و عبارت $x_{n-۱}x_{n-۲}\cdots x_۱ x_۰$ نمایش عدد C در مبنای a و همچنین نمایش عدد D در مبنای b است. در اینجا a، b و n عددهایی صحیح و بزرگتر از ۱ هستند. ثابت کنید $\frac{C}{A}<\frac{D}{B}$ اگر و فقط اگر $a>b$.

مسألهٔ ۴۳۲. ثابت کنید که ۵، یا بیشتر از ۵، دایرهٔ عظیمه روی کره، که هیچ سه‌تایی از آنها همرس نیستند، دست‌کم یک چندضلعی کروی با ۵، یا بیشتر از ۵، ضلع مشخص می‌کنند. (ل. موزر)

مسألهٔ ۴۳۳. همهٔ سه‌تاییها مانند (x,y,z) از اعداد صحیح را تعیین کنید به‌طوری‌که

$$x^۳+y^۳+z^۳=(x+y+z)^۳$$

مسألهٔ ۴۳۴. همهٔ xهایی را بیابید که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$۱۶(\sin^۵ x+\cos^۵ x)=۱۱(\sin x+\cos x), \quad ۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$$

مسألهٔ ۴۳۵. اگر $a_{n+1} = \frac{1 + a_n a_{n-1}}{a_{n-2}}$ و $a_1 = a_2 = a_3 = 1$، ثابت کنید که a_n، $n = 4, 5, \cdots$، عددی صحیح است.

مسألهٔ ۴۳۶. اگر a، b، c و d عددهایی طبیعی باشند به‌طوری‌که $ab = cd$، ثابت کنید $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ عددی مرکب است (المپیاد آلمان غربی).

مسألهٔ ۴۳۷. دسته‌ای از ۱۳ کارت متمایز (مثلاً با ۱۳ رنگ مختلف) را به شیوه‌ای معین بر می‌زنیم، و همین طور این کار را دقیقاً به‌همین شیوه تکرار می‌کنیم. بیشترین تعداد بر زدنهای لازم برای اینکه کارتها دوباره به‌جای اول خود بازگردند چقدر است؟

مسألهٔ ۴۳۸. اگر

$$\frac{a}{bc - a^2} + \frac{b}{ca - b^2} + \frac{c}{ab - c^2} = 0$$

ثابت کنید

$$\frac{a}{(bc - a^2)^2} + \frac{b}{(ca - b^2)^2} + \frac{c}{(ab - c^2)^2} = 0$$

مسألهٔ ۴۳۹. اگر a، a' و b، b' و c، c' طولهای سه جفت یالهای روبه‌رو به‌هم در چهاروجهی دلخواهی باشند، ثابت کنید

الف) مثلثی وجود دارد که طول ضلعهایش $a + a'$، $b + b'$ و $c + c'$ است؛

ب) زاویه‌های مثلث قسمت (الف) حاده‌اند.

مسألهٔ ۴۴۰. مقدار ماکسیمم

$$\sqrt[3]{4 - 3x + \sqrt{16 - 24x + 9x^2 - x^3}} + \sqrt[3]{4 - 3x - \sqrt{16 - 24x + 9x^2 - x^3}}$$

را در بازهٔ $-1 \leqslant x \leqslant 1$ تعیین کنید.

مسألهٔ ۴۴۱. فرض کنید u_n جملهٔ nاُم دنبالهٔ زیر باشد

$$1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, \cdots$$

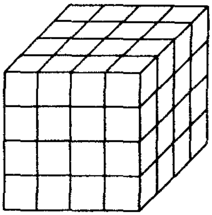
که در آن ابتدا یک عدد فرد آمده‌است، سپس ۲ عدد زوج، بعد ۳عدد فرد و همین‌طور الی آخر. ثابت‌کنید

$$u_n = 2n - \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{8n - 7})\right]$$

که در آن [ ] نمایش تابع جزء صحیح است.

مسألهٔ ۴۴۲. اگر e و f طول دو قطر چهارضلعیی به مساحت F باشند، ثابت کنید $e^2 + f^2 \geqslant 4F$. در این رابطه چه موقع برابری برقرار است؟

مسألهٔ ۴۴۳. ۱۱۰۰۰ نقطه درون مکعبی به‌طول ضلع ۱۵ واحد مفروض‌اند. ثابت کنید که دست‌کم ۶ تا از این نقطه‌ها درون کره‌ای به‌شعاع واحد واقع‌اند.

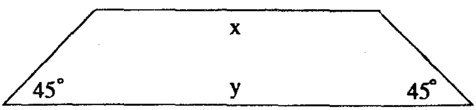


شکل ۵۴

مسألهٔ ۴۴۴. مکعب $۴ \times ۴ \times ۴$ در شکل ۵۴، ۶۴ حجره دارد و مکعبهای کوچکی با دو رنگ متفاوت در اختیار داریم که هرکدام در یک حجرهٔ آن جا می‌گیرد. دو بازیکن هریک یکی از رنگها را انتخاب می‌کنند و به‌نوبت مکعبهای کوچک از رنگ خود را در حجره‌ها قرار می‌دهند. هر بازیکنی که زودتر چهار مکعب از رنگ خود را در یک خط راست قرار دهد برندهٔ بازی است. چند روش مختلف برای این کار وجود دارد؟

مسألهٔ ۴۴۵. ۲۶ کارت قرمز و ۲۶ کارت سیاه را کاملاً درهم ریخته و سپس آنها را روی هم چیده‌ایم. ثابت کنید که اگر تعداد کارتهای قرمز در ۲۶ کارت بالایی بیشتر از تعداد کارتهای سیاه در ۲۶ کارت پایینی باشد، دست‌کم سه کارت همرنگ پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

مسألهٔ ۴۴۶. مسألهٔ نجار. نجاری ۴ قطعه چوب دارد که هر یک به‌شکل ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی مانند شکل ۵۵ بریده شده است. در هر مورد، x و y برحسب اینچ عددهایی صحیح‌اند. اگرچه مقادیر x و y در این ۴ قطعه یکسان نیستند، مساحت هر چهار قطعه یکی است، و در واقع مساحت سطح این قطعه‌ها برحسب اینچ مربع عددی صحیح و کوچکتر از ۴۰ است. ابعاد این چهار قطعه را تعیین کنید.



شکل ۵۵

مسألهٔ ۴۴۷. اگر m و n عددهایی طبیعی باشند ثابت کنید

$$\frac{۱}{\sqrt[n]{m}} + \frac{۱}{\sqrt[m]{n}} > ۱$$

مسألهٔ ۴۴۸. ادعا شده است که عدد

$$N = ۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۴۲۱۰$$

عددی دیرپاست، یعنی اگر در هر عدد طبیعی ضرب شود، عدد حاصل همیشه شامل هر ده رقم ۰، ۱، ۲، ... و ۹ است (ممکن است این عددها تکرار شوند).

الف) این ادعا را ثابت یا رد کنید.

ب) آیا عدد دیرپایی کوچکتر از عدد بالا وجود دارد؟

مسألهٔ ۴۴۹. اگر a، b، c و d عددهایی حقیقی باشند، ثابت کنید

$$\begin{cases} a^۲ + b^۲ = ۲ \\ c^۲ + d^۲ = ۲ \\ ac = bd \end{cases}$$

اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 2 \\ b^2 + d^2 = 2 \\ ab = cd \end{cases}$$

مسألهٔ ۴۵۰. در چند جایگشت از ۱، ۲، $\cdots$، n مانند $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$، $a_1 \neq 1$ و/یا $a_2 \neq 2$؟

مسألهٔ ۴۵۱. مردی و نوه‌اش در یک روز از سال متولد شده‌اند. این مرد سالی در روز تولدش متوجه می‌شود که سنش مضرب صحیحی از سن نوه‌اش است و گذشته از این، در پنج سال آینده نیز همین پدیده تکرار خواهد شد. سن مرد وقتی‌که متوجه این نکته شد چقدر بوده است؟

مسألهٔ ۴۵۲. ثابت کنید $\log_{10} 2$ عددی گنگ است.

مسألهٔ ۴۵۳. هفتادوپنج نقطهٔ همصفحه مفروض‌اند و هیچ سه‌تایی از آنها همخط نیستند. ثابت کنید حداکثر هفتاد درصد مثلثهایی که رأسهایشان این نقطه‌ها هستند حاده‌اند.

مسألهٔ ۴۵۴. فرض کنید T_1 و T_2 دو مثلث حاده باشند که طول ضلعهایشان به‌ترتیب a_1، b_1، c_1 و a_2، b_2، c_2، مساحتشان به‌ترتیب Δ_1 و Δ_2، شعاع دایرهٔ محیطی آنها به‌ترتیب R_1 و R_2، و شعاع دایرهٔ محاطی آنها به‌ترتیب r_1 و r_2 است. ثابت کنید که اگر $a_1 \geqslant a_2$، $b_1 \geqslant b_2$ و $c_1 \geqslant c_2$، آنگاه $\Delta_1 \geqslant \Delta_2$ و $R_1 \geqslant R_2$، ولی لزومی ندارد که $r_1 \geqslant r_2$.

مسألهٔ ۴۵۵. دو نقطه مفروض‌اند و هریک از آنها روی یکی از دو خط متنافر مفروض واقع است. ثابت کنید کرهٔ یکتایی وجود دارد که در نقاط مفروض بر خطهای مفروض مماس است.

مسألهٔ ۴۵۶. زنجیر $\{p_1, p_2, \cdots, p_m\}$ از عددهای اول را درنظر بگیرید به‌طوری‌که به‌ازای هر i، $2 \leqslant i \leqslant m$، یا $p_i = 2p_{i-1} - 1$ و یا $p_i = 2p_{i-1} + 1$. $\{2, 5, 11, 23, 47\}$ و $\{2, 3, 7, 13\}$ مثالهایی از این‌گونه زنجیرها هستند. ثابت کنید هر زنجیری از این نوع حداکثر تعدادی متناهی عضو دارد.

مسألهٔ ۴۵۷. M نقطه‌ای بر ضلع AB از مثلث ABC است. r_1، r_2 و r به‌ترتیب شعاع دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای AMC، BMC و ABC، و t_1، t_2 و t شعاع دایره‌های محاطی خارجی همین مثلثها هستند که به‌ترتیب بر AM، BM و AB مماس‌اند. ثابت کنید

$$\frac{r_1}{t_1} \cdot \frac{r_2}{t_2} = \frac{r}{t}$$

مسألهٔ ۴۵۸. چهار عدد صحیح نامنفی روی حلقه‌ای نوشته شده‌اند. حلقهٔ جدیدی از اعداد صحیح

نامنفی تشکیل می‌دهیم که هر عدد روی آن برابر با قدرمطلق تفاضل دو عدد مجاور در حلقهٔ اول باشد. ثابت کنید که اگر این‌کار را ادامه دهیم در نهایت به چهار صفر می‌رسیم. مثلاً،

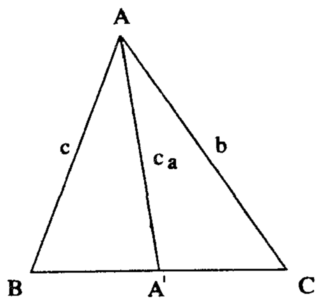
$$\begin{pmatrix} ۹ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۶ & ۳ \\ ۸ & ۱ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۳ & ۲ \\ ۲ & ۷ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۱ & ۵ \\ ۱ & ۵ \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۴ & ۴ \\ ۴ & ۴ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

مسألهٔ ۴۵۹. به‌آسانی معلوم می‌شود که خانواده‌ای نامتناهی از بیضیها وجود دارد که همهٔ آنها را می‌توان در مربع مفروضی محاط کرد. با وجود این، ثابت کنید که در پنج‌ضلعی منتظم فقط یک بیضی می‌توان محاط کرد.

مسألهٔ ۴۶۰. همهٔ عددهای حقیقی مانند x، y و z را بیابید به‌طوری‌که اگر a، b و c طول اضلاع مثلثی دلخواه باشند،

$$xa^۲ + yb^۲ + zc^۲ \leqslant ۰$$

مسألهٔ ۴۶۱. اگر سه خط سوایی برابر اضلاع مثلثی را به یک نسبت و در یک جهت قطع کنند، آیا مثلث باید متساوی‌الاضلاع باشد؟ (شکل ۵۶ را ببینید.)



شکل۵۶

مسألهٔ ۴۶۲. مقدار ماکسیمم عبارت زیر را بیابید

$$(\sin A_۱)(\sin A_۲)\cdots(\sin A_n)$$

به شرطی‌که

$$(\tan A_۱)(\tan A_۲)\cdots(\tan A_n) = ۱$$

مسألهٔ ۴۶۳. مساحت دو مثلث به‌طول ضلعهای $(a_۱, b_۱, c_۱)$ و $(a_۲, b_۲, c_۲)$ به‌ترتیب $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ است.

نابرابری زیر را که نابرابری نیوبرگ ـ پدو نامیده می‌شود ثابت کنید

$$a_۱^۲(b_۲^۲ + c_۲^۲ - a_۲^۲) + b_۱^۲(c_۲^۲ + a_۲^۲ - b_۲^۲) + c_۱^۲(a_۲^۲ + b_۲^۲ - c_۲^۲) \geqslant ۱۶\Delta_۱\Delta_۲$$

تعیین کنید که چه موقع برابری برقرار است.

مسألهٔ ۴۶۴. به‌آسانی معلوم می‌شود که اگر رأسهای nضلعیی محاط در nضلعی منتظم مفروضی ضلعهای nضلعی مفروض را به یک نسبت و در یک جهت تقسیم می‌کنند، nضلعی محاطی نیز منتظم است. عکس این نتیجه را ثابت کنید؛ یعنی ثابت کنید که اگر $B_۱$، $B_۲$، $\cdots$ و B_n رأسهای nضلعی منتظمی محاط در nضلعی منتظم دیگری با رأسهای $A_۱$، $A_۲$، $\cdots$ و A_n باشند، و رأسهای مذکور به‌طور متوالی و در یک جهت نوشته شده باشند و B_i بین A_i و $A_{i+۱}$ واقع باشد، آنگاه طول A_iB_iها باهم برابر است.

مسألهٔ ۴۶۵. فرض کنید m و n عددهای مثبت مفروضی باشند و $m \geqslant n$. می‌گوییم عدد x (برای m و n) «خوب» است، به شرطی‌که به‌ازای هر a و b، $m \geqslant a \geqslant ۰$ و $n \geqslant b \geqslant ۰$،

$$m^۲ + n^۲ - a^۲ - b^۲ \geqslant (mn - ab)x \qquad (۱)$$

بزرگترین عدد خوب را (برحسب m و n) بیابید.

مسألهٔ ۴۶۶. ثابت کنید که در هر چهارضلعی (ساده یا غیرساده، مسطح یا غیرمسطح) با طول ضلعهای a، b، c و d،

$$a^۴ + b^۴ + c^۴ \geqslant \frac{d^۴}{۲۷}$$

مسألهٔ ۴۶۷. ماکسیمم $x^۲y$ را بیابید در صورتی‌که

$$x + y + \sqrt{۲x^۲ + ۲xy + ۳y^۲} = k, \quad x, y \geqslant ۰$$

(k مقداری ثابت است).

مسألهٔ ۴۶۸. اگر m عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد، ثابت کنید

$$\frac{۴^m}{۲\sqrt{m}} < \binom{۲m}{m} < \left(\frac{۴^m}{\sqrt{۳m + ۱}}\right) \qquad (۱)$$

مسألهٔ ۴۶۹. همهٔ جفتهایی مانند (x, y) از اعداد گویا را تعیین کنید به‌طوری‌که

$$x^۳ + y^۳ = x^۲ + y^۲$$

مسألهٔ ۴۷۰. احتمال اینکه تعداد شش‌ها در پرتاب n تاس سالم عددی فرد باشد چقدر است؟

مسألهٔ ۴۷۱. مجموع سن من، برادرم، پدرم و مادرم هشتاد و سه سال است. شش برابر سن پدرم هفت برابر سن مادرم است. سن مادرم سه برابر سن من است. سن هریک از ما چقدر است؟ (جوابهایتان

باید اعدادی صحیح باشند.)

مسألهٔ ۴۷۲. فرض کنید $(n_۱, n_۲, \cdots, n_r)$ و $[n_۱, n_۲, \cdots, n_r]$ به‌ترتیب بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک عددهای طبیعی $n_۱$، $n_۲$، $\cdots$ و n_r باشند. مثلاً $(۶, ۱۲, ۱۵) = ۳$ و $[۲, ۳, ۴] = ۱۲$. ثابت کنید

$$\frac{(a,b,c)^۲}{(b,c)(c,a)(a,b)} = \frac{[a,b,c]^۲}{[b,c][c,a][a,b]}$$

(المپیاد ریاضی امریکا، ۱۹۷۲).

مسألهٔ ۴۷۳. در حاصل‌ضرب زیر همهٔ ارقام غیر از رقم یکان، یعنی ۶، جابه‌جا نوشته شده‌اند

$$(abc)(bca)(cab) = ۲۳۴۲۳۵۲۸۶$$

اگر (abc)، (bca) و (cab) عددهایی سه‌رقمی باشند و $a > b > c$، حاصل‌ضرب صحیح را بنویسید.

مسألهٔ ۴۷۴. منحنی نمایش معادلهٔ زیر را رسم کنید

$$(۲x + ۳y)^۲(y - x) = x + y$$

مسألهٔ ۴۷۵. $A_{۱۹۹۰}$ را بیابید، در صورتی‌که

$$A_۰ = A,\ A_{n+۱} = \frac{A_n}{۱ + nA_n},\quad n = ۰, ۱, ۲, \cdots$$

مسألهٔ ۴۷۶. هریک از عددهای ۱، ۲، ۳، $\cdots$ و ۱۰۰ را به‌ترتیبی در یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، $\cdots$ و ۱۰۰ ضرب می‌کنیم. ثابت کنید که ممکن نیست ۱۰۰ حاصل‌ضرب به‌دست آمده همهٔ باقیمانده‌های مثبت تقسیم بر ۱۰۱ باشند.

مسألهٔ ۴۷۷. در این مسأله منظور از تابع حقیقی تابعی مانند f است به‌طوری‌که $f(x)$ به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x موجود و عددی حقیقی باشد. ثابت کنید که فقط یک عدد ثابت مانند b وجود دارد به‌طوری‌که تابع حقیقی f با این ویژگی وجود داشته باشد که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y،

$$f(x - y) = f(x) - f(y) + bxy$$

مسألهٔ ۴۷۸. کودکی دوست دارد کیک را به‌صورت برشهایی به‌شکل مثلث حاده بخورد. نشان دهید چگونه می‌توان کیکی به‌شکل چندضلعی را طوری برید که این کودک آن‌را به‌شکل برشهای دلخواه خود بخورد و قطعه‌ای از کیک اضافه نیاید.

مسألهٔ ۴۷۹. در مثلث منتظم (متساوی‌الاضلاع) مرکز دایرهٔ محیطی، O، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، I، و مرکزثقل، G، همگی برهم منطبق‌اند. برعکس، اگر در مثلثی از نقطه‌های O، I و G دو تا

برهم منطبق باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع است. همچنین، در چهاروجهی منتظم O، I و G برهم منطبق‌اند. عکس این نتیجه را ثابت یا رد کنید، یعنی اینکه اگر در چهاروجهی O، I و G برهم منطبق باشند، این چهاروجهی باید منتظم باشد.

مسألهٔ ۴۸۰. ثابت کنید مجموعه‌ای نامتناهی از عددهای طبیعی به‌شکل $2^n - 3$ با این ویژگی وجود دارد که هیچ دو عضوی از آن مقسوم‌علیه اول مشترکی ندارند.

مسألهٔ ۴۸۱. ثابت کنید مجموع مربعهای معکوس طول پاره‌خطهایی که یک رأس nضلعی منتظمی را به $n - 1$ رأس دیگر وصل می‌کنند برابر با $\frac{n^2 - 1}{12R^2}$ است که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی nضلعی است.

مسألهٔ ۴۸۲. n^2 مهره که دقیقاً nتا از آنها قرمزند به‌تصادف در n سطر، که در هر سطر n مهره هست، چیده شده‌اند. ثابت کنید احتمال اینکه دست‌کم یک ردیف حاوی هیچ مهرهٔ قرمزی نباشد برابر است با

$$1 - \frac{(n-1)!(n^2-n)!n^{n-1}}{(n^2-1)!}$$

مسألهٔ ۴۸۳. عدد صحیحی که نمایش آن در مبنای b، n رقم غیرصفر دارد مفروض است. ثابت کنید که همیشه می‌توان تعداد مشخصی، مانند r تا $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$، از این رقمها را با صفر عوض کرد به‌طوری‌که عدد حاصل بر n بخش‌پذیر باشد. (لیوموزر)

مسألهٔ ۴۸۴. لوزی با مساحت مینیممی را بیابید که بتوان آن‌را در متوازی‌الاضلاع مفروضی محاط کرد (یعنی هر رأس لوزی بر یک ضلع متوازی‌الاضلاع واقع باشد).

مسألهٔ ۴۸۵. دو مثلثی قائم‌الزاویه خطی موازی وتر رسم کرده‌ایم که از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، I، می‌گذرد. روی این خط، I پاره‌خط محدود به دو ضلع مثلث را به دو پاره‌خط به طولهای m و n تقسیم می‌کند. مساحت مثلث را (برحسب m و n) تعیین کنید.

مسألهٔ ۴۸۶. اگر

$$a+b+c+d+e+f=0$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3=0$$

ثابت کنید

$$(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)=(b+c)(b+d)(b+e)(b+f)$$

مسألهٔ ۴۸۷. ثابت کنید مجموع ارقام هریک از نخستین ۷۲ مضرب طبیعی ۲۷۳۹۷۲۶ برابر با ۳۶ است.

مسألهٔ ۴۸۸. بزرگترین عدد حقیقی مانند k را بیابید به‌طوری‌که به‌ازای هر سه عدد مختلط مانند z_1،

$z_۲$ و $z_۳$ با قدرمطلق ۱،

$$|z_۲z_۳ + z_۳z_۱ + z_۱z_۲| \geqslant k|z_۱ + z_۲ + z_۳|$$

مسألهٔ ۴۸۹. اگر در مسابقهٔ اسب‌دوانی شرط‌بندی بر روی اسبی a به b باشد، می‌توانیم $\frac{b}{a+b}$ را شانس ظاهری برنده شدن اسب بدانیم. ثابت کنید که اگر در مسابقه‌ای مجموع شانسهای ظاهری برنده شدن اسبها کمتر از ۱ باشد، می‌توان به‌گونه‌ای روی همهٔ اسبها شرط بست که مبلغ برد مستقل از نتیجهٔ مسابقه باشد.

مسألهٔ ۴۹۰. اگر همهٔ ریشه‌های معادلهٔ

$$a_۰x^n - na_۱x^{n-۱} + \frac{n(n-۱)}{۱\cdot۲}a_۲x^{n-۲} - \cdots + (-۱)^n a_n = ۰$$

مثبت باشند، اما همگی باهم برابر نباشند، به‌ازای همهٔ مقادیر r بین ۱ و $n-۱$، و خود این دو عدد، ثابت کنید

$$a_r a_{n-r} > a_۰ a_n$$

مسألهٔ ۴۹۱. فرض کنید $u \leqslant ۱ \leqslant w$. همهٔ مقادیر v را تعیین کنید به‌طوری‌که

$$u + vw \leqslant v + wu \leqslant w + uv$$

مسألهٔ ۴۹۲. کوتاهترین فاصلهٔ صفحهٔ $Ax + By + Cz = ۱$ و بیضیوار

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} + \frac{z^۲}{c^۲} = ۱$$

را تعیین کنید. می‌توانید فرض کنید A، B و C هر سه مثبت‌اند و صفحه بیضیوار را قطع نمی‌کند. (از حسابان استفاده نکنید.)

مسألهٔ ۴۹۳. یکی از مسأله‌های اولین مسابقهٔ ریاضی ویلیام پاتنام یافتن طول کوتاهترین وتری از سهمی $y^۲ = ۲ax$ بود که در یک انتهایش بر سهمی عمود باشد (با این فرض که $a > ۰$). راه‌حل این مسأله با استفاده از حسابان سرراست است. راه‌حلی برای این مسأله بیاورید که در آن از حسابان استفاده نشود.

مسألهٔ ۴۹۴. علی و حسن بازی منصفانه‌ای را بارها انجام می‌دهند و هر بازی بر سر یک تومان است. اگر علی a تومان و حسن b تومان داشته باشد احتمال اینکه علی همهٔ پول حسن را ببرد چقدر است؟ فرض کنید انجام بازی آن‌قدر ادامه پیدا می‌کند تا یک نفر همهٔ پول خود را ببازد.

مسألهٔ ۴۹۵. اگر P، Q و R سه نقطه درون یا روی مربع واحد باشند، ثابت کنید کوتاهترین فاصله میان این نقطه‌ها حداکثر $۲\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ است، یعنی ثابت کنید

$$\min(\overline{PQ}, \overline{QR}, \overline{RP}) \leqslant ۲\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$$

همچنین تعیین کنید که در این رابطه چه موقع برابری برقرار است.

مسألهٔ ۴۹۶. هر پنج نقطه درون یا روی مستطیلی ۱ × ۲ ده پاره‌خط (را که نقطه‌ها را به‌هم وصل می‌کنند) مشخص می‌کنند. ثابت کنید طول کوتاهترین پاره‌خط در میان این ۱۰ پاره‌خط حداکثر $۲\sqrt{۲-\sqrt{۳}}$ است. (لیوموزر)

مسألهٔ ۴۹۷. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ثابت کنید معادلهٔ دیوفانتی

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\cdots+\frac{۱}{x_n}+\frac{۱}{x_۱x_۲\cdots x_n}=۱$$

حداکثر یک ریشه دارد. (لیوموزر)

مسألهٔ ۴۹۸. اگر در هر رأس چهاروجهی زاویه‌های بین وجوه °۱۸۰ باشد، ثابت کنید که این چهاروجهی متساوی‌الساقین است، یعنی یالهای روبه‌رو باهم برابرند.

مسألهٔ ۴۹۹. ثابت کنید هر عدد طبیعی که عضوی از مجموعهٔ نامتناهی زیر نباشد، برابر مجموع دو یا چند عضو متمایز از این مجموعه است:

$$\{۳,-۲,۲^۲\cdot ۳,-۲^۳,\cdots,۲^{۲k}\cdot ۳,-۲^{۲k+۱},\cdots\}=\{۳,-۲,۱۲,-۸,۴۸,-۳۲,۱۹۲,\cdots\}$$

مسألهٔ ۵۰۰. $n+۱$ نیمخط از رأس مشترکی در فضای اقلیدسی nبعدی، E^n، رسم شده‌اند. اگر همهٔ زاویه‌های حاده بین هر جفت از این نیمخطهای همنهشت باشند، اندازهٔ این زاویهٔ مشترک را تعیین کنید.

راه‌حل مسأله‌ها

مسألهٔ ۱. سه طول مورد نظر به‌شکل $a-d$، a، و $a+d$ هستند، با این شرط که

$$(a-d)^۲ + a^۲ = (a+d)^۲$$

این برابری به برابری $a(a-۴d) = ۰$ تبدیل می‌شود. بنابراین، طول ضلعهای مثلث $۳d$، $۴d$ و $۵d$ است.

مسألهٔ ۲. فرض کنید $A(a, ۲a)$ نقطهٔ دلخواهی روی خط $y = ۲x$، و $B(b, b)$ نقطهٔ دلخواهی روی خط $y = x$ باشد. نقطهٔ وسط پاره‌خط AB نقطهٔ (x, y) است که در آن $x = \frac{a+b}{۲}$ و $y = \frac{۲a+b}{۲}$، و طول پاره‌خط AB برابر ۴ است. پس $(a-b)^۲ + (۲a-b)^۲ = ۴^۲$ یا $۵a^۲ - ۶ab + ۲b^۲ = ۴^۲$ و $a = ۲(y-x)$، $b = ۲(۲x-y)$؛ پس

$$۲۰(y-x)^۲ - ۲۴(y-x)(۲x-y) + ۸(۲x-y)^۲ = ۴^۲$$

یا

$$۲۵x^۲ - ۳۶xy + ۱۳y^۲ = ۴$$

این معادلهٔ بیضیی است که (بنابر تقارن مکان‌هندسی) محورهایش باید نیمساز زاویه‌های متشکل از دو خط مفروض باشند.

مسألهٔ ۳. به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت که، طول ضلعهای مستطیل ۹ و ۱۶ است. بنابراین مساحت مربع باید ۱۴۴ باشد. پس طول ضلع مربع ۱۲ و محیط آن ۴۸ است.

مسألهٔ ۴. یکی از قانونهایی که از این مثالها به ذهن می‌رسد چنین است:

$$(۲n+۱)^۲ + (۲n(n+۱))^۲ = (۲n(n+۱)+۱)^۲, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

به‌آسانی می‌توان درستی این برابری را با استفاده از به توان رساندن یا استفاده از اتحاد مزدوج ثابت کرد.

مسألهٔ ۵. مجموع مطلوب را S_n می‌نامیم؛ درنتیجه به‌ازای $n \geqslant ۲$،

$$S_n = ۶ + ۶۶ + ۶۶۶ + \cdots + \underbrace{۶۶۶\cdots۶}_{n \text{ تا } ۶}$$

$$= (۰ + ۶) + (۶۰ + ۶) + (۶۶۰ + ۶) + \cdots + (۶۶۶\cdots۶۰ + ۶)$$

$$= ۱۰(۶ + ۶۶ + \cdots + \underbrace{۶۶۶\cdots۶}_{n-۱ \text{ تا } ۶}) + ۶n$$

$$= ۱۰S_{n-۱} + ۶n = ۱۰(S_n - \underbrace{۶۶۶\cdots۶}_{n \text{ تا } ۶}) + ۶n$$

با حل کردن این معادله نسبت به S_n به‌دست می‌آوریم

$$۹S_n = \underbrace{۶۶۶\cdots۶}_{n \text{ تا } ۶}۰ - ۶n = \frac{۲}{۳}(۹۹۹\cdots۹۰ - ۹n)$$

$$S_n = \frac{۲}{۳}(\underbrace{۱۱۱\cdots۱}_{n \text{ تا } ۱}۰ - n)$$

چون

$$\underbrace{۱۱۱\cdots۱}_{n \text{ تا } ۱}۰ = ۱۰ + ۱۰^{۲} + \cdots + ۱۰^{n} = \frac{۱۰(۱۰^{n} - ۱)}{۹}$$

می‌توانیم بنویسیم

$$S_n = \frac{۲}{۳}\left(\frac{۱۰(۱۰^{n} - ۱)}{۹} - n\right) = \frac{۲}{۲۷}(۱۰^{n+۱} - ۱۰ - ۹n), \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

مسألهٔ ۶. راه‌حل اول. می‌توانیم فرض کنیم $x > y > z \geqslant ۱$. اگر تعداد امتحانها N باشد، آنگاه $N > ۱$ (بنابر کلمهٔ «امتحانها» در صورت مسأله) و

$$(x + y + z)N = ۲۰ + ۱۰ + ۹ = ۳۹$$

چون $x + y + z \geqslant ۳ + ۲ + ۱ = ۶$، نتیجه می‌شود که $N \leqslant ۶$، و چون N عدد ۳۹ را می‌شمارد، نتیجه می‌گیریم که $N = ۳$؛ پس $x + y + z = ۱۳$. جوابهای معادلهٔ $x + y + z = ۱۳$ با شرط $x, y, z \geqslant ۱$ و اینکه x و y و z عددهای صحیح متمایزی باشند، چنین‌اند

$$(x, y, z) = (۱۰, ۲, ۱),\ (۹, ۳, ۱),\ (۸, ۴, ۱),\ (۸, ۳, ۲),\ (۷, ۵, ۱),$$
$$(۷, ۴, ۲),\ (۶, ۵, ۲),\ (۶, ۴, ۳)$$

هیچ‌یک از این جوابها بجز $(۸, ۴, ۱)$ قابل قبول نیست، چون مجموع نمره‌های اکرم باید ۲۰ باشد. اکنون می‌دانیم که نمرهٔ جبر مژگان ۸ (بزرگترین عدد بین ۸، ۴ و ۱) و مسأله این است که جدول زیر را

طوری پر کنیم که هر ردیف جایگشتی از ۸، ۴ و ۱ و مجموع ستونها ۲۰، ۱۰ و ۹ باشد.

	اکرم	مژگان	راحیل
جبر		۸	
هندسه			
امتحان دیگر			
	۲۰	۱۰	۹

به‌آسانی معلوم می‌شود که تنها پاسخ ممکن به‌صورت زیر است:

	اکرم	مژگان	راحیل
جبر	۴	۸	۱
هندسه	۸	۱	۴
امتحان دیگر	۸	۱	۴

پس راحیل دومین نمره را در هندسه گرفته است.

راه‌حل دوم. مانند راه‌حل قبل نتیجه می‌گیریم که سه امتحان برگزار شده است و $x + y + z = ۱۳$. هر سه نمرهٔ اکرم یکسان نیست، چون ۲۰ بر ۳ بخشپذیر نیست. فرض کنید بالاترین نمرهٔ اکرم y باشد. در این صورت نمره‌های او باید $\{y, z, z\}$ و یا $\{y, y, z\}$ باشد. اما

$$y + z + z < y + y + z < x + y + z = ۱۳ < ۲۰$$

پس اکرم دست‌کم یک x گرفته است. ثابت می‌کنیم که ممکن نیست اکرم دقیقاً یک x گرفته باشد. اگر چنین بود، چون $x + y + z = ۱۳$ و مجموع نمره‌های اکرم ۲۰ است، نمره‌های او باید $\{x, y, y\}$ باشد. در این صورت، $x + ۲y = ۲۰$ و $y = z + ۷$، پس $x + ۲z = ۶$. بنابراین ممکن نیست که نمره‌های مژگان $\{x, z, z\}$ باشد؛ همین‌طور $\{x, y, z\}$ یا بهتر، و درنتیجه همهٔ امکانها برای نمره‌های مژگان رد می‌شود. پس اکرم دو تا x گرفته است. چون $x + y + z = ۱۳$ و مژگان یک x گرفته و مجموع نمره‌هایش ۱۰ است، نمره‌هایش باید $\{x, z, z\}$ باشد و نمره‌های اخذ شده باید به‌صورت زیر باشند:

	جبر	*	*
اکرم	؟	x	x
مژگان	x	z	z
راحیل	؟	y	y

پس راحیل در همهٔ امتحانها غیر از امتحان جبر y گرفته است. بنابراین، بی‌هیچ ابهامی، راحیل دومین نمره را در هندسه گرفته است.

ملاحظه. در واقع می‌توان نتیجه گرفت که نمرهٔ جبر اکرم y است، و $x = ۸$، $y = ۴$ و $z = ۱$، و چنین حالتی ممکن است.

اگر شرایط را ضعیف کنیم به‌طوری‌که فقط لازم باشد x، y و z عددهایی صحیح و نامنفی باشند، امکان اینکه $N = ۱۳$ نیز وجود دارد. در این حالت $x = ۲$، $y = ۱$ و $z = ۰$ و امکانهای بسیاری وجود دارد، و برای حل کردن مسأله به اطلاعات بیشتری نیاز داریم.

مسألهٔ ۷. توجه کنید که

$$f_{۰}(x) = \frac{۱}{۱ - x}$$

$$f_{۱}(x) = f_{۰}(f_{۰}(x)) = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۱ - x}} = \frac{۱ - x}{-x}$$

$$f_{۲}(x) = f_{۰}(f_{۱}(x)) = \frac{۱}{۱ - \frac{۱ - x}{-x}} = x$$

$$f_{۳}(x) = f_{۰}(f_{۲}(x)) = \frac{۱}{۱ - x} = f_{۰}(x)$$

پس به‌طورکلی

$$f_{n+۳}(x) = f_{n}(x), \qquad n = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$$

و به‌خصوص

$$f_{۱۹۷۶}(۱۹۷۶) = f_{۲}(۱۹۷۶) = ۱۹۷۶$$

مسألهٔ ۸. باقیماندهٔ تقسیم هر یک از پنج عدد انتخاب شده بر ۳ یکی از عددهای ۰، ۱ و یا ۲ است. اگر سه تا از این پنج باقیمانده با هم مساوی باشند، مجموع سه عدد متناظرشان بر ۳ بخشپذیر است. اگر هیچ سه باقیمانده‌ای با هم مساوی نباشند، باقیمانده‌ها شامل ۰، ۱ و ۲ هستند و باز هم نتیجهٔ مورد نظر حاصل می‌شود.

یادداشت. تعمیم زیر از این مسأله در المپیاد آلمان غربی در سال ۱۹۸۱ دیده می‌شود:

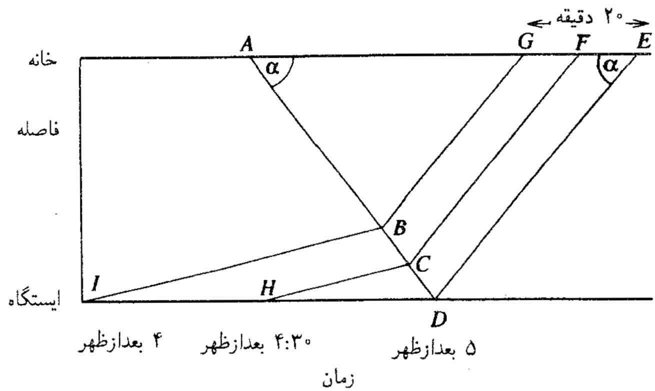
فرض کنید n توانی با نمای مثبت از ۳ باشد. ثابت کنید در هر مجموعه‌ای از $۲n - ۱$ عدد صحیح می‌توان زیرمجموعه‌ای از n عدد صحیح انتخاب کرد که مجموعشان بر n بخشپذیر باشد.

به‌طور کلیتر، هر مجموعه از $۲n - ۱$ عدد صحیح شامل زیرمجموعه‌ای از n عدد صحیح است که مجموعشان بر n بخشپذیر است. این نتیجه منسوب به اردوش، گینسبورگ و زیف است. اثباتهای دیگری برای این نتیجه را ر. گراهام و همچنین ت. رِدموند و س. ریاوک داده‌اند.

مسألهٔ ۹. راه‌حل اول. روزی که آقای محمدی ۲۰ دقیقه زودتر از معمول به منزل رسیده است، راننده ۱۰ دقیقه هنگام رفتن به سوی ایستگاه و ۱۰ دقیقه هنگام برگشتن به منزل کمتر از معمول رانندگی کرده، و درنتیجه ساعت ۵۰ : ۴ بعدازظهر آقای محمدی را سوارکرده است. (این بخش، مسألهٔ معروفی است که در آن فرض می‌کنیم سرعت پیاده‌روی آقای محمدی و سرعت راندن راننده ثابت بوده است.) اکنون نتیجه می‌شود که سرعت راننده پنج برابر سرعت آقای محمدی بوده است. فرض کنید که دفعهٔ

بعد آقای محمدی t دقیقه بعد از ۳۰ : ۴ بعدازظهر به راننده برسد. راننده فاصلهٔ بین محل ملاقات با آقای محمدی تا ایستگاه را که معمولاً ساعت ۰۰ : ۵ بعدازظهر به آنجا می‌رسد در $\frac{t}{5}$ دقیقه طی می‌کند. پس $t + \frac{t}{5} = 30$. بنابراین $t = 25$ و آقای محمدی ۱۰ دقیقه زودتر از معمول به منزل می‌رسد.

راه‌حل دوم. (به‌روش «خطهای جهانی»؛ شکل ۵۷ را ببینید.) خطهای مسافت در برابر زمان را در مورد آقای محمدی و راننده‌اش رسم می‌کنیم (نمودار شکل ۵۷ را ببینید). خط جهانی راننده ADE است که A و E نامعلوم‌اند ولی $\angle DAE = \angle DEA$. خط جهانی آقای محمدی بعد از رسیدن به ایستگاه در ساعت ۴ بعدازظهر IB، BG است به‌طوری‌که $BG \parallel DE$. در این صورت، $\overline{GE}$ برابر ۲۰ دقیقه است. خط جهانی آقای محمدی بعد از رسیدن به ایستگاه در ساعت ۳۰ : ۴ بعدازظهر HC، CF است به‌طوری‌که $HC \parallel IB$ و $CF \parallel DE$. به‌این ترتیب نتیجه می‌شود که $\overline{BC} = \overline{CD}$ و $\overline{GF} = \overline{FE}$. پس $\overline{FE}$ برابر ۱۰ دقیقه است.



شکل۵۷

مسألهٔ ۱۰. فرض کنید P جای مرکزثقل سیستم باشد. تا وقتی‌که P بالاتر از سطح آب است، هرچه سطح آب بالاتر بیاید P پایینتر می‌رود. پس با ریختن آب در ظرف به مرحله‌ای می‌رسیم که P درسطح آب قرار می‌گیرد. در این لحظه P در پایینترین نقطهٔ ممکن قرار دارد، چون بعد از این لحظه هر چه آب در ظرف بریزیم سطح آب در ظرف و همچنین جای P بالاتر می‌آید.

مسألهٔ ۱۱. به پدر توصیه کنید که در بازی اول شرکت کند. ثابت می‌کنیم که احتمال بردن پدر در مسابقات، در صورتی که در اولین بازی شرکت کرده باشد بیشتر از حالتی است که در اولین بازی شرکت نکرده باشد.

فرض کنید F، M و S به‌ترتیب نشانهٔ پدر، مادر و پسر باشند و فرض کنید $X > Y$ علامت این باشد که X در بازی مقابل Y برنده بوده است.

اگر F و M اولین بازی را انجام دهند، F در هر یک از سه حالت زیر برندهٔ مسابقات است:

(۱) $F > M$ ،$F > S$؛

(۲) $F > M$ ،$S > F$ ،$M > S$ ،$F > M$؛

(۳) $M > F$ ،$S > M$ ،$F > S$ ،$F > M$.

اگر F و S اولین بازی را انجام دهند، مجموعه بازیهایی که منجر به برنده شدن F می‌شوند همان مجموعه بازیهای بالا هستند به‌شرطی که در آنها جای M و S عوض شود.

اگر M و S اولین بازی را انجام دهند، F در هر یک از دو حالت زیر برندهٔ مسابقات است:

(۴) $S > M$ ،$F > S$ ،$F > M$؛

(۵) $M > S$ ،$F > M$ ،$F > S$.

فرض کنید $\overline{AB}$ احتمال این باشد که $A > B$. توجه کنید که $\overline{AB} + \overline{BA} = 1$.

اگر F و M اولین بازی را انجام دهند، P_{FM}، یعنی احتمال اینکه F برندهٔ مسابقات باشد، برابر است با

$$\overline{FM} \cdot \overline{FS} + \overline{FM} \cdot \overline{SF} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{FM} + \overline{MF} \cdot \overline{SM} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FM}$$

اگر F و S اولین بازی را انجام دهند، P_{FS}، یعنی احتمال اینکه F برندهٔ مسابقات باشد، برابر است با

$$\overline{FS} \cdot \overline{FM} + \overline{FS} \cdot \overline{MF} \cdot \overline{SM} \cdot \overline{FS} + \overline{SF} \cdot \overline{MS} \cdot \overline{FM} \cdot \overline{FS}$$

اگر M و S اولین بازی را انجام دهند، P_{MS}، یعنی احتمال اینکه F برندهٔ مسابقات باشد، برابر است با

$$\overline{SM} \cdot \overline{FS} \cdot \overline{FM} + \overline{MS} \cdot \overline{FM} \cdot \overline{FS} = (\overline{SM} + \overline{MS}) \cdot (\overline{FS} \cdot \overline{FM}) = \overline{FS} \cdot \overline{FM}$$

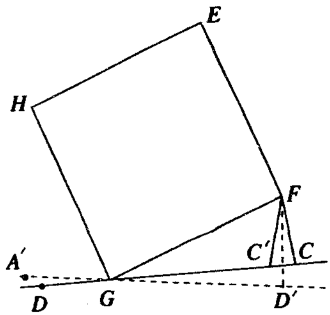
روشن است که $P_{FM} > P_{MS}$ و $P_{FS} > P_{MS}$.

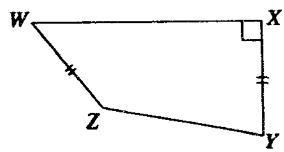
ملاحظه. از نظر شهودی روشن است که بهترین توصیه به F این است که (در اولین بازی) در برابر ضعیفترین بازیکن بازی کند.

مسألهٔ ۱۲. **راه‌حل اول.** این راه‌حل براساس لم سادهٔ زیر پی‌ریزی شده است:

فرض کنید $WXYZ$ چهارضلعی باشد و $\overline{WZ} = \overline{XY}$ و $\angle WXY = \frac{\pi}{2}$؛ در این صورت $\angle XYZ \leqslant \frac{\pi}{2}$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $WXYZ$ مستطیل باشد (شکل ۵۸ـالف).

این لم را به‌صورت زیر به‌کار می‌گیریم. $\triangle DGH$ را حول نقطهٔ H دوران می‌دهیم تا G بر E منطبق شود. (توجه کنید که اگر D بر روی D' بیفتد، آنگاه $\angle AHD' = \frac{\pi}{2}$.) با استفاده از لم در مورد چهارضلعی حاصل، $AHD'E$، به‌دست می‌آوریم $\alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. با ادامهٔ این روش به‌دست می‌آوریم $\beta \leqslant \frac{\pi}{2}$، $\gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$ و $\delta \leqslant \frac{\pi}{2}$؛ چون $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$، نتیجه می‌گیریم که $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$. در این‌صورت از قسمت دوم لم نتیجه می‌شود $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$. پس $ABCD$ مربع است.





شکل۵۸ دو موضع ممکن برای C نشان داده شده است

راه‌حل دوم. شکل را حول مرکز مربع در جهت پادساعتگرد (به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$) دوران دهید تا H بر روی G، G بر روی F، A بر روی A'، و D بر روی D' بیفتد (شکل۵۸ـب). چون

$$\angle FGC + \angle GFD' = \angle FGC + \angle HGD = \frac{\pi}{2}$$

FD' بر GC عمود است. چون $\overline{FD'} = \overline{GD} = \overline{FC}$، D' یا روی GC قرار دارد یا در آن طرف GC که F نیست، و بنابراین A' در همان طرف GD قرار دارد که F هست. پس $\angle EHA$، $\angle EHA = \angle HGA'$، بزرگتر از $\angle HGD$ نیست. به‌این ترتیب، با تکرار همین استدلال در مورد همهٔ رأسهای مربع، نتیجه می‌گیریم که

$$\angle EHA \leqslant \angle HGD \leqslant \angle GFC \leqslant \angle FEB \leqslant \angle EHA$$

و بنابراین همهٔ این زاویه‌ها برابرند. بنابراین

$$\angle HGD + \angle DHG = \angle EHA + \angle DHG = \frac{\pi}{2}$$

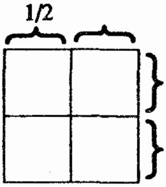
پس $\angle D = \frac{\pi}{2}$. اکنون نتیجه به‌آسانی حاصل می‌شود.

ملاحظه. در «Math. Mag. 43 (1970) 280-282» مسأله‌ای مشابه در مورد مثلثهای متساوی‌الاضلاع هست؛ در مورد nضلعی «Math. Mag. 44 (1971) 296» را ببینید.

مسألهٔ ۱۳. اگر عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ... و ۱۲۶ را به شش مجموعه تقسیم کنیم، بنابر اصل لانه‌کبوتری، یکی از این مجموعه‌ها حاوی دو (یا چند) تا از هفت عدد طبیعی انتخاب شده خواهد بود. پس مسأله این است که عددهای صحیح ۱، ۲، ۳، ... ، ۱۲۶ را به شش مجموعه طوری قسمت کنیم که در هر مجموعه بزرگترین عدد حداکثر دو برابر کوچکترین عدد باشد. روشن است که تقسیم زیر این ویژگی را دارد:

$$\{۱, ۲\}, \quad \{۳, ۴, ۵, ۶\}, \quad \{۷, ۸, \ldots, ۱۳, ۱۴\}, \quad \{۱۵, ۱۶, \ldots, ۲۹, ۳۰\},$$
$$\{۳۱, ۳۲, \ldots, ۶۱, ۶۲\}, \quad \{۶۳, ۶۴, \ldots, ۱۲۵, ۱۲۶\}$$

(مجموعه‌ای از هفت عدد طبیعی نابزرگتر از ۱۲۷ بیابید به‌طوری‌که هیچ دوتایی از آنها در نابرابریهای $۲ \leqslant \frac{y}{x} > ۱$ صدق نکنند.)



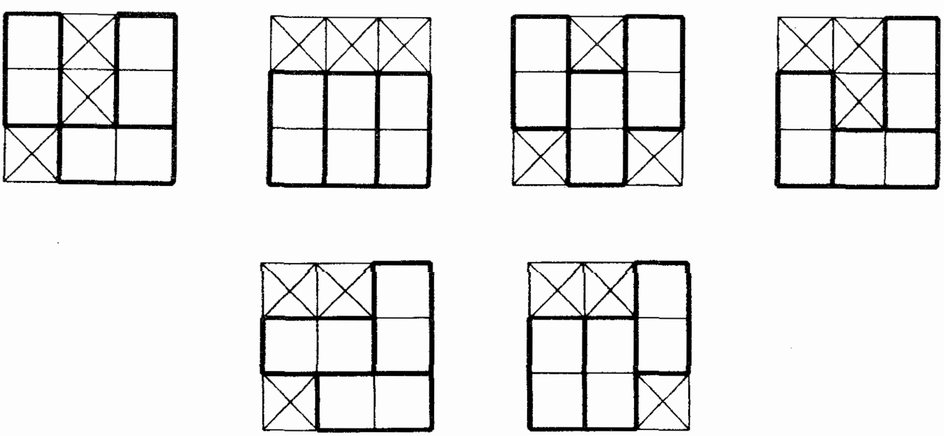
شکل ۵۹

مسألهٔ ۱۴. مربع را به چهار مربع به ضلع $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنید. بنابر اصل لانه کبوتری یکی از این چهار مربع حاوی دست‌کم دو تا از نقطه‌هاست و فاصلهٔ این دو نقطه بیشتر از قطر مربع، یعنی $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ نیست (شکل ۵۹).

مسألهٔ ۱۵. فرض کنید N نفر خود را نامزد انتخابات کرده باشند و مجموعهٔ قولهای آنها $S_۱$، $S_۲$، ... و S_N باشد. می‌دانیم که هیچ دوتایی از این مجموعه‌ها مساوی نیستند (چون هیچ دو نامزدی دقیقاً قولهای یکسان نداده‌اند). گذشته‌ازاین، $S_i \cap S_j \neq \varnothing$، $i \neq j$ (چون هر دو نامزدی دست‌کم یک قول مشترک داده‌اند). پس هیچ S_iای متمم هیچ S_jای نیست و بنابراین در فهرست $S_۱$، $S_۲$، ... و S_N حداکثر $۲^{n-۱} = \frac{۱}{۲}۲^n$ زیرمجموعه (از مجموعهٔ همهٔ قولها) وجود دارد؛ یعنی $N \leqslant ۲^{n-۱}$.

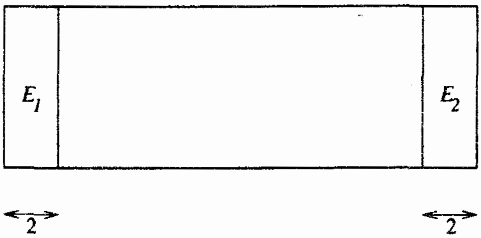
فرض کنید $p_۱$، $p_۲$، ... و p_n قولهای نامزدها باشند و فرض کنید A_iها، $i = ۱, ۲, \ldots, ۲^{n-۱}$، زیرمجموعه‌های $\{p_۲, p_۳, \ldots, p_n\}$ باشند. $۲^{n-۱}$ مجموعهٔ $\{p_۱\} \cup A_i$ نشان می‌دهند که امکان حضور $۲^{n-۱}$ نامزد انتخاباتی وجود دارد.

مسألهٔ ۱۶. صفحهٔ شطرنجی $(۲n + ۱) \times (۲m + ۱)$ای را که یک مربع سفید و دو مربع سیاه از آن حذف شده باشد، صفحهٔ شطرنجی محذوف می‌نامیم. ابتدا توجه می‌کنیم در حالتی که $m = n = ۱$ به‌آسانی می‌توانیم درستی حکم را با بررسی کردن همهٔ حالتها تحقیق کنیم. با توجه به تقارن فقط لازم است شش حالت را بررسی کنیم (شکل ۶۰ را ببینید).



شکل ۶۰

اکنون کار را به استقرا ادامه می‌دهیم. صفحهٔ شطرنجی محذوف $(۲m+۱)\times(۲n+۱)$ای به نام C مفروض است و می‌توانیم فرض کنیم که هر صفحهٔ شطرنجی محذوف کوچکتری مانند $(۲l+۱)\times(۲k+۱)$ را که در C باشد می‌توان با مستطیلهای ۲×۱ پوشاند. چون دست‌کم یکی از دو ضلع C طولی دست‌کم برابر ۵ دارد، C دو انتهای ناهمپوش مقابل هم به عرض ۲ دارد که آنها را $E_۱$ و $E_۲$ می‌نامیم (شکل ۶۱ را ببینید).

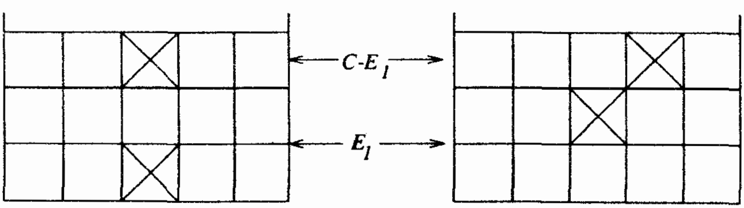


شکل ۶۱

روشن است که می‌توانیم انتهایی را انتخاب کنیم که حاوی حداکثر یکی از مربعهای حذف شدهٔ C باشد. فرض کنید این انتها $E_۱$ باشد و دو حالت زیر را در نظر بگیرید.

حالت ۱. $E_۱$ حاوی هیچ مربع محذوف C نیست. در این صورت $C-E_۱$ حاوی هر سه مربع حذف شده است. بنابر فرض استقرا، $C-E_۱$ را می‌توان با مستطیلهای ۲×۱ پوشاند. این پوشش همراه با پوشش بدیهی $E_۱$ پوشش مطلوب C را به‌دست می‌دهد.

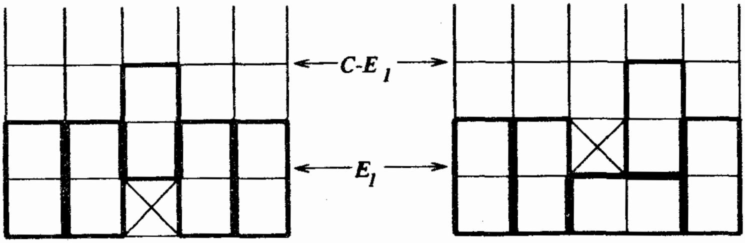
حالت ۲. $E_۱$ حاوی دقیقاً یک مربع محذوف C است. در این صورت، مربع حذف شده را با مربع وابسته‌ی همرنگ آن در $C-E_۱$ یکی می‌گیریم (شکل ۶۲ را ببینید).



شکل ۶۲

اکنون مربع وابسته را در $C-E_۱$ حذف می‌کنیم. بنابر فرض استقرا، پس از این حذف، $C-E_۱$ پوششی از مستطیلهای ۲×۱ دارد. اکنون می‌توان C را، که از آن مربعهای اصلی حذف شده است، با استفاده از پوششی که هم‌اکنون یافتیم همراه با طرح نشان داده شده در شکل ۶۳ پوشاند.

این روند فقط وقتی ناموفق است که مربع وابسته در $C-E_۱$ از ابتدا حذف شده باشد. این امر در مورد مربع سفید پیش نمی‌آید. در مورد مربع سیاه، نتیجه می‌شود که یک مربع سفید محذوف در $E_۲$ وجود دارد و کار را مانند قبل ادامه می‌دهیم.



شکل۶۳

مسألهٔ ۱۷. به‌ازای هر دو عدد طبیعی مانند m و n نتیجهٔ کلیتر $D(۹m+n) = D(n)$ را ثابت می‌کنیم. اگر

$$۹m + n = a_s ۱۰^s + a_{s-۱}۱۰^{s-۱} + \cdots + a_۱ ۱۰ + a_۰$$

آنگاه

$$۹m + n - \{a_s(۱۰^s - ۱) + a_{s-۱}(۱۰^{s-۱} - ۱) + \cdots + a_۱(۱۰ - ۱)\} = a_۰ + a_۱ + \cdots a_s$$

چون عدد بین دو ابرو بر ۹ بخش‌پذیر است، عددی مانند $m_۱ < m$ وجود دارد که به‌ازای آن،

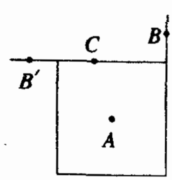
$$a_۰ + a_۱ + \cdots + a_s = ۹m_۱ + n$$

اگر این کار را تکرار کنیم عددهای صحیح $m > m_۱ > m_۲ > \cdots > m_k = ۰$ را می‌یابیم به‌طوری‌که

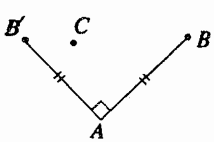
$$D(۹m+n) = D(۹m_۱+n) = D(۹m_۲+n) = \cdots = D(۹m_k+n) = D(n)$$

وقتی‌که $m = (۱۳۷)n$، $۹m+n = ۹(۱۳۷)n+n = (۱۲۳۴)n$، و درنتیجه $D((۱۲۳۴)n) = D(n)$.

مسألهٔ ۱۸. راه‌حل اول. برای اینکه ببینید مسأله چگونه حل می‌شود، مربعی به مرکز A در نظر بگیرید که B و C، مانند شکل ۶۴(الف)، روی دو ضلع مجاور (یا بر امتداد دو ضلع مجاور) آن قرار داشته باشند. دوران حول A به‌اندازهٔ ۹۰° در جهت پادساعتگرد، B را به نقطهٔ B'، روی ضلعی که از C می‌گذرد، می‌برد. پس برای حل کردن مسأله تصویر B را تحت دوران ۹۰° در جهت پادساعتگرد حول A می‌یابیم و آن را B' می‌نامیم. در این صورت یک ضلع مربع روی $B'C$ قرار دارد و بقیهٔ کار آسان است (شکل ۶۴ـب را ببینید)؛ جای B' طوری است که BA و $B'A$ طول یکسان دارند و بر یکدیگر عمودند. خط $B'C$ به‌آسانی قابل ترسیم است و یک ضلع مربع روی این خط قرار دارد.



(الف)



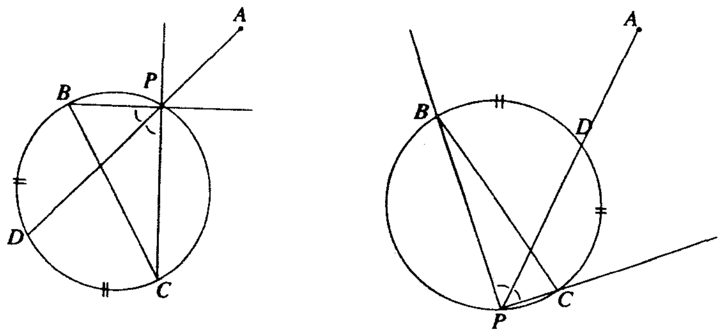
(ب)

شکل۶۴

اگر تصویر B را تحت دوران ۹۰° در جهت ساعتگرد حول A بیابیم و آن را B'' بنامیم، خط $B''C$ شامل یک ضلع مربعی با ویژگیهای مطلوب است و به‌این ترتیب مربع دیگری به دست می‌آید.

حالتهای خاصی نیز وجود دارد: اگر A نقطهٔ وسط پاره‌خط BC باشد، دقیقاً یک مربع (با قطر BC) وجود دارد؛ اگر $\angle BAC$ قائمه باشد و $\overline{AC} = \overline{AB}$، بی‌نهایت مربع وجود دارد. اگر $\angle BAC$ قائمه باشد و $\overline{AC} \neq \overline{AB}$، ترسیم مربعی با ویژگیهای مطلوب ممکن نیست و مسأله جواب ندارد.

راه‌حل دوم. به کمک این واقعیات که قطر دایره از هر نقطه روی دایره تحت زاویهٔ قائمه دیده می‌شود، و کمانهای مساوی در دایره از هر نقطه روی دایره تحت زاویه‌های مساوی دیده می‌شوند، می‌توان ابتدا یک رأس مربع و سپس قطر آن را رسم کرد. دایره‌ای به قطر BC رسم کنید. فرض کنید D وسط یکی از دو کمان BC باشد. فرض کنید P نقطهٔ تقاطع دیگر AD با دایره باشد. در این صورت PA بخشی از قطر مربع و BP و CP راستای دو ضلع مجاور مربع‌اند. شکل ۶۵ را ببینید.



شکل۶۵

چون $\angle BPC = \frac{\pi}{۲}$ و $\widehat{BD} = \widehat{CD}$، $\angle BPD = \angle CPD = \frac{\pi}{۴}$ و روش اثبات درستی ترسیم روشن است. باز هم می‌توان حالتهای خاصی را تمیز داد. اگر A نقطهٔ وسط BC باشد، هر یک از نقطه‌های P و D وسط یکی ازکمانهای BC خواهد بود و $BPCD$ تنها مربعی است که جواب است؛ اگر $\angle BAC = \frac{\pi}{۲}$ و $\overline{AC} \neq \overline{AB}$، آنگاه A روی دایره قرار دارد و مربع به یک نقطه تبدیل می‌شود (چون A هم رأس مربع است و هم مرکز آن). اما اگر $\angle BAC = \frac{\pi}{۲}$ و $\overline{AC} = \overline{AB}$، در صورتی که D را روی آن کمان BC که شامل A نیست بگیریم مربع به نقطه تبدیل می‌شود، ولی اگر D را منطبق بر A بگیریم می‌توانیم P را هر نقطه‌ای روی آن کمان BC که شامل A نیست بگیریم و بی‌نهایت مربع جواب مسأله خواهند بود.

مسألهٔ ۱۹. نابرابری داده شده هم‌ارز است با (دو طرف را به توان دو برسانید)

$$n^{\sqrt{n+۱}} > (n+۱)^{\sqrt{n}}$$

یا (دو طرف را به توان $\sqrt{n}$ برسانید)

$$n^{\sqrt{n+۱}\sqrt{n}} > (n+۱)^n$$

یا (دوطرف را بر n^n تقسیم کنید)

$$n^{\sqrt{n+۱}\sqrt{n}-n} > \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

و یا

$$n^{۱/\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}\right)} > \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

اما

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n = ۱+n\cdot\frac{۱}{n}+\frac{n(n-۱)}{۲\cdot ۱}\cdot\frac{۱}{n^۲}+\cdots+\frac{n(n-۱)\cdots ۱}{n(n-۱)\cdots ۱}\cdot\frac{۱}{n^n}$$

بنابراین

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n < ۱+۱+\frac{۱}{۲!}+\cdots+\frac{۱}{n!} < ۱+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots < ۳$$

درنتیجه اگر

$$n > ۳^{\left(۲+\frac{۱}{۲n}\right)} > ۳^{\left(۱+\sqrt{۱+\frac{۱}{n}}\right)}$$

برهان کامل خواهد شد. نابرابریهای بالا نیز به روشنی وقتی‌که $n \geqslant ۱۰$ برقرارند. سرانجام، می‌توان تحقیق کرد که ۷ کوچکترین مقدار قابل قبول از n است.

ملاحظه. با استفاده از حسابان (که مقدماتی محسوب نمی‌شود)، به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که $\frac{\log^۲ x}{x}$ و یا هم‌ارز آن $(\sqrt{x})^{\frac{۱}{\sqrt{x}}}$ به‌ازای $x > e^۲ = ۷/۳۸۹\ldots$ اکیداً نزولی است. راه‌حل مشابهی با استفاده از حسابان درکتاب د. س. میترینوویچ به نام نابرابریهای مقدماتی[1] داده شده است.

مسألهٔ ۲۰. راه‌حل اول. منعکس نقطه‌های Z و C را مانند شکل ۶۶ نسبت به OXY بیابید. چون $\angle DYZ' = \angle Z'ZD = \angle C'XD$، نقطه‌های C'، D، X و Y همگی بر یک دایره قرار دارند. چون $\angle C'XY = \frac{\pi}{۲}$، قطر این دایره $\overline{C'Y} = \overline{CY}$ است. بنابراین $\overline{CY} \geqslant \overline{XD}$ و برابری برقرار است اگر و فقط اگر D بر Y منطبق باشد (چون وقتی‌که $D \neq Y$، $\angle DYX$ اکیداً کوچکتر از $\frac{\pi}{۲}$ است). به‌این ترتیب حکم مسأله را ثابت کرده‌ایم. اما با اثبات اینکه $\frac{\overline{CY}}{\overline{DX}}$ تابعی صعودی از $\overline{XC}$ است مطلب کلیتری را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $\overline{OY} = ۱$، $\overline{OX} = a$ و $\overline{XC} = t$. در این صورت

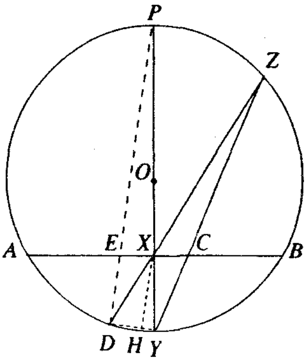
$$\overline{CY}^۲ = (۱-a)^۲ + t^۲$$

$$\overline{AX}^۲ = ۱ - a^۲ = \overline{DX}\cdot\overline{ZX}$$

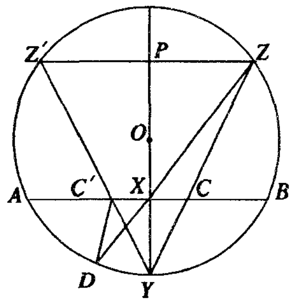
$$\overline{CY}\cdot\overline{CZ} = \left(\sqrt{۱-a^۲}+t\right)\left(\sqrt{۱-a^۲}-t\right) = ۱-a^۲-t^۲$$

---

1. D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, P. Nordhoff, Groningen, 1964, p. 60



شکل ۶۷



شکل ۶۶

از تشابه مثلثها نتیجه می‌گیریم

$$\overline{PZ} = t\left(۱ + \frac{\overline{CZ}}{\overline{CY}}\right), \qquad \overline{PX} = (۱ - a)\frac{\overline{CZ}}{\overline{CY}}$$

که در آنها P نقطهٔ تقاطع دو خط ZZ' و YX است. درضمن

$$\overline{ZX}^۲ = \overline{PZ}^۲ + \overline{PX}^۲$$

و یا

$$\frac{(۱ - a^۲)^۲}{\overline{DX}^۲} = \frac{۱}{\overline{CY}^۲}\left\{t^۲(\overline{CY} + \overline{CZ})^۲ + (۱ - a)^۲\overline{CZ}^۲\right\}$$

با ساده کردن این برابری به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\left(\frac{\overline{CY}}{\overline{DX}}\right)^۲ &= \frac{۱}{(۱ - a^۲)^۲}\{t^۲\overline{CY}^۲ + ۲t^۲\overline{CY}\cdot\overline{CZ} + (t^۲ + (۱ - a)^۲)\overline{CZ}^۲\} \\ &= \frac{۱}{(۱ - a^۲)^۲}\{t^۲(۱ - a)^۲ + t^۴ + ۲t^۲(۱ - a^۲ - t^۲) + \overline{CY}^۲ \cdot \overline{CZ}^۲\} \\ &= \frac{t^۲}{(۱ + a)^۲} + \frac{۱}{(۱ - a^۲)^۲}\{(۱ - a^۲ - t^۲)(۱ - a^۲ + t^۲) + t^۴\} \\ &= \frac{t^۲}{(۱ + a)^۲} + \frac{۱}{(۱ - a^۲)^۲}\{(۱ - a^۲)^۲ - t^۴ + t^۴\} = \frac{t^۲}{(۱ + a)^۲} + ۱\end{aligned}$$

اکنون به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که $\overline{CY}^۲ - \overline{XD}^۲$ و $\overline{CY} - \overline{XD}$ تابعهایی صعودی از t هستند.

راه‌حل دوم. (مارک کلایمن) DY را رسم و H را روی DY طوری انتخاب کنید که XH بر DY عمود باشد (شکل ۶۷ را ببینید). درنتیجه $\angle XDH = \angle ZDY = \frac{\pi}{۲} - \angle XYZ$، چون کمانهای روبه‌رو به‌این زاویه‌ها نیمدایره‌اند. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ XDH با مثلث قائم‌الزاویهٔ XCY متشابه است و بنابراین $\frac{\overline{XH}}{\overline{DX}} = \frac{\overline{XY}}{\overline{CY}}$. چون $\overline{XH} \leqslant \overline{XY}$، $\overline{DX} \leqslant \overline{CY}$.

مسألهٔ ۲۱. n مجموع

$$s_۱ = a_۱,\ s_۲ = a_۱ + a_۲,\ s_۳ = a_۱ + a_۲ + a_۳, \ldots,\ s_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید باقیماندهٔ تقسیم s_i بر n برابر r_i باشد، یعنی

$$s_i = q_i n + r_i, \quad ۰ \leqslant r_i \leqslant n - ۱, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

اگر به‌ازای iای $r_i = ۰$، آنگاه s_i ویژگیهای مطلوب را دارد. اگر به‌ازای $j = ۱, ۲, \ldots, n$، $r_j \neq ۰$، آنگاه n عدد صحیح $r_۱$، ... و r_n همگی عضو مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n - ۱\}$ هستند، درحالی که این مجموعه فقط $n - ۱$ عضو دارد. بنابر اصل لانه کبوتری، دو تا از r_jها باید برابر باشند، مثلاً $r_l = r_m$ و $m > l$؛ در این حالت،

$$a_{l+۱} + \cdots + a_m = s_m - s_l = (q_m - q_l)n$$

مسألهٔ ۲۲. سه نقطهٔ دلخواه مانند A، B و C در نظر بگیرید. فرض کنید AB بلندترین ضلع مثلث ABC باشد (این فرض خللی در کلیت استدلال ایجاد نمی‌کند). در این صورت دو نقطهٔ A و B را نمی‌توان به‌هم وصل کرد.

مسألهٔ ۲۳. **راه‌حل اول.** فرض کنید $m = \frac{p}{q}$ که در آن p و q عددهایی طبیعی‌اند که مقسوم‌علیه اول مشترکی ندارند. در این صورت

$$m + \frac{۱}{m} = \frac{p^۲ + q^۲}{pq}$$

درنتیجه، اگر $m + \frac{۱}{m}$ عددی صحیح باشد، p و q هر دو باید $p^۲ + q^۲$ را بشمارند. اما در این صورت p باید $q^۲$، و q باید $p^۲$ را بشمارد. چون p و q مقسوم علیه اول مشترکی ندارند، این به معنی آن است که $p = q = ۱$ و $m = ۱$.

راه‌حل دوم. کافی است ثابت کنیم که تنها عدد طبیعی مانند k که به‌ازای آن معادلهٔ $x + \frac{۱}{x} = k$ ریشهٔ گویای مثبت دارد ۲ است. ریشه‌های این معادله، یعنی معادلهٔ

$$x^۲ - kx + ۱ = ۰$$

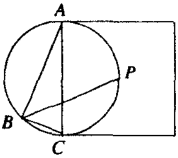
عبارت‌اند از

$$\frac{k + \sqrt{k^۲ - ۴}}{۲}, \qquad \frac{k - \sqrt{k^۲ - ۴}}{۲}$$

اگر این ریشه‌ها گویا باشند، $k^۲ - ۴$ باید مربع کامل باشد. اما اگر $k \geqslant ۳$،

$$(k - ۱)^۲ < k^۲ - ۴ < k^۲$$

پس اگر $k \geq ۳$، $k^۲ - ۴$ مربع کامل نیست؛ وقتی $k = ۱$، $k^۲ - ۴$ منفی است و مربع نیست. پس تنها مقدار ممکن k، ۲ است.



شکل ۶۸

مسألهٔ ۲۴. چون $\angle APC$ و $\angle ABC$ هر دو قائمه‌اند، دایرهٔ به قطر AC از هر دو نقطهٔ B و P می‌گذرد (شکل ۶۸ را ببینید). چون در این دایره دو وتر AP و PC برابرند، از نقطهٔ B روی دایره به یک زاویه دیده می‌شوند و درنتیجه $\angle ABP = \angle CBP$.

ملاحظه. به رابطهٔ این راه‌حل با راه‌حل دوم مسألهٔ ۱۸ توجه کنید.

مسألهٔ ۲۵. فرض کنید a فاصلهٔ بین $L_۱$ و $L_۳$ و b فاصلهٔ بین $L_۲$ و $L_۴$ باشد. روشن است که مجموع فاصله‌های هر نقطه از این چهار خط دست‌کم $a+b$ است. فرض کنید K عددی مثبت و L مکان‌هندسی نقاطی باشد که مجموع فاصله‌هایشان از چهار خط برابر K است.

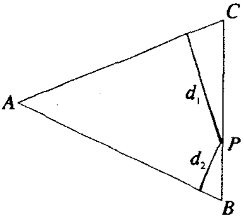
حالت ۱. $K < a+b$. در این صورت L تهی است.

حالت ۲. $K = a+b$. در این صورت L متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و نقاط درونی آن است.

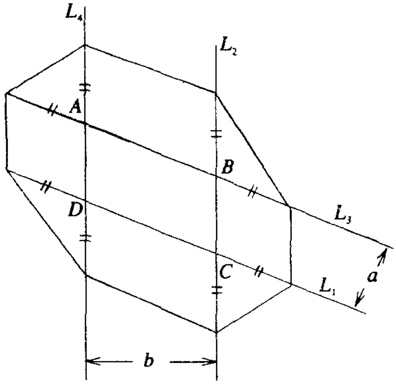
حالت ۳. $K > a+b$. در این صورت L هشت‌ضلعیی با تقارن مرکزی است (شکل ۶۹ را ببینید).

این مطالب نتیجهٔ فوری حکم زیرند: اگر P نقطه‌ای واقع بر ضلع BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد ($a = \overline{AB} = \overline{AC}$)، مجموع فاصله‌های P از AB و AC ثابت است. زیرا اگر این فاصله‌ها را $d_۱$ و $d_۲$ بنامیم (شکل ۷۰ را ببینید)، مساحت $\triangle ABC$ برابر می‌شود با

$$\frac{۱}{۲}ad_۱ + \frac{۱}{۲}ad_۲ = \frac{۱}{۲}a(d_۱ + d_۲)$$



شکل ۷۰



شکل ۶۹

ملاحظه. این حالت را نیز باید در نظر گرفت که هر چهار خط با هم موازی باشند. در این حالت، فرض کنید c مجموع فاصلهٔ دو خط داخلی و فاصلهٔ دو خط خارجی باشد. اگر $K < c$، L تهی است. اگر $K = c$، L ناحیه‌ای بین دو خط و خود این دو خط است. اگر $K > c$، L مرکب است از دو خط راست موازی هم که هر یک از آنها در یک طرف دو خط داخلی قرار دارد.

مسألهٔ ۲۶. دو تا از نقطه‌ها، مثلاً A و B، را طوری انتخاب کنید که سه نقطهٔ دیگر (که آنها را $P_۱$، $P_۲$ و $P_۳$ می‌نامیم) در یک طرف خط AB واقع باشند. (چگونه این کار را انجام می‌دهید؟) اندازه‌های $\angle AP_۱B$، $\angle AP_۲B$ و $\angle AP_۳B$ متمایزند؛ چون اگر دوتا از این زاویه‌ها، مثلاً $\angle AP_۱B$ و $\angle AP_۲B$، برابر باشند، نقطه‌های A، B، $P_۱$ و $P_۲$ بر روی یک دایره قرار می‌گیرند.

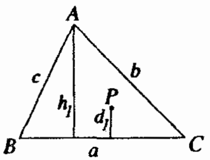
می‌توانیم بدون کاستن از کلیت استدلال فرض کنیم

$$\angle AP_1B < \angle AP_2B < \angle AP_3B$$

دایره‌ای را که از A ، B و P_2 می‌گذرد در نظر بگیرید. P_3 درون این دایره و P_1 خارج از آن قرار دارد. (این مسأله را به حکمی در فضای سه‌بعدی تعمیم دهید.)

یادداشت. نگاه کنید به

R. Honsberger, *Mathematical Morsels*, MAA, Problem 23, p. 48.



شکل ۷۱

مسألهٔ ۲۷. فرض کنید طول ضلعهای BC ، CA و AB به‌ترتیب a ، b و c باشد (شکل ۷۱ را ببینید). در این صورت

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch_3 = \frac{1}{2}d_1a + \frac{1}{2}d_2b + \frac{1}{2}d_3c$$

چون هر یک از این چهار عبارت برابر مساحت مثلث ABC است. بنابراین، اگر این مساحت را $\triangle$ بنامیم،

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} = \frac{ad_1}{ah_1} + \frac{bd_2}{bh_2} + \frac{cd_3}{ch_3} = \frac{ad_1}{2\triangle} + \frac{bd_2}{2\triangle} + \frac{cd_3}{2\triangle}$$
$$= \frac{ad_1 + bd_2 + cd_3}{2\triangle} = \frac{2\triangle}{2\triangle} = 1$$

یادداشت. برای دیدن تعمیمی از این مسأله نگاه کنید به

M. Klamkin, *Crux Mathematicorum* 13 (1987) 274.

مسألهٔ ۲۸. توجه کنید که محل ملاقات باید روی خط شامل خانه‌ها جایی بین اولین و آخرین خانه واقع باشد، چون هر نقطهٔ این خط که بین اولین و آخرین خانه نیست، مجموع فاصله‌هایش از خانه‌ها بیشتر از مجموع فاصلهٔ خانه‌ها از اولین خانه یا از آخرین خانه است (بسته به اینکه نقطهٔ مفروض به اولین خانه نزدیکتر باشد یا به آخرین خانه). حال توجه کنید که هر نقطه‌ای بین اولین و آخرین خانه مجموع فاصله‌هایش از این دو خانه مقدار ثابتی است. پس می‌توانیم این دو خانه را در نظر نگیریم و نقطه‌ای را بیابیم که مجموع فاصله‌هایش از بقیهٔ خانه‌ها مینیمم باشد. با تکرار همین نحوهٔ استدلال نتیجه می‌گیریم که محل ملاقات باید نقطه‌ای بین دومین خانه و خانهٔ یکی مانده به آخر باشد، باید نقطه‌ای بین سومین خانه و خانهٔ دوتا مانده به آخر باشد، و غیره. پس اگر n زوج باشد، پسرها باید در نقطهٔ دلخواهی بین دو خانهٔ وسط قرار بگذارند و اگر n فرد باشد، باید در خانهٔ وسط قرار بگذارند.

برای این مسأله راه‌حل «تحلیلی» نیز می‌توان آورد. فرض کنید مختصات خانه‌ها روی محور مختصات a_1 ، a_2 ، $\cdots$ و a_n باشد و

$$0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$

و فرض کنید مختص نقطهٔ P که باید در آن ملاقات کنند x باشد. در این صورت کلّ مسافتی که پسرها باید برای رسیدن به محل ملاقات بپیمایند برابر است با

$$D(x) = |x - a_{۱}| + |x - a_{۲}| + \cdots + |x - a_{n}|$$

اگر n زوج باشد، مثلاً $n = ۲m$، آنگاه

$$D = \sum_{i=۱}^{m} \left(|x - a_{i}| + |a_{۲m+۱-i} - x|\right)$$

و بنابر نابرابری مثلثی،

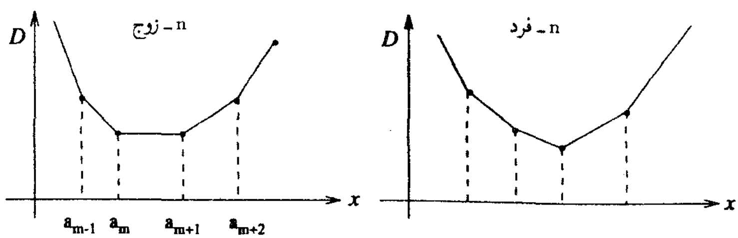
$$D \geqslant \sum_{i=۱}^{m} \left|x - a_{i} + a_{۲m+۱-i} - x\right| = \sum_{i=۱}^{m} \left(a_{۲m+۱-i} - a_{i}\right)$$
$$= a_{m+۱} + \cdots + a_{۲m} - \left(a_{۱} + \cdots + a_{m}\right)$$

و برابری وقتی برقرار است که $a_{m} \leqslant x \leqslant a_{m+۱}$.
اگر n فرد باشد، مثلاً $n = ۲m + ۱$، آنگاه

$$D = \sum_{i=۱}^{m} \left(\left|x - a_{i}\right| + \left|a_{۲m+۲-i} - x\right|\right) + \left|x - a_{m+۱}\right|$$
$$\geqslant \sum_{i=۱}^{m} \left|x - a_{i} + a_{۲m+۲-i} - x\right| + \left|x - a_{m+۱}\right|$$
$$= \sum_{i=۱}^{m} \left|a_{۲m+۲-i} - a_{i}\right| + \left|x - a_{m+۱}\right| = \sum_{i=۱}^{m} \left(a_{۲m+۲-i} - a_{i}\right) + \left|x - a_{m+۱}\right|$$
$$\geqslant a_{m+۲} + \cdots + a_{۲m+۱} - \left(a_{۱} + \cdots + a_{n}\right)$$

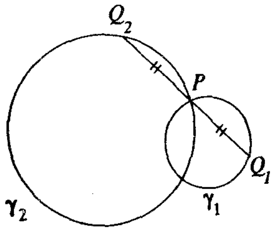
و برابری وقتی برقرار است که $x = a_{m+۱}$.

اگر نمودار $D(x)$ را برحسب x، $۰ \leqslant x \leqslant a_{n}$، رسم کنیم، یکی از دو چندضلعی محدب و بی‌کران شکل ۷۲ به‌دست می‌آید.



شکل۷۲

مسألهٔ ۲۹. فرض کنید نتیجهٔ مطلوب شکلی باشد که در شکل ۷۳ نشان داده شده است. در این شکل هر یک از دو نقطهٔ $Q_۱$ و $Q_۲$ بر اثر دوران ۱۸۰° به مرکز P به نقطهٔ دیگر تبدیل می‌شود. پس $Q_۱$ روی $\gamma_۱$ و همچنین روی تصویر $\gamma_۲$ تحت چنین دورانی واقع است، یعنی $Q_۱$ هم روی $\gamma_۱$ واقع است و هم روی دایره‌ای برابر با $\gamma_۲$ که از P می‌گذرد و بر $\gamma_۲$ مماس است.



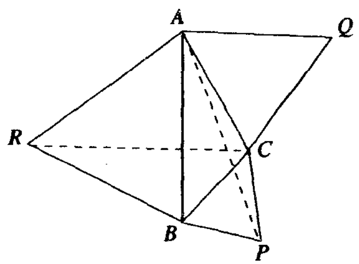
شکل ۷۳

یادداشت. خطی رسم کنید که از P بگذرد و نسبت طول وترهایی که در دو دایره ایجاد می‌کند مقدار معلومی باشد.

برای مطالعهٔ مجموعه‌ای از ترسیمها با استفاده از دوران نیمدور نگاه کنید به[۱]

I. M. Yaglom, *Geometric Transformations I*, New Math. Library 8, MAA, pp. 21-40.

مسألهٔ ۳۰. دوران ۶۰° در جهت پادساعتگرد به مرکز B، نقطهٔ P را به C و نقطهٔ A را به R می‌برد (شکل ۷۴ را ببینید)؛ بنابراین $\overline{PA} = \overline{CR}$. به‌همین ترتیب $\overline{CR} = \overline{BQ}$.



شکل۷۴

یادداشت. برای مطالعهٔ ویژگیهای جالب دیگری از این آرایش نگاه کنید به

R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, NY, 1960, pp. 218-222.

مسألهٔ ۳۱. هر جملهٔ مجموع مورد نظر را به‌شکل کسری بنویسید که مخرجش کوچکترین مقسوم علیه مشترک عددهای ۲ ، ۳ ، $\cdots$ و n است. صورت همهٔ این کسرها غیر از کسری که مخرجش در ابتدا بزرگترین توان ۲ (که بزرگتر از n نیست) بوده است زوج است. بنابراین مجموع صورتها فرد است، در حالی که مخرج مشترک زوج است.

ملاحظه. می‌توان ثابت کرد که وقتی $a, d > ۰$،

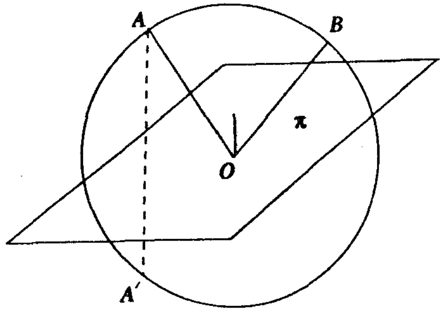
$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{a+d} + \cdots + \frac{۱}{a+(n-۱)d}$$

---

۱. ترجمهٔ این کتاب را مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است. [م.]

(مجموع عکس جمله‌های تصاعدی حسابی) هیچ‌گاه عددی صحیح نیست. برای اثبات این ادعا احتیاج به اصل برتراند است: همیشه عدد اولی بین m و $۲m$ وجود دارد.

مسألهٔ ۳۲. فرض کنید A و B دو نقطهٔ انتهایی کمان باشند. صفحهٔ π را که از مرکز O می‌گذرد و بر نیمساز $\angle AOB$ عمود است در نظر بگیرید. (شکل ۷۵ را ببینید.) ثابت می‌کنیم $\widehat{AB}$ باید روی نیمکره‌ای واقع باشد که صفحه π ایجاد کرده و شامل A و B است.



شکل ۷۵

فرض کنید A' قرینهٔ A نسبت به صفحه π باشد. توجه کنید که $\overline{A'B} = ۲$، چون A' ، O و B همخط‌اند. همچنین توجه کنید که اگر X نقطه‌ای واقع بر π باشد، $\overline{AX} = \overline{A'X}$. امکان ندارد کمانی مانند $\widehat{AB}$ به طول کمتر از ۲ شامل نقطه‌ای از صفحهٔ π باشد، چون اگر $\widehat{AB}$ شامل نقطهٔ X از صفحه π باشد، آنگاه

$$\widehat{AX} + \widehat{XB} \geqslant \overline{AX} + \overline{XB} = \overline{A'X} + \overline{XB}$$

و بنابر نابرابری مثلثی،

$$\overline{A'X} + \overline{XB} \geqslant \overline{A'B}$$

به همین روش می‌توانیم ثابت کنیم که به‌طور کلی اگر دو نقطهٔ مرزی جسمی با تقارن مرکزی که طول کوتاهترین قطر مرکزی آن ۲ است با کمانی به طول کوچکتر از ۲ به‌یکدیگر وصل شوند، این کمان باید در نیمه‌ای از جسم واقع باشد که به سطح مقطعی که از مرکز تقارن می‌گذرد محدود است.

مسألهٔ ۳۳. راه‌حل اول. n را به‌شکل $۶m + r$، $۰ \leqslant r \leqslant ۵$، بنویسید و $\left[\frac{n}{۳}\right]$، $\left[\frac{n+۲}{۶}\right]$، $\left[\frac{n+۴}{۶}\right]$، $\left[\frac{n}{۲}\right]$ و $\left[\frac{n+۳}{۶}\right]$ را حساب کنید. این مقادیر در جدول ۱ نوشته شده‌اند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که در جدول (۱) در هر سطر مجموع سه درایهٔ اول با مجموع دو درایهٔ آخر برابر است.

راه‌حل دوم. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند r و عدد صحیح k، $k = ۰, ۱, ۲, \cdots, r-۱$، $\left[\frac{n+k}{r}\right]$ هم تعداد مضربهای مثبت r است که از $n+k$ بزرگتر نیستند و هم تعداد عددهای طبیعی است که از

جدول ۱

n	$\left[\frac{n}{۳}\right]$	$\left[\frac{n+۲}{۶}\right]$	$\left[\frac{n+۴}{۶}\right]$	$\left[\frac{n}{۲}\right]$	$\left[\frac{n+۳}{۶}\right]$
$۶m$	$۲m$	m	m	$۳m$	m
$۶m+۱$	$۲m$	m	m	$۳m$	m
$۶m+۲$	$۲m$	m	$m+۱$	$۳m+۱$	m
$۶m+۳$	$۲m+۱$	m	$m+۱$	$۳m+۱$	$m+۱$
$۶m+۴$	$۲m+۱$	$m+۱$	$m+۱$	$۳m+۲$	$m+۱$
$۶m+۵$	$۲m+۱$	$m+۱$	$m+۱$	$۳m+۲$	$m+۱$

n بزرگتر نیستند و به‌پیمانهٔ r همنهشت $r-k$ هستند. بنابراین $\left[\frac{n+۴}{۶}\right]+\left[\frac{n+۲}{۶}\right]+\left[\frac{n}{۳}\right]$ تعداد عددهای طبیعی است که از n بزرگتر نیستند و به‌پیمانهٔ ۶ همنهشت ۰، ۲، ۳ یا ۴ هستند، در حالی که $\left[\frac{n+۳}{۶}\right]+\left[\frac{n}{۲}\right]$ تعداد عددهای طبیعی است که از n بزرگتر نیستند و یا زوج‌اند یا به‌پیمانهٔ ۶ همنهشت ۳ هستند.

مسألهٔ ۳۴. کوچکترین عدد طبیعی و n رقمی $۱۰^{n-۱}$ و بزرگترین عدد طبیعی n رقمی $۱۰^{n}-۱$ است. بنابراین می‌خواهیم مجموع جمله‌های تصاعد حسابی زیر را به‌دست آوریم

$$۱۰^{n-۱},(۱۰^{n-۱}+۱),(۱۰^{n-۱}+۲),\cdots,(۱۰^{n}-۲),(۱۰^{n}-۱)$$

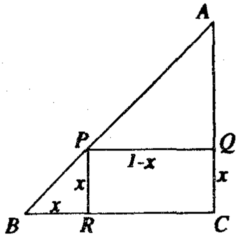
تعداد این جمله‌ها برابر است با

$$۱۰^{n}-۱-۱۰^{n-۱}+۱=۹\times ۱۰^{n-۱}$$

پس مجموع جمله‌های تصاعد برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{۹\times ۱۰^{n-۱}}{۲}(۱۰^{n-۱}+۱۰^{n}-۱)&=۴۵\times ۱۰^{n-۲}(۱۰^{n-۱}\times ۱۱-۱)\\&=۴۹۵\times ۱۰^{۲n-۳}-(۱۰۰-۵۵)۱۰^{n-۲}\\&=(۴۹۴+۱)۱۰^{۲n-۳}-۱۰^{n}+۵۵\times ۱۰^{n-۲}\\&=۴۹۴\times ۱۰^{۲n-۳}+۱۰^{۲n-۳}-۱۰^{n}+۵۵\times ۱۰^{n-۲}\\&=۴۹۴\times ۱۰^{۲n-۳}+(۱۰^{n-۳}-۱)۱۰^{n}+۵۵\times ۱۰^{n-۲}\\&=۴۹۴\times ۱۰^{۲n-۳}+\underbrace{۹۹\cdots۹}_{n-۳}\times ۱۰^{n}+۵۵\times ۱۰^{n-۲}\\&=۴۹۴\underbrace{۹۹\cdots۹}_{n-۳}۵۵\underbrace{۰۰\cdots۰}_{n-۲}\end{aligned}$$

پرسش. اگر $n=۲$، چه روی می‌دهد؟



شکل ۷۶

مسألهٔ ۳۵. **راه‌حل اول.** فرض کنید $x=\overline{BR}=\overline{RP}=\overline{QC}$ (شکل ۷۶ را ببینید)؛ در این صورت، $\text{۱}-x=\overline{RC}=\overline{PQ}=\overline{AQ}$. اگر $x\geqslant\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$، آنگاه

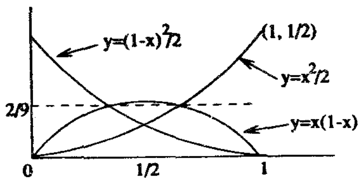
$$(\triangle BRP\ \text{مساحت})=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x^{\text{۲}}\geqslant\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\right)^{\text{۲}}=\frac{\text{۲}}{\text{۹}}$$

اگر $x\leqslant\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$، آنگاه $\text{۱}-x\geqslant\frac{\text{۲}}{\text{۳}}$ و

$$(\triangle AQP\ \text{مساحت})=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{۱}-x)^{\text{۲}}\geqslant\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\left(\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\right)^{\text{۲}}=\frac{\text{۲}}{\text{۹}}$$

اگر $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}>x>\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$، آنگاه $\frac{\text{۱}}{\text{۶}}>x-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}>-\frac{\text{۱}}{\text{۶}}$، $\frac{\text{۱}}{\text{۳۶}}>(x-\frac{\text{۱}}{\text{۲}})^{\text{۲}}$ و

$$(PQCR\ \text{مساحت مستطیل})=x(\text{۱}-x)=\frac{\text{۱}}{\text{۴}}-\left(x-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}}>\frac{\text{۱}}{\text{۴}}-\frac{\text{۱}}{\text{۳۶}}=\frac{\text{۲}}{\text{۹}}$$

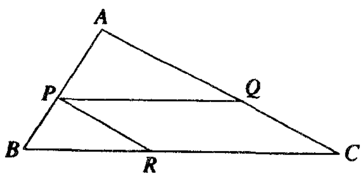


شکل ۷۷

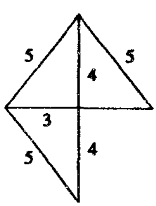
راه‌حل دوم. سه منحنی $y=\frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}$، $y=x(\text{۱}-x)$ و $y=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}(\text{۱}-x)^{\text{۲}}$ را رسم (شکل ۷۷) و توجه کنید که به‌ازای هر مقدار از x، بزرگترین مقدار y دست‌کم $\frac{\text{۲}}{\text{۹}}$ است.

ملاحظه. نتیجهٔ این مسأله در حالتی که متوازی‌الاضلاعی در مثلثی دلخواه محاط شده باشد نیز درست است (شکل ۷۸ را ببینید).

برهان. از تصویر موازی نتیجهٔ قبل استفاده کنید.



شکل۷۸ $PQ\parallel BC$ و $PR\parallel AC$



شکل ۷۹

مسألهٔ ۳۶. **راه‌حل اول.** نتیجهٔ اول به‌آسانی به‌دست می‌آید؛ کافی است دو مثلث قائم‌الزاویه با طول ضلعهای ۳، ۴ و ۵ را به طریق مختلف «پشت به پشت» قرار دهیم. شکل ۷۹ را ببینید.

اگر همین طرح را در مورد مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول ضلعهای ۵، ۱۲ و ۱۳ به‌کار بریم معلوم می‌شود که مساحت مثلثی با طول ضلعهای ۱۰، ۱۳ و ۱۳ با مساحت مثلثی با طول ضلعهای ۲۴، ۱۳ و ۱۳ برابر است. در واقع از هر مثلث قائم‌الزاویه با طول ضلعهای a، b و c ($c^{\text{۲}}=a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}$) دو مثلث با مساحتهای برابر و طول ضلعهای $\text{۲}a$، c و c و $\text{۲}b$، c و c به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. فرض کنید طول ضلعهای دو مثلث متساوی‌الساقین (u,u,v) و (x,x,y) باشند. بنابر رابطهٔ هرون شرط برابر بودن مساحتها چنین است

$$v^2(2u+v)(2u-v)=y^2(2x+y)(2x-y)$$

و یا

$$4u^2v^2+y^4=4x^2y^2+v^4$$

این معادله را با افزودن شرط اضافی $x=u$ می‌توان حل کرد. در این صورت $4u^2=4x^2=v^2+y^2$ (با فرض اینکه $v^2-y^2\neq 0$). بنابراین $(v,y,2x)$ سه‌تایی فیثاغورسی است. چند جفت جواب، $\{(u,u,v),(x,x,y)\}$، برای این معادله عبارت‌اند از

$$\{(5,5,6),(5,5,8)\},\{(13,13,10),(13,13,24)\},\{(25,25,14),(25,25,48)\}$$

آیا با شرط $x\neq u$ نیز می‌توان جوابهایی یافت؟

مسألهٔ ۳۷. ابتدا توجه کنید که (شکل ۸۰ را ببینید)

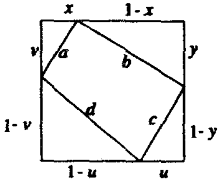
$$a^2+b^2+c^2+d^2=x^2+(1-x)^2+y^2+(1-y)^2+u^2+(1-u)^2+v^2+(1-v)^2$$

اکنون توجه کنید که

$$x^2+(1-x)^2=2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$$

چون $0\leqslant x\leqslant 1$، به‌آسانی نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}\leqslant x^2+(1-x)^2\leqslant 1$$



شکل ۸۰

و همین‌طور اگر به‌جای x بنویسیم y ، u و یا v. اگر این چهار نابرابری را با یکدیگر جمع کنیم نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

جالب است توجه کنید که همچنین،

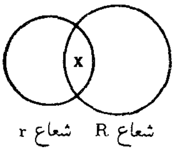
$$2\sqrt{2}\leqslant a+b+c+d\leqslant 4$$

یادداشت. به‌طورکلی ثابت کنید اگر به‌جای مربع، مستطیلی $m\times n$ در نظر بگیریم، آنگاه

$$m^2+n^2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 2(m^2+n^2)$$

مسألهٔ ۳۸. اگر مساحت بخش مشترک دو دایره را x بگیریم، مساحت بخشهای غیرمشترک آنها πR^2-x و πr^2-x است (شکل ۸۱ را ببینید) و بنابراین مقدار مورد نظر برابر است با

$$(\pi R^2-x)-(\pi r^2-x)=\pi(R^2-r^2)$$



شکل ۸۱

مسألهٔ ۳۹. مجموع مرتب

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n, \qquad a_i \geqslant 1$$

را می‌توان با n تا ۱ و تعدادی خط مایل (/) به‌صورت زیر نمایش داد

$$\underbrace{11\cdots1}_{a_1}/\underbrace{11\cdots1}_{a_2}/\underbrace{11\cdots1}_{a_3}/\cdots/\underbrace{11\cdots1}_{a_k}$$

برای یافتن تمامی چنین نمایشهایی (به‌ازای kهایی که $1 \leqslant k \leqslant n$)، n تا ۱ را در ردیفی دنبال هم می‌نویسیم؛ سپس در مورد هر یک از n فاصلهٔ بین دو ۱ متوالی دو انتخاب پیش‌رو داریم: یا خط مایلی در این فاصله قرار دهیم یا قرار ندهیم. این کار را می‌توان به 2^{n-1} طریق انجام داد، و در نتیجه تعداد نمایشهای مورد نظر 2^{n-1} است.

مسألهٔ ۴۰. تیمهای T_1، T_2، $\cdots$ و T_k، $\frac{1}{2}k(k-1)$ بازی بین خود و $k(n-k)$ بازی در برابر تیمهای T_{k+1}، T_{k+2}، $\cdots$ و T_n انجام می‌دهند. حال بیشترین مقدار مجموع $s_1 + s_2 + \cdots + s_k$ وقتی به‌دست می‌آید که در همهٔ بازیهای اخیر تیمهای T_1، T_2، $\cdots$ و T_k برنده شوند. بنابراین

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_k \leqslant \frac{1}{2}k(k-1) + k(n-k) = nk - \frac{1}{2}k(k+1)$$

مسألهٔ ۴۱. یکی از قانونها این است

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

اثبات این برابری با استفاده از استقرا آسان است و به خواننده واگذار می‌شود.

در برهان زیر برای برابری بیان شده، فرمول مجموع مربعهای دانسته فرض می‌شود:

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \qquad k = 1, 2, 3, \cdots$$

از این برابری نتیجه می‌گیریم

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}$$

و

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$

پس (اگر دو طرف این برابریها را از هم کم کنیم)

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{(2n-1)(2n)(2n+1)}{6}$$

مسألهٔ ۴۲. با حل کردن معادلهٔ $x = \frac{x^2+1}{198}$ یا $x^2 - 198x + 1 = 0$ ریشه‌های زیر را به‌دست

می‌آوریم

$$\alpha = ۹۹ + \sqrt{۹۹^۲ - ۱} = ۹۹ + ۷۰\sqrt{۲}, \qquad \beta = ۹۹ - \sqrt{۹۹^۲ - ۱} = ۹۹ - ۷۰\sqrt{۲}$$

و در ضمن

$$\alpha + \beta = ۱۹۸, \qquad \alpha\beta = ۱$$

بنابراین

$$\alpha = \frac{\alpha^۲ + ۱}{۱۹۸} > \frac{۱}{۱۹۸} \quad , \qquad \beta = \frac{\beta^۲ + ۱}{۱۹۸} > \frac{۱}{۱۹۸}$$

$$\alpha = ۱۹۸ - \beta < ۱۹۸ - \frac{۱}{۱۹۸} = ۱۹۷,۹۹۴۹۴۹۴۹\cdots$$

$$\beta = ۱۹۸ - \alpha < ۱۹۸ - \frac{۱}{۱۹۸} = ۱۹۷,۹۹۴۹۴۹۴۹\cdots$$

و

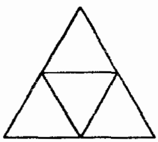
$$\sqrt{۲} = \frac{\alpha - ۹۹}{۷۰} < \frac{۱۹۷,۹۹\overline{۴۹} - ۹۹}{۷۰} = ۱,۴۱\overline{۴۲۱۳۵۶}$$

سرانجام

$$(۱,۴۱۴۲۱۳۵۶)^۲ = ۱,۹۹۹۹۹۹۹۹۳۲\cdots < ۲$$

بنابراین

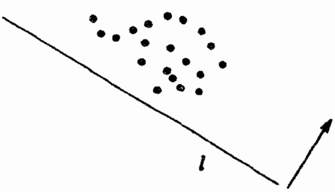
$$\sqrt{۲} > ۱,۴۱۴۲۱۳۵۶$$



شکل ۸۲

مسألهٔ ۴۳. مثلث را به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ افراز کنید (شکل ۸۲). بنابر اصل لانه کبوتری، یکی از این چهار مثلث باید حاوی ۲ (یا بیش از ۲) تا از ۵ نقطه باشد و فاصلهٔ این دو نقطه از یکدیگر کمتر از ۱ است.

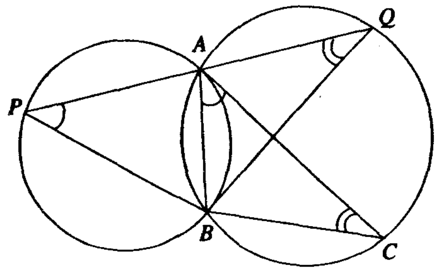
مسألهٔ ۴۴. بله. همهٔ خطهایی را که نقاط مفروض را به‌یکدیگر وصل می‌کنند در نظر بگیرید (تعداد این خطها متناهی است). خط l را طوری رسم کنید که با هیچ‌یک از این خطها موازی نباشد و همهٔ نقطه‌های مفروض در یک طرف آن باشند. سپس خط l را در امتداد جهت عمود بر این خط حرکت دهید. (شکل ۸۳ را ببینید). خط l یکی یکی از نقطه‌های مفروض می‌گذرد. وقتی از نصف نقطه‌ها گذشتید دست از این کار بردارید.



شکل ۸۳

مسألهٔ ۴۵. راه‌حل اول. وقتی پاره‌خط PQ با شرایط بیان شده تغییر می‌کند، $\angle BPA$ و $\angle AQB$ ثابت می‌مانند، چون زاویه‌های محاطی روبه‌رو به کمان AB در دو دایره هستند (شکل ۸۴ را ببینید). پس سینوس این دو زاویه مقداری ثابت است. اگر از قانون سینوسها در $\triangle BOQ$ استفاده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\sin Q}{\sin P} = \text{(مقداری ثابت)}$$



شکل ۸۴

راه‌حل دوم. مضمون این راه‌حل براساس توجه به حالتی حدی است که در آن P بر A منطبق و PQ بر دایرهٔ PAB مماس باشد. فرض کنید C روی دایرهٔ BAQ چنان انتخاب شده است که AC بر دایرهٔ PAB مماس باشد (شکل ۸۴). در این صورت $\angle APB = \angle CAB$ و $\angle AQB = \angle ACB$. بنابراین $\triangle BPQ$ با $\triangle BAC$ متشابه است و درنتیجه

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \text{(مقداری ثابت)}$$

مسألهٔ ۴۶. الف) اگر n زوج باشد،

$$f(n) = ۰ + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + \left(\frac{n}{۲} - ۱\right) + ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + \frac{n}{۲}$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{n}{۲} - ۱\right)\frac{n}{۲} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{n}{۲}\right)\left(\frac{n}{۲} + ۱\right) = \frac{n^۲}{۴}$$

اگر n فرد باشد،

$$f(n) = ۰ + ۱ + ۲ + \cdots + \frac{n-۱}{۲} + ۱ + ۲ + \cdots + \frac{n-۱}{۲}$$
$$= ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{n-۱}{۲}\right)\left(\frac{n-۱}{۲} + ۱\right) = \frac{n^۲ - ۱}{۴}$$

پس

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n^۲}{۴} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{n^۲ - ۱}{۴} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

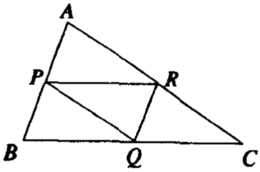
ب) توجه کنید که تفاضل $s+t$ و $s-t$ برابر $۲t$ و عددی زوج است. پس $s+t$ و $s-t$ هر دو یا زوج‌اند یا فرد. اگر هر دو زوج باشند،

$$f(s+t) - f(s-t) = \frac{(s+t)^۲}{۴} - \frac{(s-t)^۲}{۴} = st$$

و اگر هر دو فرد باشند،

$$f(s+t) - f(s-t) = \frac{(s+t)^۲ - ۱}{۴} - \frac{(s-t)^۲ - ۱}{۴} = st$$

مسألهٔ ۴۷. از P خطی موازی QR، از Q خطی موازی PR و از R خطی موازی PQ رسم کنید. مثلث مطلوب از تلاقی این سه خط حاصل می‌شود. (شکل ۸۵ را ببینید).



شکل ۸۵

مسألهٔ ۴۸. به‌طورکلی، اگر n عددی طبیعی و فرد باشد، $a+b$ مقسوم‌علیهی از $a^n + b^n$ است. پس $۴^{۹۹} + ۱^{۹۹}$ و نیز $۳^{۹۹} + ۲^{۹۹}$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۴۹. **راه‌حل اول.** هر عدد صحیح به یکی از شکلهای $۴n$، $۴n+۱$، $۴n+۲$ و $۴n+۳$ است. درنتیجه باقیماندهٔ تقسیم مربع هر عدد صحیح بر ۸ یکی از عددهای ۰، ۱ و یا ۴ است. پس $a^۲ + b^۲$ را نمی‌توان به‌شکل $۸c+۶$ نوشت.

راه‌حل دوم. چون

$$a^۲ + b^۲ = ۲(۴c+۳)$$

پس $a^۲ + b^۲$ زوج است، درنتیجه a و b باید هر دو یا زوج باشند یا فرد. در حالت اول، $a = ۲m$، $b = ۲n$، و

$$۴m^۲ + ۴n^۲ = ۲(۴c+۳)$$

یا

$$۲(m^۲ + n^۲) = ۴c + ۳$$

که ناممکن است، چون طرف چپ این برابری زوج و طرف راست آن فرد است. در حالت دوم، $a = ۲m+۱$، $b = ۲n+۱$، و

$$(۲m+۱)^۲ + (۲n+۱)^۲ = ۲(۴c+۳)$$

یا

$$m(m+۱) + n(n+۱) = ۲c + ۱$$

که باز هم ناممکن است، چون طرف چپ این برابری زوج و طرف راست آن فرد است.

مسألهٔ ۵۰. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند که ویژگی مطلوب را دارند. امکان ندارد ۱ و ۲ در یک مجموعه باشند، چون در غیر این صورت نمی‌توان مجموع آنها را از اعضای مجموعهٔ دیگر به‌دست آورد؛ به‌همین دلیل امکان ندارد ۱ و ۳ نیز در یک مجموعه باشند. پس می‌توانیم فرض کنیم $۱ \in A$، $۲ \in B$ و $۳ \in B$. در این صورت برای اینکه بتوان مجموع $۳ + ۲$ را از اعضای مجموعهٔ A به‌دست آورد، باید ۴ متعلق به A باشد. پس $\{۱, ۴\} \subset A$ و $\{۲, ۳\} \subset B$.

از استدلال مشابهی معلوم می‌شود که ۵ و ۸ در یک مجموعه‌اند و ۶ و ۷ در مجموعهٔ دیگر. پس تقسیمهای ممکن فقط اینهاست

یک) $\{۱, ۴, ۵, ۸\}$ و $\{۲, ۳, ۶, ۷\}$؛
دو) $\{۱, ۴, ۶, ۷\}$ و $\{۲, ۳, ۵, ۸\}$.

در اولی مجموعهای هر دو تا از اعضای دو مجموعه یکسان نیستند. پس تنها پاسخ مسأله تقسیم دوم است.

(مسألهٔ مشابهی در مورد اولین شانزده عدد طبیعی بیان و آن‌را حل کنید.)

ملاحظه. در مورد دو مجموعهٔ (دو)، مجموعه همهٔ اعضای هر مجموعه برابر مجموع اعضای مجموعهٔ دیگر، و مجموع مربع اعضای هر مجموعه نیز برابر مجموع مربع اعضای مجموعهٔ دیگر است. این نتیجه را می‌توان برای اولین ۲^n عدد طبیعی تعمیم داد.

مسألهٔ ۵۱. می‌دانیم که $x > ۰$، $y > ۰$، $x - ۲y > ۰$ و $۲\log(x - ۲y) = \log x + \log y$؛ پس

$$\log(x - ۲y)^۲ = \log xy$$
$$(x - ۲y)^۲ = xy$$
$$\left(\frac{x}{y} - ۲\right)^۲ = \frac{x}{y}$$
$$\left(\frac{x}{y}\right)^۲ - ۵\left(\frac{x}{y}\right) + ۴ = ۰$$
$$\left(\frac{x}{y} - ۴\right)\left(\frac{x}{y} - ۱\right) = ۰$$

پس یا $\frac{x}{y} = ۴$ و یا $\frac{x}{y} = ۱$. ولی جواب دوم قابل قبول نیست، چون در این صورت $x - ۲y$ منفی خواهد بود. پس $\frac{x}{y} = ۴$.

مسألهٔ ۵۲. راه‌حل اول. ابتدا توجه کنید که

$$۲ = f(۲) = f(۱ \times ۲) = f(۱)f(۲) = ۲f(۱)$$

پس $f(۱) = ۱$. همچنین

$$f(۲^۲) = f(۲ \times ۲) = f(۲)f(۲) = ۲ \times ۲ = ۲^۲$$
$$f(۲^۳) = f(۲ \times ۲^۲) = f(۲)f(۲^۲) = ۲ \times ۲^۲ = ۲^۳$$

و به‌طورکلی به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی مانند k، $f(۲^k) = ۲^k$. اکنون توانهای متوالی ۲ و عددهای صحیح بین آنها را در نظر بگیرید:

$$۲^k < ۲^k + ۱ < ۲^k + ۲ < \cdots < ۲^k + ۲^k - ۱ = ۲^{k+۱} - ۱ < ۲^{k+۱}$$

در این صورت

$$۲^k < f(۲^k + ۱) < f(۲^k + ۲) < \cdots < f(۲^{k+۱} - ۱) < ۲^{k+۱}$$

پس بین ۲^k و $۲^{k+۱}$، $۲^k - ۱$ عدد صحیح متمایز $f(۲^k + j)$، $j = ۱, ۲, \ldots, ۲^k - ۱$، وجود دارد. چون بین ۲^k و $۲^{k+۱}$ دقیقاً $۲^{k+۱} - ۲^k - ۱ = ۲^k - ۱$ عدد صحیح وجود دارد، نتیجه می‌شود که

$$f(۲^k + j) = ۲^k + j, \qquad j = ۱, ۲, \ldots$$

راه‌حل دوم. مانند قبل توجه می‌کنیم به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $f(۲^k) = ۲^k$. از ویژگی (۵) نتیجه می‌شود $f(m + ۱) > f(m)$؛ یعنی $f(m + ۱) \geqslant f(m) + ۱$. پس $f(m) \geqslant m$ و

$f(m+k) \geqslant f(m)+k$. می‌ماند اینکه ثابت کنیم nای وجود ندارد که $f(n) > n$. فرض کنید به‌ازای عددی صحیح مانند n، $f(n) > n$. در این صورت $۲^n > n$ و

$$۲^n = f(۲^n) = f(n + ۲^n - n) \geqslant f(n) + ۲^n - n > n + ۲^n - n = ۲^n$$

که ممکن نیست.

راه‌حل سوم. (به‌استقرا). ابتدا توجه کنید که $f(۱) = ۱$. اکنون فرض کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، $n \leqslant k$، $f(k) = k$. ثابت می‌کنیم $f(n+۱) = n+۱$. اگر $n+۱ = ۲j$، آنگاه $۱ \leqslant j < n$ و

$$f(n+۱) = f(۲j) = ۲j = n+۱$$

اگر $n+۱ = ۲j+۱$، آنگاه $۱ \leqslant j < n$ و

$$\begin{aligned} ۲j = f(۲j) < f(۲j+۱) < f(۲j+۲) = f(۲(j+۱)) = ۲f(j+۱) \\ = ۲(j+۱) = ۲j+۲ \end{aligned}$$

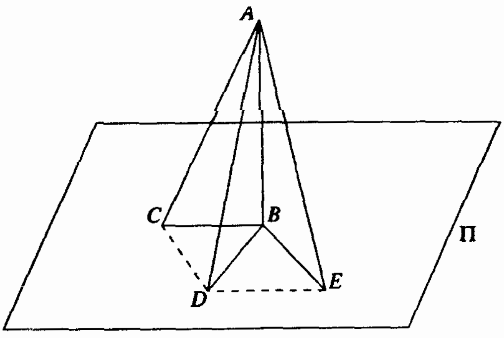
پس $۲j < f(۲j+۱) < ۲j+۲$ و درنتیجه

$$f(۲j+۱) = ۲j+۱ = n+۱$$

مسألهٔ ۵۳. فرض کنید BC، BD و BE پاره‌خطهایی با طول یکسان در صفحهٔ π باشند و هر کدام از آنها با یکی از سه خط مفروض در صفحهٔ π موازی باشد؛ فرض کنید A نقطه‌ای در فضا باشد به‌طوری‌که AB موازی l باشد (شکل ۸۶ را ببینید). در این صورت

$$\triangle ABC \cong \triangle ABD \cong \triangle ABE$$

و بنابراین $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE}$. پس A و B به‌ترتیب روی صفحه‌هایی قرار دارند که بر CD و DE عمودند و آنها را نصف می‌کنند؛ بنابراین، AB بر π عمود است.



شکل ۸۶

به روش زیر نیز می‌توانیم این مسأله را حل کنیم:

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{EB}$$

پس

$$۰ = \overrightarrow{BA} \bullet (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CD}$$

$$۰ = \overrightarrow{BA} \bullet (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EB}) = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{CE}$$

بنابراین $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CE}$، و درنتیجه $\overrightarrow{BA} \perp \pi$.

مسألهٔ ۵۴. می‌توان نوشت

$$a = \underbrace{۱۱\cdots۱}_{m} = ۱ + ۱۰ + ۱۰^۲ + \cdots + ۱۰^{m-۱} = \frac{۱۰^m - ۱}{۹}$$

$$b = ۱\underbrace{۰\cdots۰}_{m-۱}۵ = ۵ + ۱۰^m$$

$$ab + ۱ = \left(\frac{۱۰^m - ۱}{۹}\right)(۵ + ۱۰^m) + ۱ = \left(\frac{۱۰^m + ۲}{۳}\right)^۲$$

$$= \left(\frac{۱۰^m - ۱۰ + ۱۲}{۳}\right)^۲ = \left(\frac{۱۰(۱۰^{m-۱} - ۱)}{۳} + ۴\right)^۲$$

$$= (\underbrace{۳۳\cdots۳}_{m-۱}۴)^۲$$

$$\sqrt{ab + ۱} = \underbrace{۳۳\cdots۳}_{m-۱}۴$$

مسألهٔ ۵۵. راه‌حل اول. دستگاه مختصاتی را در نظر بگیرید که در آن پای دیرک به‌طول h در نقطهٔ $(-a, ۰)$ و پای دیرک به طول k در نقطهٔ $(a, ۰)$ باشد. در این صورت نقطه‌ای مانند (x, y) وقتی ویژگی مورد نظر را دارد که

$$\frac{h}{\sqrt{(x+a)^۲ + y^۲}} = \frac{k}{\sqrt{(x-a)^۲ + y^۲}}$$

یا

$$h^۲(x^۲ - ۲ax + a^۲ + y^۲) = k^۲(x^۲ + ۲ax + a^۲ + y^۲)$$

و یا

$$x^۲(k^۲ - h^۲) + ۲ax(k^۲ + h^۲) + y^۲(k^۲ - h^۲) + a^۲(k^۲ - h^۲) = ۰$$

اگر $h = k$، این معادله به $x = ۰$ تبدیل می‌شود و مکان‌هندسی مورد نظر محور yهاست.

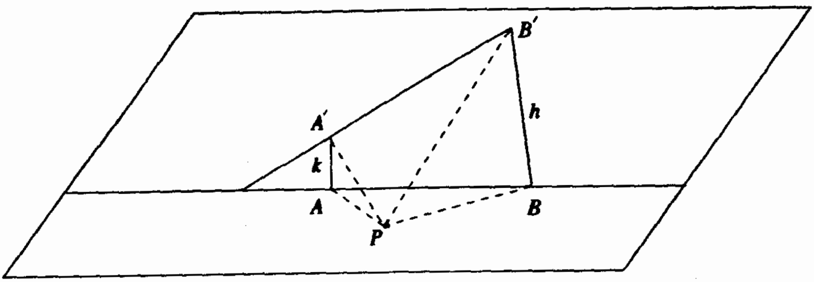
اگر $h \neq k$، مثلاً $h > k$، آنگاه

$$x^۲ + ۲ax\left(\frac{k^۲ + h^۲}{k^۲ - h^۲}\right) + y^۲ + a^۲ = ۰$$

و مکان‌هندسی مورد نظر دایره‌ای است به قطر پاره‌خطی که دو نقطهٔ روی محور xها را که «به‌وضوح» زاویهٔ فراز در آنها یکسان است به‌یکدیگر وصل می‌کند.

راه‌حل دوم. فرض کنید A و B پای دیرکها باشند (شکل ۸۷ را ببینید). نقطهٔ P وقتی روی مکان‌هندسی واقع است که $\angle APA' = \angle BPB'$، یا هم‌ارز با آن $\frac{\overline{PA}}{k} = \frac{\overline{PB}}{h}$، یعنی

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{k}{h} \quad \text{(مقداری ثابت)}$$

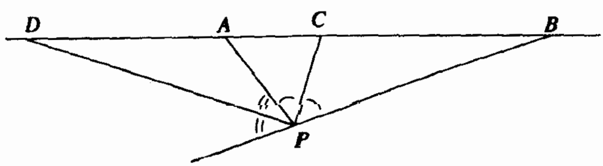


شکل۸۷

حال توجه کنید که (در صفحهٔ APB) نیمسازهای درونی و بیرونی رأس P از مثلث APB خط AB را در C و D قطع می‌کنند که (شکل ۸۸ را ببینید)

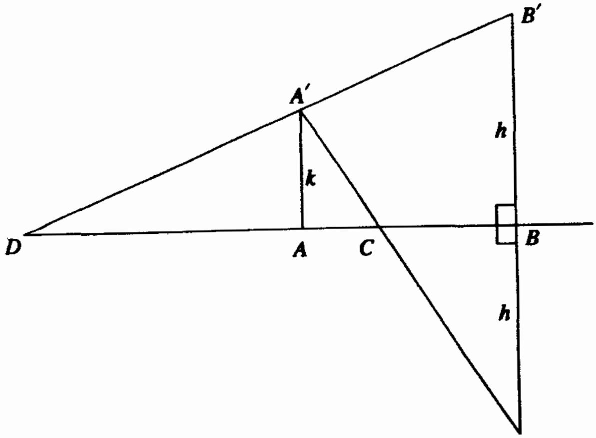
$$\frac{k}{h} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

و $\angle DPC = ۹۰^\circ$.



شکل۸۸

دو نقطهٔ C و D را می‌توان مطابق شکل ۸۹ (که در صفحهٔ شامل دیرکها رسم شده است) مشخص کرد. مکان‌هندسی P دایره‌ای به قطر CD (در صفحهٔ افقی) است. این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند.



شکل۸۹ $\dfrac{\overline{BC}}{h} = \dfrac{\overline{AC}}{k}$ و $\dfrac{\overline{BD}}{h} = \dfrac{\overline{AD}}{k}$

مسألهٔ ۵۶. اگر $k = ۳, ۴, \cdots$،

$$k! = ۲ \times ۳ \times ۴ \times \cdots \times k > ۲^{k-۱}$$

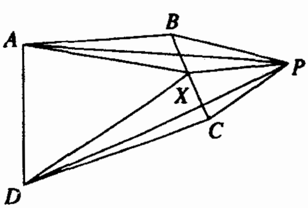
پس اگر $k = ۳, ۴, \cdots$،

$$\frac{۱}{k!} < \frac{۱}{۲^{k-۱}}$$

بنابراین اگر $n \geqslant ۱$،

$$۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \cdots + \frac{۱}{n!} < ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

$$= ۱ + \frac{۱ - (۱/۲)^n}{۱/۲} = ۳ - \frac{۱}{۲^{n-۱}} < ۳$$



شکل ۹۰

مسألهٔ ۵۷. چون AX موازی BP است، مساحت مثلث AXP با مساحت مثلث AXB برابر است. به‌همین ترتیب، مساحت مثلث DXP با مساحت مثلث DXC برابر است. بنابراین (شکل ۹۰ را ببینید)

$$(\text{مساحت } \triangle APD) = (\text{مساحت } \triangle AXD) + (\text{مساحت } \triangle DXP) + (\text{مساحت } \triangle AXP)$$

$$= (\text{مساحت } \triangle AXD) + (\text{مساحت } \triangle DXC) + (\text{مساحت } \triangle AXB)$$

$$= (\text{مساحت چهارضلعی } ABCD)$$

مسألهٔ ۵۸. اگر k عددی طبیعی باشد،

$$\sqrt{k+۱} - \sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+۱} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+۱} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+۱} + \sqrt{k}} = \frac{۱}{\sqrt{k+۱} + \sqrt{k}}$$

بنابراین
$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$$
نابرابری سمت چپ را به‌ازای $k = 1, 2, \cdots, n-1$ بنویسید و همهٔ این نابرابریها را با هم جمع کنید؛ نابرابری سمت راست را به‌ازای $k = 1, 2, \cdots, n$ بنویسید و همهٔ این نابرابریها را با هم جمع کنید؛ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

تمرین. به روشی مشابه این راه‌حل کرانهایی برای عبارت زیر بیابید
$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

مسألهٔ ۵۹. رأسهای چهارضلعی دایرهٔ محیطی آن را به چهار کمان تقسیم می‌کنند که مجموع طول آنها 2π است؛ بنابراین، طول کوتاهترین کمان حداکثر $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ است. طول وتر متناظر با این کمان (که همان کوتاهترین ضلع چهارضلعی است) از $\sqrt{2}$ بیشتر نیست.

مسألهٔ ۶۰. مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی محدب 360° است. چندضلعی مفروض ۴ زاویهٔ قائمه دارد. پس چهار تا از زاویه‌های خارجی آن قائمه‌اند و مجموع این چهار زاویهٔ خارجی 360° است. بنابراین «جایی» برای رأس دیگری باقی نمی‌ماند و چندضلعی مفروض دقیقاً ۴ رأس دارد.

یادداشت. به‌طورکلیتر، اگر چندضلعی محدبی n زاویهٔ $\frac{360^\circ}{n}$ داشته باشد، این چندضلعی nضلعی منتظم است.

مسألهٔ ۶۱. فرض کنید توپهای قرمز R_1 و R_2 و به وزن r_1 و r_2، توپهای سفید W_1 و W_2 و به وزن w_1 و w_2، و توپهای آبی B_1 و B_2 و به وزن b_1 و b_2 باشند. ابتدا R_1 و W_1 را در یک کفهٔ ترازو و R_2 و B_1 را در کفهٔ دیگر قرار می‌دهیم.

اگر $r_1 + w_1 = r_2 + b_1$، آنگاه یا $r_1 < r_2$ و $w_1 > b_1$، و یا $r_1 > r_2$ و $w_1 < b_1$. با مقایسهٔ W_1 و W_2 می‌توان این دو حالت را از هم تمیز داد.

اگر $r_1 + w_1 > r_2 + b_1$، یقیناً $r_1 > r_2$ و یکی از حالتهای زیر ممکن است پیش بیاید:

یک) $w_1 > w_2$ و $b_1 > b_2$؛

دو) $w_1 > w_2$ و $b_1 < b_2$؛

سه) $w_1 < w_2$ و $b_1 < b_2$.

در توزین دوم، R_1 و B_1 را در یک کفهٔ ترازو قرار می‌دهیم و W_2 و B_2 را در کفهٔ دیگر، و نتیجه می‌گیریم

اگر $r_1 + b_1 > w_2 + b_2$، آنگاه $b_1 > b_2$ و $w_1 > w_2$؛

اگر $r_1 + b_1 = w_2 + b_2$، آنگاه $b_1 < b_2$ و $w_1 > w_2$؛

اگر $r_1 + b_1 < w_2 + b_2$، آنگاه $b_1 < b_2$ و $w_1 < w_2$.

آخرین حالت، یعنی $r_1 + w_1 < r_2 + b_1$ را نیز می‌توان به‌همین ترتیب بررسی کرد.

مسألهٔ ۶۲. فاصلهٔ دو شهر را D، سرعت موتور هواپیما را V و سرعت باد را W می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W < V$ (که فرض معقولی است). زمان رفت و برگشت در هوای ساکن $\frac{۲D}{V}$ است، ولی وقتی‌که باد می‌وزد رفت و برگشت هواپیما بیشتر طول می‌کشد:

$$\frac{D}{V+W}+\frac{D}{V-W}=\frac{۲DV}{V^۲-W^۲}=\frac{۲D}{V}\cdot\frac{V^۲}{V^۲-W^۲}>\frac{۲D}{V}$$

این نتیجه مطابق شهود ماست، چون مدت زمانی که هواپیما در حال «مقابله» با باد است بیشتر از مدت زمانی است که هواپیما «سوار» بر آن است.

یادداشت. برای دیدن نتایجی کلیتر در این زمینه نگاه کنید به

Crux Mathematicorum, 12(1986) 277-279.

مسألهٔ ۶۳. **راه‌حل اول.** فرض کنید P نقطهٔ وسط AB باشد؛ در این صورت (چون $\angle AOB$ قائمه است) $\overline{PO}=\overline{PA}=\overline{PB}$. چون $\angle POC$ قائمه است، $\overline{PC}>\overline{PO}$، و بنابراین $\overline{PC}>\overline{PA}=\overline{PB}$. پس امکان ندارد $\angle ACB$ قائمه باشد. به‌همین ترتیب امکان ندارد $\angle BCA$ و $\angle BAC$ قائمه باشند. (آیا مثلث ABC باید حاده باشد؟)

راه‌حل دوم. فرض کنید خطهای OA، OB و OC بر محورهای x، y و z از دستگاه مختصات دکارتی منطبق باشند. فرض کنید A نقطهٔ $(a,۰,۰)$، B نقطهٔ $(۰,b,۰)$ و C نقطهٔ $(۰,۰,c)$ باشد. بدون کاستن از کلیت استدلال فرض می‌کنیم $\angle CAB$ قائمه باشد. در این صورت

$$\left(\sqrt{b^۲+c^۲}\right)^۲=\left(\sqrt{a^۲+b^۲}\right)^۲+\left(\sqrt{a^۲+c^۲}\right)^۲$$
$$b^۲+c^۲=a^۲+b^۲+a^۲+c^۲$$
$$۲a^۲=۰$$

یعنی $a=۰$، و این تناقض است.

مسألهٔ ۶۴. باید این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم

$$x+yz=۲,\qquad y+zx=۲,\qquad z+xy=۲$$

ابتدا معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول و سپس معادلهٔ سوم را از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم:

$$(x-y)(۱-z)=۰,\qquad (y-z)(۱-x)=۰$$

درنتیجه ممکن است چهار حالت پیش بیاید:

$$x-y=۰=y-z,\qquad x-y=۰=۱-x$$
$$۱-z=۰=y-z,\qquad ۱-z=۰=۱-x$$

در هر یک از این چهار حالت نتیجه می‌گیریم که یا $x=y=z=۱$ و یا $x=y=z=-۲$.

مسألهٔ ۶۵. مربع را به چهار مربع همنهشت به طول ضلع $\frac{1}{2}$ تقسیم کنید. بنابر اصل لانه کبوتری یکی از این مربعها حاوی ۳ (یا بیش از ۳) تا از ۹ نقطه است. این سه نقطه مثلثی را مشخص می‌کنند که مساحت آن حداکثر نصف مساحت مربع کوچک، یعنی حداکثر $\frac{1}{8}$، است.

مسألهٔ ۶۶. از

$$0 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$$

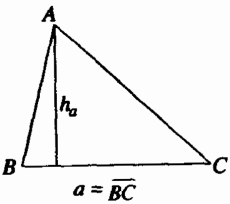
نتیجه می‌شود که $a - b = b - c = c - a = 0$.

یادداشت. به‌طور مشابه نتیجه می‌شود اگر Z_1، Z_2 و Z_3 عددهایی مختلط باشند به‌طوری‌که

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1 + Z_1 Z_2$$

نقاطی (از صفحه) که نمایش‌دهندهٔ این عددهای مختلط‌اند رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع‌اند.

مسألهٔ ۶۷. فرض کنید Δ مساحت مثلث ABC باشد. در این صورت (شکل ۹۱ را ببینید)



شکل ۹۱

$$\Delta = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

بنابراین $a + h_a \geqslant b + h_b$ هم‌ارز است با

$$a - b \geqslant h_b - h_a = 2\Delta\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{2\Delta(a-b)}{ab}$$

و یا $(a-b)(ab - 2\Delta) \geqslant 0$. چون $2\Delta = ab\sin C \leqslant ab$، نتیجه می‌شود $ab - 2\Delta \geqslant 0$؛ این نتیجه همراه با $a - b \geqslant 0$ نابرابری مطلوب را به‌دست می‌دهد.

مسألهٔ ۶۸. فرض کنید

$$n = x10^4 + y10^3 + z10^2 + u10 + v$$

در این صورت

$$m = x10^3 + y10^2 + u10 + v$$

$$10m - n = (u - z)10^2 + (v - u)10 - v$$

$10m - n$ عددی سه‌رقمی است. پس $\frac{10m - n}{m}$ عددی صحیح است که نمایش کسری آن صورت سه رقمی و مخرج چهار رقمی دارد. پس $10m - n = 0$؛ یعنی $u = v = z = 0$. پس $n = x10^4 + y10^3$ و $m = x10^3 + y10^2$. بنابراین n به‌شکل 10^3N است، که در آن $10 \leqslant N \leqslant 99$.

مسألهٔ ۶۹. اگر

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

(از محاسبه‌ای ساده) نتیجه می‌شود $(x + x)(y + z)(z + x) = 0$.

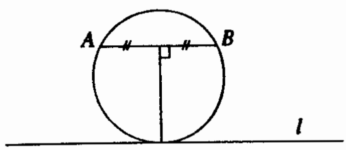
اگر $x+y=0$، آنگاه $x^{2n+1}=-y^{2n+1}$ و درنتیجه $x^{2n+1}+y^{2n+1}=0$ و هر دو عبارت

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}+z^{2n+1}, \qquad (x+y+z)^{2n+1}$$

برابر z^{2n+1} هستند. در حالتهایی که $y+z=0$ و یا $z+x=0$ نیز نتیجه به روش مشابهی حاصل می‌شود.

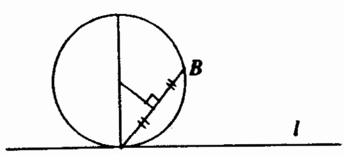
مسألهٔ ۷۰. راه‌حل اول. اگر نقطه‌ای با ویژگی مطلوب وجود داشته باشد باید مرکز دایره‌ای باشد که از دو نقطهٔ مفروض A و B بگذرد و بر خط مفروض l مماس باشد. روشن است که اگر دو نقطهٔ A و B در دو طرف مختلف خط l و یا هر دو روی آن واقع باشند، یافتن چنین دایره‌ای ممکن نیست. پس در حالتهای زیر مسأله جواب دارد.

۱. خطی که دو نقطهٔ مفروض را به‌هم وصل می‌کند موازی خط مفروض است. در این صورت دایرهٔ مورد نظر یکتاست و به‌آسانی رسم می‌شود. (شکل ۹۲ را ببینید.)



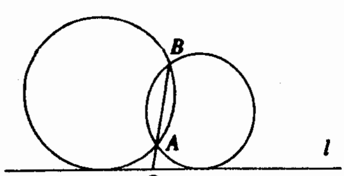
شکل۹۲

۲. یکی از نقطه‌ها، مثلاً A، روی خط مفروض است. در این صورت دایرهٔ مورد نظر یکتاست. اگر BA بر l عمود باشد قطر دایره است. (شکل ۹۳ را ببینید.)



شکل۹۳

۳. نه A روی l است نه B و AB موازی l نیست؛ در این صورت، دو دایره می‌توان یافت (شکل ۹۴). چون $\overline{QP}^2=\overline{QA}\cdot\overline{QB}$، $\overline{QP}$ معلوم است و می‌توان نقطهٔ P را یافت؛ در این صورت مرکز دو دایره را به‌آسانی می‌توان تعیین کرد.

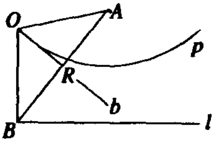


شکل۹۴

راه‌حل دوم. مکان‌هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند عمودمنصف BA، خط b، است؛ مکان‌هندسی نقاطی که از نقطهٔ A و خط l به یک فاصله باشند سهمی p به کانون A و خط هادی l است. تقاطع p و b نقاط مطلوب را به‌دست می‌دهد.

اگر A و B در دو طرف مختلف l واقع باشند، b و p هیچ نقطهٔ تقاطعی ندارند (چرا؟). در حالت ۱ (راه‌حل اول را ببینید) b موازی محور p است و فقط یک نقطهٔ تقاطع وجود دارد؛ در حالت ۳، b و p دو نقطهٔ تقاطع دارند.

حالت ۲ جالب است. اگر A روی l و B خارج از l باشد، p به خطی تبدیل می‌شود که از A می‌گذرد و بر l عمود است و بنابراین فقط یک نقطهٔ تقاطع با b دارد. اما می‌توانیم A را خارج از l و B را روی l بگیریم (شکل ۹۵ را ببینید). در این صورت اگر R نقطهٔ وسط AB باشد، $\angle ROA = \angle ROB$ و بنابراین b بر p مماس است و b و p فقط یک نقطهٔ تقاطع دارند، O، و $OB \perp l$ و $\overline{OA} = \overline{OB}$.



شکل ۹۵

مسألهٔ ۷۱. راه‌حل اول. n را در مبنای ۲ بنویسید، یعنی

$$n = \epsilon_۰ + \epsilon_۱ ۲ + \epsilon_۲ ۲^۲ + \epsilon_۳ ۲^۳ + \epsilon_۴ ۲^۴ + \epsilon_۵ ۲^۵ + \epsilon_۶ ۲^۶ + \cdots$$

که هر ϵ_i یا ۰ است یا ۱. در این صورت به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$\left[\frac{n+۱}{۲}\right] = \epsilon_۰ + \epsilon_۱ + \epsilon_۲ ۲ + \epsilon_۳ ۲^۲ + \epsilon_۴ ۲^۳ + \epsilon_۵ ۲^۴ + \epsilon_۶ ۲^۵ + \cdots$$
$$\left[\frac{n+۲}{۴}\right] = \epsilon_۱ + \epsilon_۲ + \epsilon_۳ ۲ + \epsilon_۴ ۲^۲ + \epsilon_۵ ۲^۳ + \epsilon_۶ ۲^۴ + \cdots$$
$$\left[\frac{n+۴}{۸}\right] = \epsilon_۲ + \epsilon_۳ + \epsilon_۴ ۲ + \epsilon_۵ ۲^۲ + \epsilon_۶ ۲^۳ + \cdots$$
$$\left[\frac{n+۸}{۱۶}\right] = \epsilon_۳ + \epsilon_۴ + \epsilon_۵ ۲ + \epsilon_۶ ۲^۲ + \cdots$$
$$\vdots$$

اگر این رابطه‌ها را با هم جمع کنیم نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

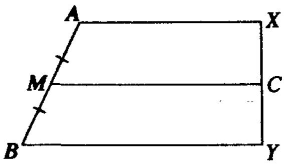
راه‌حل دوم. $\left[\frac{n+۱}{۲}\right]$ تعداد عددهای زوج بین ۱ و $n+۱$، و خود این دو عدد، و همچنین تعداد اعداد فرد بین ۱ و $n+۱$، و خود این دو عدد، است.

$\left[\frac{n+۲}{۴}\right]$ تعداد مضربهای ۴ بین ۱ و $n+۲$، و خود این دو عدد، است که برابر است با تعداد مضربهای ۲ بین ۱ و n، و خود این دو عدد، که بر ۴ بخش‌پذیر نیستند.

به‌طورکلی به‌ازای هر k، $\left[\frac{n+۲^{k-۱}}{۲^k}\right]$ تعداد مضربهای ۲^k بین ۱ و $n+۲^{k-۱}$، و خود این دو عدد، و برابر است با تعداد مضربهای $۲^{k-۱}$ بین ۱ و n، و خود این دو عدد، که بر ۲^k بخش‌پذیر نیستند.

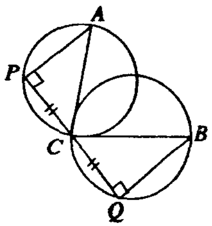
چون به‌ازای هر عدد مانند m بین ۱ و n، و خود این دو عدد، دقیقاً یک مقدار برای k وجود دارد به‌طوری‌که m بر 2^{k-1} بخش‌پذیر باشد ولی بر 2^k بخش‌پذیر نباشد، در طرف چپ برابری داده شده در صورت مسأله هر عدد بین ۱ و n، و خود این دو عدد، دقیقاً یک بار شمرده می‌شود.

مسألهٔ ۷۲. **راه‌حل اول.** فرض کنید M نقطهٔ وسط پاره‌خط AB باشد. از A و B خطهایی موازی با MC رسم کنید (شکل ۹۶ را ببینید). از C خطی عمود بر MC رسم کنید. فرض کنید این خط دو خط رسم شده از A و B را در X و Y قطع کند. در این صورت $\overline{CX} = \overline{CY}$ و درنتیجه دایرهٔ به مرکز C و شعاع CX ویژگی مطلوب را دارد.



شکل ۹۶

راه‌حل دوم. این مسأله ربطی به مسألهٔ ۲۹ دارد. دایره‌هایی به قطر AC و BC رسم کنید. مطابق راه‌حل مسألهٔ ۲۹ پاره‌خط PCQ را طوری رسم کنید که $\overline{PC} = \overline{CQ}$ (شکل ۹۷ را ببینید). دایرهٔ به مرکز C و شعاع CP ویژگی مطلوب را دارد. AP و BQ بر قطر PQ عمودند، و بنابراین مماس بر دایره و موازی یکدیگرند.



شکل ۹۷

یادداشت. مسأله‌ای دشوارتر چنین است: سه نقطهٔ ناهمخط A، B و C و زاویهٔ α مفروض‌اند. دایره‌ای به مرکز C رسم کنید که مماسهای رسم شده از A و B بر آن با هم زاویهٔ α بسازند. اگر شعاع دایره r باشد معادله‌ای به‌شکل زیر به‌دست می‌آید

$$r^4[(b^2-a^2)^2+4k^2a^2b^2]-2r^2k^2a^2b^2(a^2+b^2)+k^4a^4b^4=0$$

که در آن a، b و k عددهایی ثابت‌اند.

مسألهٔ ۷۳. روشن است که

$$(x-1)f(x)=x^5-1$$

همچنین

$$\begin{aligned}f(x^5)&=x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1\\&=(x^{20}-1)+(x^{15}-1)+(x^{10}-1)+(x^5-1)+5\end{aligned}$$

هر یک از عبارتهای داخل پرانتز بر x^5-1 و درنتیجه بر $f(x)$ بخش‌پذیر است. بنابراین

$$f(x^5)=(\text{مضربی از } f(x))+5$$

ملاحظه. حل مسأله با استفاده از روش تقسیم طولانی نیز دشوار نیست، چون الگوی ضرایب خارج‌قسمت کاملاً روشن است.

مسألهٔ ۷۴. عددهای صحیح a، b، c و d چهار ریشهٔ چندجمله‌ای $f(x)-۵$ هستند، و بنابراین

$$f(x)-۵=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x)$$

که در آن $g(x)=x^m+b_۱x^{m-۱}+\cdots+b_m$ و $b_۱$، $b_۲$، $\cdots$ و b_m عددهای صحیح‌اند. پس اگر x عددی صحیح باشد، برابری $f(x)=۸$ و یا

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x)=۳$$

مستلزم آن است که دست‌کم سه عدد از چهار عدد صحیح $x-a$، $x-b$، $x-c$ و $x-d$ برابر با ۱ یا ۱−، و درنتیجه دو تا از آنها با هم برابر باشند؛ و این تناقض است.

مسألهٔ ۷۵. به‌ازای هر i و هر j،

$$a_{ij}\leqslant \max\{a_{i۱},a_{i۲},\cdots,a_{in}\}=M_i$$

پس

$$m_j=\min\{a_{۱j},a_{۲j},\cdots,a_{nj}\}\leqslant \min\{M_۱,M_۲,\cdots,M_n\}=M$$

و بنابراین

$$m=\max\{m_۱,m_۲,\cdots,m_n\}\leqslant M$$

مسألهٔ ۷۶. طولانیترین تصاعد هندسی ممکن را می‌سازیم. فرض می‌کنیم تعداد جمله‌های این تصاعد n، قدرنسبت آن (که لزوماً عددی گویاست) $\frac{p}{q}$ (p و q مقسوم‌علیه اول مشترک ندارند) و جملهٔ اول آن a باشد. قدرنسبت باید کوچکترین مقدار ممکن باشد و درنتیجه p باید برابر با $q+۱$ باشد. گذشته از این، آخرین جملهٔ تصاعد، یعنی $\frac{ap^{n-۱}}{q^{n-۱}}$، عددی صحیح و درنتیجه a بر $q^{n-۱}$ بخش‌پذیر است. پس a باید بر توانی از عددی صحیح بخش‌پذیر باشد. چون $۷۲۹=۳^۶$ و $۶۴=۲^۶$، نتیجه می‌گیریم که دنباله‌ای با دست‌کم هفت جمله باید با ۷۲۹ یا مضربی از ۶۴ آغاز شود. با کمی تفکر معلوم می‌شود که بهترین راه انتخاب ۱۲۸ به‌عنوان جملهٔ اول تصاعد است. در این صورت باید قدرنسبت را $\frac{۳}{۲}$ بگیریم و به دنبالهٔ ۶ جمله‌ای

$$\{۱۲۸,۱۹۲,۲۸۸,۴۳۲,۶۴۸,۹۷۲\}$$

قانع شویم.

برهانی «صوری»تر به قرار زیر است. تصاعد هندسی

$$۱۲۸,\ ۱۹۲,\ ۲۸۸,\ ۴۳۲,\ ۶۴۸,\ ۹۷۲$$

با قدرنسبت $\frac{۳}{۲}$ نشان می‌دهد که طولانیترین دنباله دست‌کم ۶ جمله دارد. اکنون تصاعد هندسی

$$۱۰۰\leqslant a<ar<ar^۲<\cdots<ar^{n-۱}\leqslant ۱۰۰۰$$

را در نظر بگیرید که n جملهٔ آن عددهایی صحیح‌اند و $r > 1$. روشن است که r باید عددی گویا باشد. فرض می‌کنیم $r = \frac{p}{q}$ به‌طوری‌که $p > q \geqslant 1$ و $(p,q) = 1$. چون ar^{n-1} عددی صحیح و برابر $a(\frac{p}{q})^{n-1}$ است، a بر q^{n-1} بخش‌پذیر است. می‌توانیم فرض کنیم $p = q + 1$، زیرا تصاعد

$$100 \leqslant a < a\left(\frac{q+1}{q}\right) < \cdots < a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \leqslant 1000$$

در فاصلهٔ مورد نظر، n جمله دارد که (چون a بر q^{n-1} بخش‌پذیر است) عددهایی صحیح‌اند. اگر $q \geqslant 3$، آنگاه

$$1000 \geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \geqslant (q+1)^{n-1} \geqslant 4^{n-1}$$

یعنی $n \leqslant 5$. اگر $q = 1$، آنگاه

$$1000 \geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} = a2^{n-1} \geqslant 100 \times 2^{n-1}$$

یعنی $n \leqslant 4$. اگر $q = 2$، آنگاه

$$1000 \geqslant a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} = a\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geqslant 100\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

یعنی $n \leqslant 6$. پس طولانیترین دنبالهٔ موردنظر ۶ جمله دارد.

مسألهٔ ۷۷. **راه‌حل اول.** از اتحاد

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

معلوم می‌شود که $x^n - y^n$ بر $x - y$ بخش‌پذیر است. بنابراین $8^n - 6^n$ و $1^n - 3^n$، و درنتیجه $6^n - 3^n - 8^n + 1^n$، بر ۲ بخش‌پذیرند.

به‌همین ترتیب $8^n - 3^n$ و $1^n - 6^n$، و درنتیجه $6^n - 3^n - 8^n + 1^n$، بر ۵ بخش‌پذیرند.

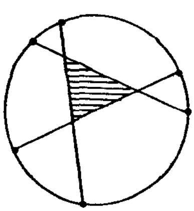
به‌این ترتیب $6^n - 3^n - 8^n + 1^n$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

راه‌حل دوم. عدد موردنظر آشکارا زوج است. همچنین

$$1^n + 8^n - 3^n - 6^n = 1^n + (5+3)^n - 3^n - (5+1)^n$$

$$\equiv 1^n + 3^n - 3^n - 1^n \equiv 0 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 5)$$

پس عدد مورد نظر بر ۲ و ۵، و درنتیجه بر ۱۰، بخش‌پذیر است.



شکل ۹۸

مسألهٔ ۷۸. سه ضلع هر مثلث «درونی» ۶ نقطه روی دایره مشخص می‌کنند (شکل ۹۸ را ببینید). برعکس، هر مجموعه‌ای از ۶ نقطه روی دایره یک مثلث مشخص می‌کند. بنابراین، تعداد مثلثها برابر است با

$$\binom{n}{6} = \frac{n!}{6!(n-6)!}$$

(این مسأله را در مورد نقاط روی کره و چهاروجهی تعمیم دهید.)

مسألهٔ ۷۹. چون

$$\begin{aligned} a_{n+۱} - ۱ &= a_n(a_n - ۱) = a_n a_{n-۱}(a_{n-۱} - ۱) = \cdots = a_n a_{n-۱} \cdots a_۱(a_۱ - ۱) \\ &= a_n a_{n-۱} \cdots a_۱ \end{aligned}$$

نتیجهٔ مطلوب به‌آسانی حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۸۰. توجه کنید که

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} > \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} > ۴\left(\frac{۱}{۸}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۰} + \cdots + \frac{۱}{۱۶} > ۸\left(\frac{۱}{۱۶}\right) = \frac{۱}{۲}$$

$$\vdots$$

بنابراین

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} > ۱ + ۲\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۸} > ۱ + ۳\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۱۶} > ۱ + ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\vdots$$

مثلاً

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^{۱۹۸}} > ۱ + ۱۹۸\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۱۰۰$$

یادداشت. به‌طورکلیتر ثابت کنید که اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، N را می‌توان چنان بزرگ گرفت که

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{a+d} + \cdots + \frac{۱}{a+(N-۱)d} > ۱۰۰$$

مسألهٔ ۸۱. راه‌حل اول. بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\sqrt[n]{\frac{a_۱ a_۲ \cdots a_n}{b_۱ b_۲ \cdots b_n}} \leqslant \frac{۱}{n}\left(\frac{a_۱}{b_۱} + \frac{a_۲}{b_۲} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}\right)$$

و

$$\sqrt[n]{\frac{b_۱ b_۲ \cdots b_n}{a_۱ a_۲ \cdots a_n}} \leqslant \frac{۱}{n}\left(\frac{b_۱}{a_۱} + \frac{b_۲}{a_۲} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right)$$

چون عبارتهای سمت چپ دو نابرابری بالا عکس یکدیگرند، یکی از آنها باید بزرگتر از یا برابر با ۱ باشد.

راه‌حل دوم. بنابر نابرابری کوشی (پیوست، د (۴) را ببینید)،

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\right)\geqslant n^2$$

درنتیجه یکی از دو عامل سمت چپ این نابرابری باید بزرگتر از یا برابر با n باشد. در رابطهٔ بالا برابری برقرار است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i، $a_i = b_i$.

مسألهٔ ۸۲. اگر $|a_0| \neq 1$ راه‌حل مسأله ساده است، چون اگر m مضربی از a_0 باشد، $f(m)$ بر a_0 بخش‌پذیر است. در واقع، چون $f(m)$ها فقط به تعداد دفعاتی متناهی ممکن است مقادیر a_0 و $-a_0$ باشند، تعدادی نامتناهی از آنها مضرب سره‌ای از a_0 هستند. برای یافتن راه‌حل در حالتی که $|a_0| = 1$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. عدد صحیح k را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(k)$ برابر با ۱ یا ۱− نباشد. (انجام این کار همواره ممکن است، چرا؟) فرض می‌کنیم p مقسوم‌علیه اولی از $f(k)$ باشد. دراین صورت

$$f(k+rp) \equiv f(k) \ (p \text{ به‌پیمانهٔ})$$

گذشته از این، چون چندجمله‌ای هر مقداری را فقط به تعداد دفعاتی متناهی می‌گیرد، به‌ازای همهٔ مقادیر r بجز تعدادی متناهی از آنها، $f(k+rp)$ مضربی از p و متمایز از $\pm p$ است.

مسألهٔ ۸۳. فرض کنید $f(n)$ بیشترین تعداد ناحیه‌هایی باشد که n خط در صفحه ایجاد می‌کنند. اگر خط دیگری مانند l، خط $n+1$اُم، به‌این n خط اضافه کنیم، این خطها آن را قطع می‌کنند و $n+1$ پاره‌خط روی l ایجاد می‌شود که هر یک از آنها ناحیه‌ای را به دو بخش تقسیم می‌کند و درنتیجه $n+1$ ناحیه اضافه می‌شود؛ یعنی اگر $n \geqslant 1$، $f(n+1) = f(n)+n+1$. با استفادهٔ مکرر از این برابری و این نتیجهٔ بدیهی که $f(1) = 2$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= n+1+f(n) = (n+1)+n+f(n-1)\\
&= (n+1)+n+(n-1)+f(n-2)\\
&\ \vdots\\
&= (n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+f(1)\\
&= (n+1)+n+(n-1)+\cdots+2+1+1\\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}+1
\end{aligned}$$

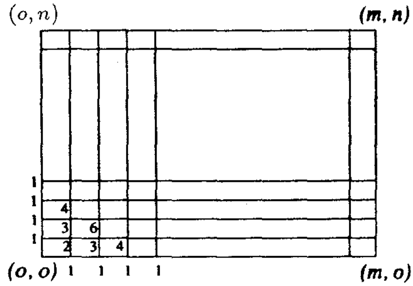
یا

$$f(n) = \frac{(n+1)n}{2}+1, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

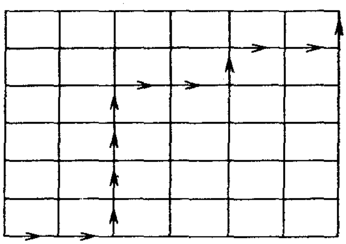
(وضعیت مشابهی را در فضا در مورد n صفحه که فضا را به ناحیه‌هایی سه‌بعدی تقسیم می‌کنند بررسی کنید.)

مسألهٔ ۸۴. **راه‌حل اول.** اگر $f(m,n)$ تعداد کوتاهترین مسیرها از $(0,0)$ به (m,n) باشد، نتیجه می‌شود که (شکل ۹۹ را ببینید)

$$f(m,n)=f(m-1,n)+f(m,n-1),\quad m\geqslant 1,\quad n\geqslant 1$$
$$f(m,0)=f(0,n)=1 \qquad (*)$$



شکل ۹۹



RRUUUURRURRU

شکل ۱۰۰

با استفاده از این رابطهٔ بازگشتی می‌توانیم $f(m,n)$ را به‌ازای مقادیر کوچک m و n حساب کنیم. برخی از این مقادیر در نمودار شکل ۹۹ نشان داده شده‌اند. این اعداد در امتداد قطری که $(1,0)$ را به $(0,1)$ وصل می‌کند برابرند با $\binom{1}{1}=1$ و $\binom{1}{0}=1$؛ در امتداد قطری که $(2,0)$ را به $(0,2)$ وصل می‌کند برابرند با $\binom{2}{2}=1$، $\binom{2}{1}=2$ و $\binom{2}{0}=1$؛ در امتداد قطر بعدی برابرند با $\binom{3}{3}=1$، $\binom{3}{2}=3$، و $\binom{3}{0}=1$. به‌کمک این نتیجه‌ها می‌توان حدس زد که $f(m,n)=\binom{m+n}{n}$، و در واقع به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $\binom{m+n}{n}$ در دستگاه $(*)$ صدق می‌کند.

راه‌حل دوم. هر کوتاهترین مسیر از $(0,0)$ به (m,n) را می‌توان با دنباله‌ای از m نماد R و n نماد U توصیف کرد ـ هر R برای یک حرکت به «راست» و هر U برای یک حرکت به «بالا». مثلاً مسیر نشان داده شده در شکل ۱۰۰ متناظر است با RRUUUURRURRU.

تعداد دنباله‌های متشکل از m نماد R و n نماد U، $\binom{m+n}{n}$ است.

مسألهٔ ۸۵. معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم:

$$y-x=\frac{a^2-b^2}{p}$$

که در آن $p=x+y+z$. بنابراین

$$2(x^2+xy+y^2)-(y-x)^2=2c^2-\frac{(a^2-b^2)^2}{p^2}$$

و به‌طور مشابه

$$2(y^2+yz+z^2)-(z-y)^2=2a^2-\frac{(b^2-c^2)^2}{p^2}$$

$$2(z^2+zx+x^2)-(x-z)^2=2b^2-\frac{(c^2-a^2)^2}{p^2}$$

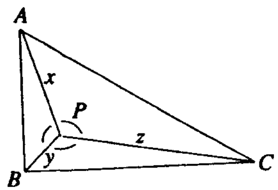
اگر سه برابری اخیر را باهم جمع کنیم نتیجه می‌شود

$$۲p^۲ = ۲(a^۲+b^۲+c^۲) - \frac{(a^۲-b^۲)^۲+(b^۲-c^۲)^۲+(c^۲-a^۲)^۲}{p^۲}$$

و جوابهای این معادلهٔ درجهٔ دوم برحسب $p^۲$ برابرند با

$$۲p^۲ = a^۲+b^۲+c^۲ \pm \{۶(a^۲b^۲+b^۲c^۲+c^۲a^۲) - ۳(a^۴+b^۴+c^۴)\}^{\frac{۱}{۲}} \qquad (*)$$

مثلث ABC با طول ضلعهای a، b و c را درنظر بگیرید و فرض کنید P نقطه‌ای درون این مثلث باشد و x، y و z فاصله‌های P از رأسهای آن باشند (شکل ۱۰۱ را ببینید). می‌دانیم که اگر همهٔ زاویه‌های مثلث کوچکتر از ۱۲۰° باشند، برای اینکه $x+y+z$ مینیمم باشد نقطهٔ P باید طوری واقع شده باشد که



شکل ۱۰۱

$$\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = ۱۲۰^\circ$$

(اثبات این حکم چندان آسان نیست.) در این حالت رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) آشکارا برقرارند، چون این رابطه‌ها در واقع بیان قانون کسینوسها در مثلث‌اند. رابطهٔ (*) نیز در این حالت ساده می‌شود:

$$P = \left\{\frac{a^۲+b^۲+c^۲+۴\triangle\sqrt{۳}}{۲}\right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

که در آن $\triangle$ مساحت مثلث ABC است.

یادداشت. یادداشت بعد از راه‌حل مسألهٔ ۳۰ را ببینید.

مسألهٔ ۸۶. فرض کنید $v_۱$، $v_۲$، $\cdots$ و $v_۶$ شش نقطهٔ مفروض باشند. ۵ پاره‌خطی را که $v_۱$ را به نقطه‌های دیگر وصل می‌کنند درنظر می‌گیریم. دست‌کم سه پاره‌خط از این ۵ پاره‌خط همرنگ‌اند. مثلاً فرض کنید پاره‌خطهایی که $v_۱$ را به $v_۲$، $v_۳$ و $v_۴$ وصل می‌کنند هر سه قرمز باشند. حال اگر هر سه ضلع مثلث $v_۲v_۳v_۴$ آبی باشند، نتیجهٔ مطلوب برقرار است. در غیر این‌صورت فرض می‌کنیم مثلاً $v_۲v_۳$ قرمز باشد. در این‌صورت هر سه ضلع مثلث $v_۱v_۲v_۳$ قرمزند.

ملاحظه. در واقع باید دو مثلث تکرنگ وجود داشته باشد! می‌توان ثابت کرد که اگر ۱۶ نقطه در فضا چنان واقع شده باشند که هیچ سه‌تایی روی یک خط نباشند، و ۱۲۰ پاره‌خطی که این نقطه‌ها را به‌یکدیگر وصل می‌کنند با استفاده از ۳ رنگ رنگ‌آمیزی شده باشند، در میان مثلثهای حاصل یک مثلث تکرنگ وجود دارد.

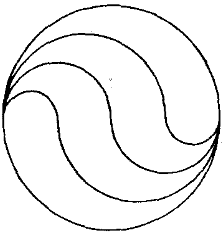
مسألهٔ ۸۷. با استفادهٔ مکرر از اتحاد

$$\frac{۱}{k} = \frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{k(k+۱)}$$

می‌توان بی‌نهایت نمایش به‌دست آورد، مانند

$$\begin{aligned}۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶} &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۴۲} \\ &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۴۳} + \frac{۱}{۱۸۰۶} \\ &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} \\ &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۰} \\ &\vdots\end{aligned}$$

می‌توان هر نمایشی از ۱ به‌صورت مجموع معکوسهای تعدادی نامتناهی از عددهای صحیح و متمایز را درنظر گرفت و با استفاده از اتحاد بالا نمایشی دیگر یافت.


شکل ۱۰۲

مسألهٔ ۸۸. دایره را با ستاره و پرگار می‌توان به هر تعداد دلخواهی ناحیه با مساحتهای برابر تقسیم کرد. روش انجام این‌کار را وقتی‌که $n = ۴$ بیان می‌کنیم. قطری از دایره را به ۴ قسمت برابر تقسیم و سپس نیمدایره‌هایی به‌صورت نشان داده شده در شکل ۱۰۲ رسم کنید.

مسألهٔ ۸۹. فرض کنید مسیر مشخص شده با ترتیب $p_۱$، $p_۲$، $\cdots$، p_n خودش را قطع کند (شکل ۱۰۳ را ببینید). ثابت می‌کنیم که مسیر کوتاهتری بین $p_۱$ و p_n وجود دارد. فرض کنید به‌ازای i و jای، به‌طوری‌که $۱ \leqslant i \leqslant j \leqslant n - ۱$، پاره‌خطهای $p_ip_{i+۱}$ و $p_jp_{j+۱}$ یکدیگر را مثلاً در نقطهٔ r قطع کنند. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\overline{p_ip_j} + \overline{p_{i+۱}p_{j+۱}} &< \overline{p_ir} + \overline{rp_j} + \overline{p_{i+۱}r} + \overline{rp_{j+۱}} \\ &= \overline{p_ip_{i+۱}} + \overline{p_jp_{j+۱}}\end{aligned}$$

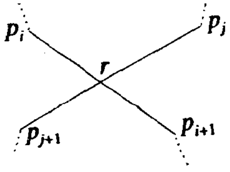
بنابراین مسیر

$$p_۱p_۲\cdots p_ip_jp_{j-۱}\cdots p_{i+۲}p_{i+۱}p_{j+۱}p_{j+۲}\cdots p_n$$

کوتاهتر از مسیر

$$p_۱p_۲\cdots p_ip_{i+۱}\cdots p_jp_{j+۱}\cdots p_n$$

است.



شکل ۱۰۳

مسألهٔ ۹۰. می‌دانیم $P(x,y) \equiv (x-y)Q(x,y)$ و $P(x,y) \equiv (y-x)Q(y,x)$. بنابراین

$$۰ \equiv P(x,y) - P(y,x) \equiv (x-y)(Q(x,y) + Q(y,x))$$

یعنی

$$Q(x,y)+Q(y,x)\equiv \circ$$

و بنابراین

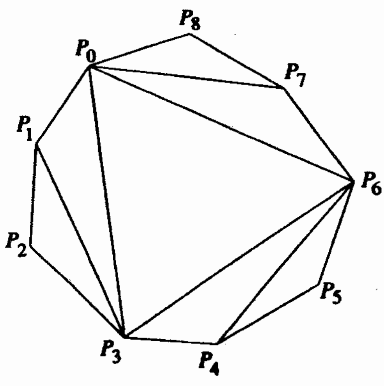
$$Q(x,x)\equiv \circ$$

پس جوابی از معادلهٔ چندجمله‌ای $Q(x,y)=\circ$ این است: $x=y$. درنتیجه $x-y$ عاملی از $Q(x,y)$ است.

یادداشت. برای مطالعهٔ تعمیمهایی از این نتیجه نگاه کنید به
Crux Mathematicorum 14 (1988) 139, #4.

مسألهٔ ۹۱. چون نامهای $\triangle_\circ$ و $\triangle_۸$ را به‌کار نبرده‌ایم، مثلث $P_\circ P_۸ P_۷$ باید $\triangle_۷$ باشد. بنابراین مثلث $P_\circ P_۷ P_۶$ باید $\triangle_۶$، مثلث $P_\circ P_۳ P_۶$ باید $\triangle_۳$، مثلث $P_\circ P_۱ P_۳$ باید $\triangle_۱$ و مثلث $P_۱ P_۲ P_۳$ باید $\triangle_۲$ باشد. مثلث $P_۳ P_۴ P_۶$ باید $\triangle_۴$ و مثلث $P_۴ P_۵ P_۶$ باید $\triangle_۵$ باشد. فقط این نامگذاری شرایط موردنظر را دارد. شکل ۱۰۴ را ببینید.

این نتیجه را درمورد nضلعیی که به $n-۲$ مثلث تقسیم شده است تعمیم دهید.

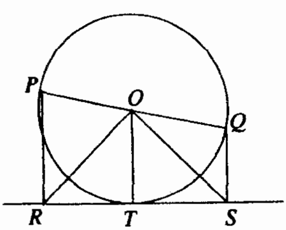


شکل۱۰۴

مسألهٔ ۹۲. چون OT بر خط TS عمود است، خطهای PR، OT و QS باهم موازی‌اند. بنابراین

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{TS}}=\frac{\overline{PO}}{\overline{OQ}}=۱$$

و درنتیجه $\overline{RT}=\overline{TS}$. پس در مثلثهای ROT و SOT ضلع OT مشترک است، $\overline{RT}=\overline{ST}$ و $\angle RTO=\angle STO$ (هر دو قائمه‌اند). بنابراین این مثلثها همنهشت‌اند و درنتیجه $\overline{OR}=\overline{OS}$ (شکل ۱۰۵ را ببینید).



شکل ۱۰۵

مسألهٔ ۹۳. راه‌حل اول. از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. نتیجه به‌ازای $n = ۱$ برقرار است. فرض کنید این نتیجه به‌ازای $n = k$ برقرار باشد. در این‌صورت

$$(۱ + a_۱)(۱ + a_۲)\cdots(۱ + a_k)(۱ + a_{k+۱}) \geqslant \frac{۲^k}{k+۱}(۱ + a_۱ + \cdots + a_k)(۱ + a_{k+۱})$$

اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $a = a_{k+۱}$ و $s = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$، آنگاه

$$\frac{۲^k}{k+۱}(۱ + s)(۱ + a) \geqslant \frac{۲^{k+۱}}{k+۲}(۱ + s + a)$$

اگر این نابرابری را ساده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$۲(as - k) + k(a - ۱)(s - ۱) \geqslant ۰$$

و چون به‌ازای هر i، $a \geqslant ۱$، این نابرابری درست است. پس نتیجهٔ مطلوب به‌ازای $n = k + ۱$، و به‌استقرا، به‌ازای هر n برقرار است. برابری فقط در صورتی برقرار است که به‌ازای هر i، $a_i = ۱$.

راه‌حل دوم. نابرابری موردنظر هم‌ارز است با

$$\left(\frac{۱ + a_۱}{۲}\right)\left(\frac{۱ + a_۲}{۲}\right)\cdots\left(\frac{۱ + a_n}{۲}\right) \geqslant \frac{۱ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n + ۱}$$

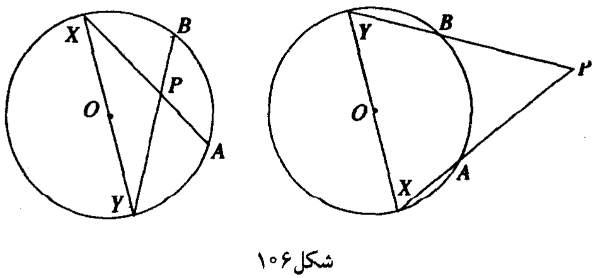
و یا با فرض اینکه $x_i = \frac{a_i - ۱}{۲} \geqslant ۰$،

$$(۱ + x_۱)(۱ + x_۲)\cdots(۱ + x_n) \geqslant ۱ + \frac{۲}{n+۱}(x_۱ + \cdots + x_n)$$

اما

$$\begin{aligned}(۱ + x_۱)(۱ + x_۲)\cdots(۱ + x_n) &\geqslant ۱ + x_۱ + \cdots + x_n \\ &\geqslant ۱ + \frac{۲}{n+۱}(x_۱ + \cdots + x_n)\end{aligned}$$

مسألهٔ ۹۴. روشن است که $\angle XBY$ قائمه و $\angle AXB$ ثابت است. پس $\angle APB$ ثابت و درنتیجه مکان‌هندسی موردنظر دایره‌ای است که از A و B می‌گذرد (شکل ۱۰۶ را ببینید).



شکل۱۰۶

مسألهٔ ۹۵. از مثالهای داده شده قانون کلی زیر به‌ذهن می‌رسد

$$\frac{۱}{n} = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n(n+۱)}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

که درستی آن‌را به‌آسانی می‌توان ثابت کرد. اگر این برابری را به‌شکل هم‌ارز زیر بنویسیم

$$\frac{۱}{n(n+۱)} = \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

به‌ازای $۱ \leqslant i \leqslant j$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{i(i+۱)} + \frac{۱}{(i+۱)(i+۲)} + \cdots + \frac{۱}{j(j+۱)}\\ &= \left(\frac{۱}{i} - \frac{۱}{i+۱}\right) + \left(\frac{۱}{i+۱} - \frac{۱}{i+۲}\right) + \cdots + \left(\frac{۱}{j-۱} - \frac{۱}{j}\right) + \left(\frac{۱}{j} - \frac{۱}{j+۱}\right)\\ &= \frac{۱}{i} - \frac{۱}{j+۱}\end{aligned}$$

بنابراین باید معادلهٔ زیر را حل کنیم

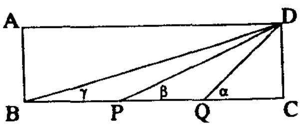
$$\frac{۱}{n} = \frac{۱}{i} - \frac{۱}{j+۱}$$

اگر این معادله را با برابری زیر

$$\frac{۱}{n} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{(n-۱)n}$$

(که همان برابری اول است که در آن $n - ۱$ را به‌جای n گذاشته‌ایم) مقایسه کنیم، جواب زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$i = n - ۱, \quad j + ۱ = (n - ۱)n$$



شکل ۱۰۷

مسألهٔ ۹۶. **راه‌حل اول.** روشن است که (شکل ۱۰۷ را ببینید)

$$\tan\alpha = ۱, \qquad \tan\beta = \frac{۱}{۲}, \qquad \tan\gamma = \frac{۱}{۳}$$

و درنتیجه

$$\tan(\beta+\gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{۱ - \tan\beta\tan\gamma} = \frac{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳}}{۱ - \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳}\right)} = ۱ = \tan\alpha$$

و بنابراین $\beta + \gamma = \alpha$.

راه‌حل دوم. فرض کنید $\overline{CD} = ۱$. مثلثهای DBQ و PDQ متشابه‌اند، چون در مثلث DBQ، $\overline{BD} = \sqrt{۱۰}$، $\overline{BQ} = ۲$ و $\overline{QD} = \sqrt{۲}$ و در مثلث PDQ، $\overline{PD} = \sqrt{۵}$، $\overline{DQ} = \sqrt{۲}$ و $\overline{PQ} = ۱$؛ پس طول هر ضلع مثلث اول $\sqrt{۲}$ برابر طول ضلع متناظرش در مثلث دوم است. بنابراین $\angle PDQ = \angle DBQ = \gamma$ و نتیجهٔ موردنظر با به‌کارگیری قضیهٔ زاویه‌های خارجی در مثلث PDQ به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۹۷. توجه کنید که مجموع مفروض نسبت به x_iها متقارن است و تغییر ترتیب آنها تغییری در مجموع ایجاد نمی‌کند. پس می‌توانیم فرض کنیم بیشترین مقدار ممکن چنین مجموعهایی به‌ازای

انتخابی از x_iها به‌دست می‌آید که $\circ \leqslant x_\text{۱} \leqslant x_\text{۲} \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \text{۱}$. در این‌صورت $|x_i - x_j|$ را می‌توان بدون علامت قدرمطلق نوشت. سپس به‌ازای هر i، x_iها را باهم جمع می‌کنیم. در این‌صورت x_iهایی را که ضریب مثبت دارند تا حد ممکن بزرگ و x_iهایی را که ضریب منفی دارند تا حد ممکن کوچک انتخاب می‌کنیم. برای اینکه درک کنید چه روالی در پیش گرفته‌ایم، حالتی را درنظر بگیرید که $n = \text{۴}$ و $\circ \leqslant x_\text{۱} \leqslant x_\text{۲} \leqslant x_\text{۳} \leqslant x_\text{۴} \leqslant \text{۱}$:

$$\begin{aligned} S &= |x_\text{۱} - x_\text{۲}| + |x_\text{۱} - x_\text{۳}| + |x_\text{۱} - x_\text{۴}| + |x_\text{۲} - x_\text{۳}| + |x_\text{۲} - x_\text{۴}| + |x_\text{۳} - x_\text{۴}| \\ &= (x_\text{۲} - x_\text{۱}) + (x_\text{۳} - x_\text{۱}) + (x_\text{۴} - x_\text{۱}) + (x_\text{۳} - x_\text{۲}) + (x_\text{۴} - x_\text{۲}) + (x_\text{۴} - x_\text{۳}) \\ &= -\text{۳}x_\text{۱} - x_\text{۲} + x_\text{۳} + \text{۳}x_\text{۴} \end{aligned}$$

روشن است که برای ماکسیمم شدن S باید $x_\text{۱} = x_\text{۲} = \circ$ و $x_\text{۳} = x_\text{۴} = \text{۱}$.

با توجه به‌این توضیحات برهان را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

بدون کاستن ازکلیت استدلال فرض می‌کنیم $\circ \leqslant x_\text{۱} \leqslant x_\text{۲} \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \text{۱}$. مجموع را با S نمایش می‌دهیم. روشن است که

$$|x_i - x_j| = \begin{cases} x_i - x_j & i > j \\ x_j - x_i & i < j \end{cases}$$

بنابراین، به‌ازای $j = \text{۱}, \text{۲}, \cdots, i - \text{۱}$، $|x_i - x_j| = x_i - x_j$ و به‌ازای $j = i + \text{۱}, \cdots, n$، $|x_i - x_j| = x_j - x_i$. به‌این‌ترتیب

$$S = \sum_{i=\text{۱}}^{n} x_i(i - \text{۱} - (n - i)) = \sum_{i=\text{۱}}^{n} (\text{۲}i - n - \text{۱})x_i$$

اگر n زوج باشد، مثلاً $n = \text{۲}m$،

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=m+\text{۱}}^{\text{۲}m} (\text{۲}i - \text{۲}m - \text{۱})x_i - \sum_{i=\text{۱}}^{m} (\text{۲}m + \text{۱} - \text{۲}i)x_i \\ &\leqslant \sum_{i=m+\text{۱}}^{\text{۲}m} (\text{۲}i - \text{۲}m - \text{۱}) \end{aligned}$$

(آخرین مجموع در رابطهٔ بالا متناظر با انتخاب $x_\text{۱} = x_\text{۲} = \cdots = x_m = \circ$ و $x_{m+\text{۱}} = \cdots = x_{\text{۲}m} = \text{۱}$ در S است.) اما روشن است که

$$\sum_{i=m+\text{۱}}^{\text{۲}m} (\text{۲}i - \text{۲}m - \text{۱}) = \text{۱} + \text{۳} + \text{۵} + \cdots + (\text{۲}m - \text{۱}) = \frac{m}{\text{۲}}(\text{۲}m) = \frac{(\text{۲}m)^\text{۲}}{\text{۴}} = \frac{n^\text{۲}}{\text{۴}}$$

پس $S \leqslant \left(\frac{n}{\text{۲}}\right)^\text{۲}$.

اگر n فرد باشد، مثلاً $n = ۲m + ۱$،

$$S = \sum_{i=m+۲}^{۲m+۱} (۲i - ۲m - ۲)x_i - \sum_{i=۱}^{m+۱}(۲m + ۲ - ۲i)x_i$$

$$\leqslant \sum_{i=m+۲}^{۲m+۱} (۲i - ۲m - ۲) = ۲ + ۴ + ۶ + \cdots + ۲m$$

$$= ۲(۱ + ۲ + \cdots + m)$$

$$= ۲\left(\frac{m}{۲}\right)(m + ۱) = \left(\frac{n-۱}{۲}\right)\left(\frac{n+۱}{۲}\right) = \frac{n^۲ - ۱}{۴} = \left[\frac{n^۲}{۴}\right]$$

بنابراین

$$S(n) = \left[\frac{n^۲}{۴}\right]$$

مسألهٔ ۹۸. قانونهای زیر تعمیم مثالهای بیان شده‌اند:

$$\frac{۱}{۲n - ۱} + \frac{۱}{۲n + ۱} = \frac{۴n}{۴n^۲ - ۱}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

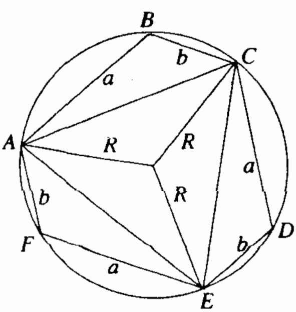
$$(۴n)^۲ + (۴n^۲ - ۱)^۲ = (۴n^۲ + ۱)^۲, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

و این قانونها به‌آسانی ثابت می‌شوند.

مسألهٔ ۹۹. به‌طور کلیتر فرض کنید علی $n + ۱$ سکه و محمد n سکه پرتاب کند. در این‌صورت علی از محمد یا بیشتر «شیر» می‌آورد یا بیشتر «خط»، ولی این دو حالت باهم روی نمی‌دهند. چون این دو پیشامد متقارن‌اند، احتمال وقوع هریک از آنها $\frac{۱}{۲}$ است.

تمرین. با استفاده از این نتیجه اتحاد دوجمله‌ای را به‌دست آورید.

مسألهٔ ۱۰۰. می‌توان ضلعهای شش‌ضلعی را طوری تجدید آرایش داد که طول هر دو ضلع متوالی a و b باشد (شکل ۱۰۸ را ببینید). چون همهٔ زاویه‌های $ABCDEF$ همنهشت‌اند، هریک از آنها ۱۲۰° است. بنابر قانون کسینوسها،



شکل ۱۰۸

$$\overline{AC}^۲ = ۲R^۲(۱ - \cos ۱۲۰^\circ) = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos ۱۲۰^\circ$$

و یا

$$۳R^۲ = a^۲ + ab + b^۲$$

مسألهٔ ۱۰۱. x را مبنا می‌گیریم.

الف) $۱۰۲۰۱ = x^۴ + ۲x^۲ + ۱ = (x^۲ + ۱)^۲$

ب) $(x^۲-x-۱)(x^۲+x+۱)=x^۴+x^۲+۱=۱۰۱۰۱$، و چون $x\geqslant ۲$، هر دو عامل بزرگتر از ۱ هستند.

ج) $(x^۳-x^۲+۱)(x^۲+x+۱)=x^۵+x+۱=۱۰۰۰۱۱$، و بازهم هر دو عامل بزرگتر از ۱ هستند.

مسألهٔ ۱۰۲. این n نفر را با $p_۱$، $p_۲$، $\cdots$ و p_n نشان می‌دهیم و وقتی‌که p_i به p_j تلفن می‌کند می‌نویسیم $p_i\to p_j$. فرض کنید $f(n)$ حداقل تعداد مکالمه‌های لازم باشد که همهٔ افراد از همهٔ اطلاعات آگاه شوند. دنبالهٔ خاص

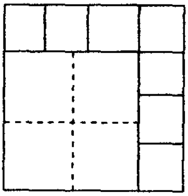
$$p_۱\to p_n,\ p_۲\to p_n,\ \cdots,\ p_{n-۱}\to p_n,\ p_n\to p_{n-۱},\ p_n\to p_{n-۲},\ \cdots,\ p_n\to p_۱$$

حاوی $۲n-۲$ مکالمه است و با این دنباله از مکالمه‌ها همهٔ افراد از همهٔ اطلاعات آگاه می‌شوند؛ بنابراین، $f(n)\leqslant ۲n-۲$.

فرض کنید دنباله‌ای از مکالمه‌ها داریم که طی آنها همه از همهٔ اطلاعات آگاه می‌شوند. مکالمه‌ای را که در انتهای آن شنونده (که او را p می‌نامیم) نخستین کسی است که از همهٔ اطلاعات آگاه می‌شود مکالمهٔ «حساس» می‌نامیم. روشن است که هر یک از $n-۱$ نفر غیر از p باید دست‌کم یک‌بار پیش از انتهای مکالمهٔ حساس به p تلفن کرده باشد (چون در غیر این‌صورت ممکن نیست p همهٔ اطلاعات را بداند). گذشته از این، هریک از $n-۱$ نفر غیر از p باید دست‌کم یک‌بار بعد از مکالمهٔ حساس طرف صحبت باشد (چون در انتهای مکالمهٔ حساس هیچ‌یک از این $n-۱$ نفر همهٔ اطلاعات را نمی‌داند). پس این دنباله حاوی دست‌کم $۲n-۲$ مکالمه است.

بنابراین $f(n)=۲n-۲$.

مسألهٔ ۱۰۳. فرض کنید k عددی صحیح باشد و $k\geqslant ۲$. مربع را می‌توان به $۲k$ مربع ناهمپوش تقسیم کرد (مثلاً، در حالتی‌که $k=۴$، با کشیدن خطهای پر در شکل ۱۰۹). اگر یکی از این مربعها را نیز به ۴ مربع ناهمپوش تقسیم کنیم، مربع اصلی به $۲k+۳$ مربع ناهمپوش تقسیم می‌شود. پس به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، $n\geqslant ۶$، مربع را می‌توان به n مربع تقسیم کرد. (آیا مربع را می‌توان به ۲، ۳ و یا ۵ مربع تقسیم‌کرد؟ چرا؟)



شکل ۱۰۹

مسألهٔ ۱۰۴. راه‌حل اول. فرض کنید $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{AD}$ (شکل ۱۱۰ را ببینید). در این‌صورت شرط داده شده در صورت مسأله چنین است

$$\overrightarrow{v}^۲+(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{u})^۲=\overrightarrow{u}^۲+(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u})^۲+(\overrightarrow{w}-\overrightarrow{v})^۲+\overrightarrow{w}^۲$$

بنابراین

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}-۲\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}$$

$$=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}-۲\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}-۲\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w}$$

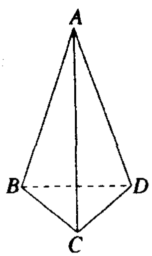
درنتیجه

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}\,)^۲$$
$$= \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w} - ۲\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v} - ۲\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u} + ۲\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u} = ۰$$

و یا $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$. پس $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

راه‌حل دوم. فرض کنید مختصات دکارتی A، B، C و D در فضا به‌ترتیب $(r,۰,۰)$، $(۰,۰,۰)$، $(s,t,۰)$ و (u,v,w) باشد. (گرفتن B در مبدأ و صفحهٔ ABC روی صفحهٔ xy از کلیت استدلال نمی‌کاهد.) باید ثابت کنیم $u = r + s$، $v = t$ و $w = ۰$. رابطهٔ میان طول ضلعها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$(s-r)^۲ + t^۲ + u^۲ + v^۲ + w^۲$$
$$= r^۲ + s^۲ + t^۲ + (u-s)^۲ + (v-t)^۲ + w^۲ + (u-r)^۲ + v^۲ + w^۲$$



شکل ۱۱۰

یا

$$-۲rs = (v-t)^۲ + w^۲ + r^۲ + s^۲ + u^۲ - ۲us - ۲ur$$

و یا

$$۰ = (v-t)^۲ + w^۲ + (r+s-u)^۲$$

پس $v - t = w = r + s - u = ۰$ و این همان نتیجهٔ مطلوب است.

مسألهٔ ۱۰۵. روش اثباتمان برهان خلف است. فرض کنید چندوجهی موردنظر F وجه داشته باشد و هیچ دووجهی تعداد یکسانی یال نداشته باشند. وجهی که تعداد یالهایش کمترین است دست‌کم سه یال دارد، وجه بعدی دست‌کم چهار یال دارد، و غیره. وجهی که تعداد یالهایش بیشترین است دست‌کم $F + ۲$ یال دارد. هریک از یالهای این «زیادترین» وجه بین این وجه و وجه دیگری از چندوجهی مشترک است. پس باید دست‌کم $F + ۳$ وجه داشته باشیم و این تناقض است.

با استدلال مشابهی می‌توان ثابت کرد که چهاروجه وجود دارد که دو تا از آنها یک تعداد یال و دوتای دیگر نیز یک تعداد یال دارند. همچنین، اگر به‌جای وجه و تعداد یال، به‌ترتیب، رأس و ظرفیت (یعنی تعداد یالهایی که از یک رأس خارج می‌شوند) قرار دهیم، دوگان این نتیجه را به‌دست می‌آوریم.

مسألهٔ ۱۰۶. فرض کنید BC خط PR را در T قطع کند. در این‌صورت

(مساحت چهارضلعی $PSBT$) = (مساحت $\triangle PSB$) + (مساحت $\triangle PBT$)

$$= \frac{۳\sqrt{۳}}{۴}(\overline{SB} + \overline{BT})$$

چون دوران ۶۰° حول نقطهٔ P در جهت ساعتگرد A را به B و S را به T منتقل می‌کند، پس $\overline{BT} = \overline{AS} = ۲$. بنابراین $\overline{SB} + \overline{BT} = ۳$ و مساحت مطلوب $\frac{۹\sqrt{۳}}{۴}$ است.

مسألهٔ ۱۰۷. راه‌حل اول (به‌استقرا). نتیجه به‌ازای $n = ۱$ برقرار است. فرض کنید نتیجه به‌ازای $n = k$ برقرار باشد، یعنی

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \cdots + \frac{۱}{۲k - ۱} = \frac{۱}{k} + \frac{۱}{k + ۱} + \cdots + \frac{۱}{۲k - ۱}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} & ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \cdots + \frac{۱}{۲k - ۱} - \frac{۱}{۲k} + \frac{۱}{۲k + ۱} \\ &= \left(\frac{۱}{k} + \frac{۱}{k + ۱} + \cdots + \frac{۱}{۲k - ۱}\right) - \frac{۱}{۲k} + \frac{۱}{۲k + ۱} \\ &= \frac{۱}{k + ۱} + \cdots + \frac{۱}{۲k - ۱} + \left(\frac{۱}{k} - \frac{۱}{۲k}\right) + \frac{۱}{۲k + ۱} \\ &= \frac{۱}{k + ۱} + \cdots + \frac{۱}{۲k - ۱} + \frac{۱}{۲k} + \frac{۱}{۲k + ۱} \end{aligned}$$

راه‌حل دوم. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} & ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲n - ۱} \\ &= \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۲n - ۱}\right) - ۲\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۶} + \cdots + \frac{۱}{۲n - ۲}\right) \\ &= \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۲n - ۱}\right) - \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n - ۱}\right) \\ &= \frac{۱}{n} + \frac{۱}{n + ۱} + \cdots + \frac{۱}{۲n - ۱} \end{aligned}$$

مسألهٔ ۱۰۸. راه‌حل اول (به‌روش استقرای ریاضی). چون

$$۲ + h(۱) = ۲ + ۱ = ۲\left(۱ + \frac{۱}{۲}\right) = ۲h(۲)$$

حکم به‌ازای $n = ۲$ درست است. اگر

$$n + h(۱) + \cdots + h(n - ۱) = nh(n)$$

به‌ازای $n \geqslant ۲$ برقرار باشد، با اضافه کردن $h(n) + ۱$ به دو طرف نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} & n + ۱ + h(۱) + h(۲) + \cdots + h(n - ۱) + h(n) = nh(n) + ۱ + h(n) \\ &= (n + ۱)h(n) + ۱ = (n + ۱)\left\{h(n + ۱) - \frac{۱}{n + ۱}\right\} + ۱ \\ &= (n + ۱)h(n + ۱) \end{aligned}$$

یعنی حکم به‌ازای $n + ۱$ درست است.

راه‌حل دوم. می‌توان نوشت

$$
\begin{aligned}
&n + h(۱) + h(۲) + \cdots + h(n-۱) \\
&= n + ۱ \\
&\quad + ۱ + \frac{۱}{۲} \\
&\quad + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n-۲} \\
&\quad + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n-۲} + \frac{۱}{n-۱} \\
&= n + (n-۱)۱ + (n-۲)\frac{۱}{۲} + (n-۳)\frac{۱}{۳} + \cdots + ۲\left(\frac{۱}{n-۲}\right) + ۱\left(\frac{۱}{n-۱}\right) \\
&= n + (n-۱) + \left(\frac{n}{۲}-۱\right) + \left(\frac{n}{۳}-۱\right) + \cdots + \left(\frac{n}{n-۲}-۱\right) + \left(\frac{n}{n-۱}-۱\right) \\
&= n + n\left\{۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n-۱}\right\} - (n-۱)۱ \\
&= ۱ + n\left\{h(n) - \frac{۱}{n}\right\} = nh(n)
\end{aligned}
$$

به‌طور کلیتر، اگر $s_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$، $n = ۱, ۲, ۳, \cdots$، آنگاه

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=۱}^{n-۱} s_r &= \sum_{r=۱}^{n-۱}\sum_{t=۱}^{r} a_t = \sum_{t=۱}^{n-۱}\sum_{r=t}^{n-۱} a_t = \sum_{t=۱}^{n-۱}(n-t)a_t \\
&= n\sum_{t=۱}^{n-۱} a_t - \sum_{t=۱}^{n-۱} ta_t \\
&= ns_{n-۱} - \sum_{t=۱}^{n-۱} ta_t
\end{aligned}
$$

در این مسأله $a_t = \frac{۱}{t}$ و همان نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۱۰۹. به‌ازای هر عدد صحیح مانند k، $k \geqslant ۰$، باقیمانده‌های تقسیم پنج عدد صحیح $k+۱$، $k+۲$، $\cdots$ و $k+۵$ بر ۵، پنج عدد متمایزند، در ضمن باقیماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح نامنفی بر ۵ یکی از عددهای ۰، ۱، ۲، ۳ و یا ۴ است. پس مجموع موردنظر به‌پیمانهٔ ۵ همنهشت است با

$$۰^n + ۱^n + ۲^n + ۳^n + ۴^n = ۱ + ۲^n + ۳^n + ۴^n$$

اکنون توجه کنید که به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی مانند m، به‌آسانی می‌توان همنهشتهای زیر را به‌پیمانهٔ ۵ ثابت کرد

$$۲^{۴m} \equiv ۱, \quad ۲^{۴m+۱} \equiv ۲, \quad ۲^{۴m+۲} \equiv ۴, \quad ۲^{۴m+۳} \equiv ۳$$

$$۳^{۴m} \equiv ۱, \quad ۳^{۴m+۱} \equiv ۳, \quad ۳^{۴m+۲} \equiv ۴, \quad ۳^{۴m+۳} \equiv ۲$$

$$۴^{۴m} \equiv ۱, \quad ۴^{۴m+۱} \equiv ۴, \quad ۴^{۴m+۲} \equiv ۱, \quad ۴^{۴m+۳} \equiv ۴$$

پس مجموع موردنظر به‌پیمانهٔ ۵ همنهشت است با

$$۱+۱+۱+۱=۴ \qquad n=۴m$$

$$۱+۲+۳+۴\equiv ۰ \qquad n=۴m+۱$$

$$۱+۴+۴+۱\equiv ۰ \qquad n=۴m+۲$$

$$۱+۳+۲+۴\equiv ۰ \qquad n=۴m+۳$$

پس مجموع موردنظر به‌ازای هر k، $k \geqslant ۰$، و هر nای که مضرب ۴ نباشد بر ۵ بخش‌پذیر است، و به‌ازای هر k، $k \geqslant ۰$، و هر nای که مضرب ۴ باشد بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

راه‌حل را فشرده‌تر نیز می‌توان عرضه کرد. همنهشتهای زیر به‌پیمانهٔ ۵ درست‌اند

$$۱^n+۲^n+۳^n+۴^n \equiv ۱^n+۲^n+(۵-۲)^n+(۵-۱)^n$$

$$\equiv ۱^n+(-۱)^n+۲^n+(-۲)^n$$

اگر n فرد باشد، $(-۱)^n=-۱$ و $(-۲)^n=-۲^n$ و درنتیجه

$$۱^n+۲^n+۳^n+۴^n \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ ۵})$$

اگر n زوج باشد، $n=۲m$، $(-۱)^n=۱$ و $(-۲)^n=۲^n$ و درنتیجه

$$۱^n+۲^n+۳^n+۴^n \equiv ۲\left[۱^{۲m}+۲^{۲m}\right] \equiv ۲\left[۱+۴^m\right]$$

$$\equiv ۲\left[۱+(-۱)^m\right] \ (\text{به‌پیمانهٔ ۵})$$

و $۲\left[۱+(-۱)^m\right]$ اگر m فرد باشد برابر ۰ و اگر m زوج باشد مخالف صفر است.

بنابراین $۱^n+۲^n+۳^n+۴^n$ بر ۵ بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر n مضرب ۴ نباشد.

مسألهٔ ۱۱۰. مثلث ABC را با شرطهای $\angle A=\alpha$ و $\angle B=\beta$ و خط DE را به‌طول برابر با محیط مثلث ABC رسم کنید. پاره‌خط UV را طوری رسم کنید که $\frac{\overline{UV}}{\overline{AB}}=\frac{p}{\overline{DE}}$. مثلث UVW را با شرطهای $\angle U=\alpha$ و $\angle V=\beta$ رسم کنید. UVW مثلث مطلوب است.

مسألهٔ ۱۱۱. اگر y و z را ثابت و x را متغیر فرض کنیم، $P(x,y,z)$ چندجمله‌ایی از x خواهد بود و $x-(-y-z)$ عامل این چندجمله‌ای است اگر و فقط اگر $P(-y-z,y,z)=۰$. پس مقادیری را

برای k جستجو می‌کنیم که به‌ازای آنها $P(-y-z,y,z)=0$. این برابری چنین است

$$(-y-z)^5+y^5+z^5+k((-y-z)^3+y^3+z^3)((-y-z)^2+y^2+z^2)=0$$

و یا

$$-(5+6k)yz(y+z)(y^2+yz+z^2)=0$$

و درنتیجه $k=-\frac{5}{6}$.

در مورد قسمت دوم مسأله فرض کنید x، y و z ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم

$$t^3-at^2+bt-c=0 \tag{1}$$

باشند که در آن

$$a=x+y+z,\ \ b=xy+yz+zx,\ \ c=xyz$$

فرض کنید $S_n=x^n+y^n+z^n$. در این‌صورت

$$S_1=a,\ \ S_2=a^2-2b \tag{2}$$

برای به‌دست آوردن S_3، ریشه‌های معادلهٔ (۱) را به‌ترتیب در آن قرار می‌دهیم و سه رابطهٔ حاصل را باهم جمع می‌کنیم:

$$S_3-aS_2+bS_1-3c=0$$

با توجه به رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آوریم

$$S_3=a^3-3ab+3c \tag{3}$$

معادلهٔ (۱) را در t ضرب می‌کنیم، ریشه‌ها را در معادلهٔ حاصل قرار می‌دهیم و سه رابطهٔ به‌دست آمده را باهم جمع می‌کنیم؛ سپس معادلهٔ (۱) را در t^2 ضرب می‌کنیم، ریشه‌ها را در معادلهٔ حاصل قرار می‌دهیم و سه رابطهٔ به‌دست آمده را باهم جمع می‌کنیم. به‌دست می‌آوریم

$$S_4-aS_3+bS_2-cS_1=0$$

$$S_5-aS_4+bS_3-cS_2=0$$

این دو رابطه همراه با رابطه‌های (۲) و (۳) نتیجه می‌دهند

$$S_4=a^4-4a^2b+4ac+2b^2$$

$$S_5=a^5-5a^3b+5a^2c+5ab^2-5bc$$

سرانجام اینکه

$$\begin{aligned}
&6(x^5+y^5+z^5)-5(x^3+y^3+z^3)(x^2+y^2+z^2)\\
&=6S_5-5S_3S_2=a^2(a^3-5ab+15c)\\
&=(x+y+z)^2\left\{(x+y+z)^3-5(x+y+z)(xy+yz+zx)+15xyz\right\}\\
&=(x+y+z)^2\left\{x^3+y^3+z^3+6xyz-2(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)\right\}
\end{aligned}$$

مسألهٔ ۱۱۲. از $(p-۱)^۲ \geqslant ۰$ نتیجه می‌شود $۱+p+p^۲ \geqslant ۳p > ۰$، و همین‌طور در مورد q، r و s. حاصل‌ضرب این چهار نابرابری نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد.

مسألهٔ ۱۱۳. می‌نویسیم $x=[x]+e$ که در آن $۰ \leqslant e < ۱$. در این‌صورت

$$[nx]=n[x]+[ne]$$

و درنتیجه، چون $[ne] \leqslant ne < n$،

$$\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x]+\left[\frac{[ne]}{n}\right]=[x]$$

مسألهٔ ۱۱۴. در مورد دستهٔ (الف) قانونی کلی چنین است

$$\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i+۱}\binom{n}{i}\frac{۱}{i}=\sum_{j=۱}^{n}\frac{۱}{j},\quad n=۱,۲,۳,\cdots$$

این برابری را می‌توان به‌استقرا ثابت کرد. برابری به‌ازای $n=۱$ برقرار است. فرض کنید که برابری به‌ازای $n=k$ برقرار باشد:

$$\sum_{i=۱}^{k}(-۱)^{i+۱}\binom{k}{i}\frac{۱}{i}=\sum_{j=۱}^{k}\frac{۱}{j}$$

در این‌صورت

$$\begin{aligned}\sum_{i=۱}^{k+۱}(-۱)^{i+۱}\binom{k+۱}{i}\frac{۱}{i}&=\sum_{i=۱}^{k+۱}(-۱)^{i+۱}\left\{\binom{k}{i-۱}+\binom{k}{i}\right\}\frac{۱}{i}\\&=\sum_{i=۱}^{k+۱}(-۱)^{i+۱}\binom{k}{i-۱}\frac{۱}{i}+\sum_{i=۱}^{k}(-۱)^{i+۱}\binom{k}{i}\frac{۱}{i}\\&=\sum_{i=۱}^{k+۱}(-۱)^{i+۱}\binom{k+۱}{i}\frac{۱}{k+۱}+\left\{۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{k}\right\}\\&=\frac{۱}{k+۱}\left\{۱-(۱-۱)^{k+۱}\right\}+\left\{۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{k}\right\}\\&=۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{k}+\frac{۱}{k+۱}\end{aligned}$$

در مورد دستهٔ (ب) قانونی کلی چنین است

$$\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^{i+۱}\binom{n}{i}\left\{۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{i}\right\}=\frac{۱}{n},\quad n=۱,۲,۳,\cdots$$

برهانی مستقیم عرضه می‌کنیم. با تغییر ترتیب مجموعیابی، طرف چپ این برابری را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j} &= \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{j}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left\{\sum_{i=j}^{n-1}(-1)^{i+1}\left[\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right]+(-1)^{n+1}\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\left\{(-1)^{j+1}\left[\binom{n-1}{j-1}+\binom{n-1}{j}-\binom{n-1}{j}-\binom{n-1}{j+1}\right.\right.\\ &\qquad\left.\left.+\cdots+(-1)^{n+1}\right]\right\}\\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{1}{j}\binom{n-1}{j-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}\\ &= \frac{1}{n}\{1-(1-1)^{n}\} = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

رابطهٔ بین دو دسته برابری (الف) و (ب) را می‌توان تعمیم داد. فرض کنید دنبالهٔ (x_n) از عددهای حقیقی مفروض باشد و دنبالهٔ (y_n) به‌صورت زیر تعریف شود

$$y_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}x_i, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

در این‌صورت

$$x_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}y_i, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

باید ثابت کنیم که به‌ازای هر n،

$$x_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\binom{n}{i}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}\binom{i}{j}x_j$$

ترتیب مجموعیابی را تغییر می‌دهیم و سمت راست این رابطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j}x_j\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j} = x_n + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}x_j\sum_{i=j}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}$$

اما وقتی‌که $۱ \leqslant j \leqslant n - ۱$،

$$\sum_{i=j}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}\binom{i}{j} = \sum_{i=j}^{n}(-۱)^i\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)\left(\frac{i!}{j!(i-j)!}\right)$$
$$= \frac{n!}{(n-j)!j!}\sum_{i=j}^{n}(-۱)^i\left(\frac{(n-j)!}{(n-i)!(i-j)!}\right)$$
$$= \binom{n}{j}\sum_{i=j}^{n}(-۱)^i\binom{n-j}{i-j}$$
$$= (-۱)^j\binom{n}{j}\sum_{r=۰}^{n-j}(-۱)^r\binom{n-j}{r}$$
$$= (-۱)^j\binom{n}{j}(۱-۱)^{n-j} = ۰$$

و نتیجه حاصل می‌شود.

به‌این ترتیب، با مفروض بودن درستی هریک از دو دسته برابری (الف) یا (ب)، می‌توانیم درستی دستهٔ دیگر را نتیجه بگیریم.

مسألهٔ ۱۱۵. با درنظر گرفتن غلاف همهٔ نقطه‌ها نتیجه می‌شود که همیشه می‌توانیم دو نقطه، مثلاً A و B، بیابیم به‌طوری‌که $۲n + ۱$ نقطهٔ دیگر همگی در یک طرف خط AB واقع باشند. این نقطه‌ها را با $P_۱$، $P_۲$، $\cdots$ و $P_{۲n+۱}$ چنان نامگذاری می‌کنیم که

$$\angle AP_۱B \leqslant \angle AP_۲B \leqslant \cdots \leqslant \angle AP_{۲n+۱}B$$

در واقع، این زاویه‌ها از یکدیگر متمایزند؛ چون اگر دو زاویه برابر باشند، مثلاً $\angle AP_iB = \angle AP_jB$، چهار نقطهٔ A، B، P_i و P_j بر یک دایره واقع خواهند بود. دایره‌ای را درنظر بگیرید که از A، B و $P_{n+۱}$ می‌گذرد. نقطه‌های $P_۱$، $P_۲$، $\cdots$ و P_n خارج از این دایره و نقطه‌های $P_{n+۲}$، $P_{n+۳}$، $\cdots$ و $P_{۲n+۱}$ درون این دایره واقع‌اند.

این نتیجه تعمیمی از حکم مسألهٔ ۲۶ است. (این نتیجه را می‌توانید در مورد نقاطی در فضا و روی کره تعمیم دهید.)

مسألهٔ ۱۱۶. راه‌حل اول. حالتی حدی برای آرایش بیان شده این است که دو تا از خطها با صفحهٔ مفروض موازی باشند؛ مثلاً فرض کنید $a = b = \infty$ و $c = d$، که در آن d فاصلهٔ نقطهٔ P از صفحهٔ مفروض است. در این‌صورت باید ثابت کنیم

$$\frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲} = \frac{۱}{d^۲}$$

فرض کنید A، B و C نقطه‌های انتهایی سه پاره‌خط، روی صفحهٔ مفروض، باشند. حجم چهاروجهی $PABC$ برابر است با $\frac{d\triangle}{۳} = \frac{abc}{۶}$ که در آن $\triangle$ مساحت مثلث ABC است. اگر شکلی مسطح را

بر سه صفحه که هر جفت از آنها متعامدند تصویر کنیم، مربع مساحت این شکل با مجموع مربعهای مساحت سه تصویر برابر است. بنابراین

$$\triangle^۲ = \frac{۱}{۴}(a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲)$$

و درنتیجه

$$a^۲b^۲c^۲ = ۴d^۲\triangle^۲ = d^۲(a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲)$$

و

$$\frac{۱}{a^۲} + \frac{۱}{b^۲} + \frac{۱}{c^۲} = \frac{۱}{d^۲}$$

راه‌حل دوم (به‌روش هندسهٔ تحلیلی). نقطهٔ P را مبدأ و سه خط را که هر جفت از آنها متعامدند محورهای مختصات می‌گیریم. در این‌صورت معادلهٔ صفحهٔ مفروض چنین است

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = ۱$$

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P از صفحهٔ مفروض برابر است با

$$\frac{۱}{\sqrt{a^{-۲} + b^{-۲} + c^{-۲}}}$$

مسألهٔ ۱۱۷. نابرابری سمت چپ به‌ازای هر سه عدد مثبت برقرار است، چون

$$(a+b+c)^۲ - ۳(bc+ca+ab) = \frac{۱}{۲}\left[(a-b)^۲ + (b-c)^۲ + (c-a)^۲\right] \geqslant ۰$$

برای اثبات نابرابری دوم از شرطهای

$$c+a > b, \quad a+b > c, \quad b+c > a$$

(که در هر مثلث برقرارند) استفاده می‌کنیم، و نتیجه می‌گیریم که

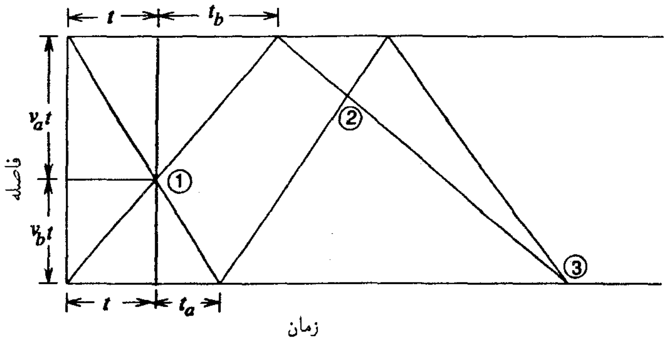
$$|a-b| < c, \quad |b-c| < a, \quad |c-a| < b$$

و بنابراین

$$۴(bc+ca+ab) - (a+b+c)^۲ = c^۲ - (a-b)^۲ + a^۲ - (b-c)^۲ + b^۲ - (c-a)^۲ > ۰$$

راه دیگری برای اثبات نابرابری سمت راست این است که توجه کنید $۴(bc+ca+ab) - (a+b+c)^۲$ شانزده برابر مربع مساحت مثلثی به‌طول ضلعهای $\sqrt{a}$، $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ است. (توجه کنید که اگر a، b و c طول سه ضلع مثلثی باشند، به‌ازای هر n، $n > ۱$، $a^{\frac{۱}{n}}$، $b^{\frac{۱}{n}}$ و $c^{\frac{۱}{n}}$ نیز طول سه ضلع مثلثی هستند.)

مسألهٔ ۱۱۸. راه‌حل اول. به‌طور کلیتر، فرض کنید سرعت علی و محمد به‌ترتیب v_a و v_b باشد، و t_a و t_b مدت زمانهایی باشند که طول می‌کشد تا، به‌ترتیب، علی و محمد پس از اولین ملاقات در جاده به شهرهای B و A برسند. حرکت دو راننده را می‌توان با نمودار «خط جهانی» مانند شکل ۱۱۱ نمایش داد.



شکل۱۱۱

اگر t زمانی باشد که از ظهر تا هنگام اولین ملاقات در جاده سپری شده است، از نمودار نتیجه می‌شود که

$$v_a = \frac{v_b t}{t_a}, \qquad v_b = \frac{v_a t}{t_b}$$

و بنابراین

$$t = \sqrt{t_a t_b}, \qquad \frac{v_a}{v_b} = \sqrt{\frac{t_b}{t_a}}$$

با استفاده از داده‌های مسأله به‌دست می‌آوریم $t = ۳۰\ \text{min}$ و $v_a = ۶۰\,\text{kph}$.

برای یافتن زمان ملاقاتهای بعدی، خطهای جهانی علی و محمد را همان‌طورکه در شکل نشان داده شده است امتداد می‌دهیم. پس از پنج ملاقات، الگویی تناوبی به‌دست می‌آوریم که حول نقطهٔ ملاقات سوم، که در شهر B روی می‌دهد، تقارن مرکزی دارد. به این‌ترتیب نتیجه می‌شود که nاُمین زمان ملاقات $(n - ۱)۶۰ + ۳۰$ دقیقه بعدازظهر است.

راه‌حل دوم. شرایط مسأله معادله‌های زیر را به‌دست می‌دهند

$$(t + ۲۰)v_a = (t + ۴۵)۴۰ = (v_a + ۴۰)t = ۶۰d$$

در این معادله‌ها d فاصلهٔ شهرهای A و B برحسب کیلومتر، v_a سرعت علی برحسب کیلومتر برساعت و t زمان اولین ملاقات برحسب دقیقه است و ضریب ۶۰ برای تبدیل واحدهای زمان به‌کار گرفته شده است. از این معادله‌ها به‌دست می‌آوریم $۲۰v_a = ۴۰t$ و $v_a t = ۴۵ \times ۴۰$؛ پس $v_a = ۲t$ و $۲t^۲ = ۴۵ \times ۴۰$. بنابراین $t = ۳۰\ \text{min}$، $v_a = ۶۰\,\text{kph}$ و $d = ۵۰\,\text{km}$.

پس از اولین ملاقات اتومبیلها با سرعت نسبی $۱۰۰\,\text{kph}$ از یکدیگر جدا می‌شوند و مدت ۲۰ دقیقه با همین سرعت نسبی حرکت می‌کنند تا علی به شهر B برسد؛ بعد از آن اتومبیلها به‌مدت ۲۵ دقیقه با سرعت نسبی ۲۰ کیلومتر برساعت به یکدیگر نزدیک می‌شوند تا محمد به شهر A برسد. در این مدت علی و محمد ابتدا $\frac{۱۰۰}{۳}$ کیلومتر ازهم دور و سپس $\frac{۲۵}{۳}$ کیلومتر به‌هم نزدیک شده‌اند. وقتی‌که

محمد از شهر A برمی‌گردد با سرعت نسبی ۱۰۰kph به علی که به‌سوی شهر A در حرکت است نزدیک می‌شود. پس علی و محمد ۱۵ دقیقه بعد از برگشتن محمد از A دوباره به‌یکدیگر می‌رسند. کلّ فاصلهٔ زمانی بین اولین و دومین ملاقات ۶۰ دقیقه است.

از استدلالی مشابه معلوم می‌شود که سومین ملاقات ۶۰ دقیقه بعد از ملاقات دوم و در شهر B روی می‌دهد و، بنابر تقارن، ملاقاتهای بعدی در فاصله‌های زمانی ۶۰ دقیقه روی می‌دهند. بنابراین nاُمین ملاقات علی و محمد در جاده $۶۰(n-۱)+۳۰$ دقیقه بعدازظهر روی می‌دهد.

مسألهٔ ۱۱۹. فرض می‌کنیم دایرهٔ محیطی مثلث BCG پاره‌خط FJ را در نقطهٔ O قطع می‌کند. چون $\angle BCG = \angle GCO = ۶۰^\circ$ و B، C، O و G همدایره‌اند، پس $\angle BOG = \angle GBO = ۶۰^\circ$ و بنابراین مثلث BGO متساوی‌الاضلاع است. فرض کنید X مرکز شش‌ضلعی بزرگتر باشد. دوران ۶۰° در جهت پادساعتگرد حول G نقطه‌های B و C را به‌ترتیب به نقطه‌های O و X می‌برد. بنابراین $\overline{BC} = \overline{OX}$ و

$$\overline{FO} = \overline{FC} + \overline{CO} = ۲\overline{BC} + \overline{CO} = ۲\overline{OX} + \overline{CO}$$

$$= \overline{OX} + CX = \overline{OJ}$$

مسألهٔ ۱۲۰. راه‌حل اول. شرط موردنظر هم‌ارز است با

$$(۱+x)^n \equiv ۱ + x^n \quad (\text{به‌پیمانهٔ } ۲) \qquad (*)$$

اکنون توجه کنید که

$$(۱+x)^۲ \equiv ۱ + x^۲ \quad (\text{به‌پیمانهٔ } ۲)$$

$$(۱+x)^۴ \equiv (۱+x^۲)^۲ \equiv ۱ + x^۴ \quad (\text{به‌پیمانهٔ } ۲)$$

و با استفاده از استقرای ریاضی می‌توانیم ثابت کنیم که

$$(۱+x)^{۲^k} \equiv ۱ + x^{۲^k} \quad (\text{به‌پیمانهٔ } ۲)$$

یعنی اگر n توانی از ۲ باشد همنهشتی $(*)$ برقرار است. اگر n توانی از ۲ نباشد، آنگاه

$$n = ۲^{k_۱} + ۲^{k_۲} + \cdots$$

که در آن دست‌کم دو تا از k_iها متمایزند. در این‌صورت

$$(۱+x)^n = (۱+x)^{۲^{k_۱}}(۱+x)^{۲^{k_۲}}\cdots$$

$$\equiv (۱+x^{۲^{k_۱}})(۱+x^{۲^{k_۲}})\cdots \quad (\text{به‌پیمانهٔ } ۲)$$

و همنهشتی $(*)$ برقرار نیست. بنابراین $\binom{n}{۱}$، $\cdots$ و $\binom{n}{n-۱}$ همگی عددهایی صحیح و زوج‌اند اگر و فقط اگر n توانی از ۲ باشد.

راه‌حل دوم. برای اینکه روش کار را دریابید، توجه کنید که چرا $\binom{۱۲}{۴}$ باید فرد باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$\binom{۱۲}{۴} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹}{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

توجه کنید که ۲ چندبار در صورت و مخرج ظاهر می‌شود. بزرگترین توان ۲ که ۱۲ را می‌شمارد ۴ است، و این همان بزرگترین توان ۲ است که ۴ را، در مخرج، می‌شمارد. بنابراین لزوماً ۲ بزرگترین توان ۲ است که عددهای زوج بعدی در صورت و مخرج، یعنی ۱۰ و ۲، را می‌شمارد. پس هر عامل ۲ در صورت با یک عامل ۲ در مخرج حذف می‌شود. اگر p عددی فرد باشد، می‌توان تعمیمی از این نحوهٔ استدلال را در حالتی‌که $n = ۲^k p$ به‌کار برد و ثابت کرد که $\binom{n}{۲^k}$ فرد است.

توجه کنید که

$$\binom{n}{۲^k} = \frac{n(n-۱)\cdots(n-۲^k+۱)}{۲^k(۲^k-۱)\cdots ۱} = \prod_{i=۰}^{۲^k-۱} \frac{n-i}{۲^k-i}$$

به‌ازای هر i، $۰ \leqslant i \leqslant ۲^k - ۱$، می‌نویسیم $i = ۲^r q$ که در آن q فرد است و $r < k$. در این‌صورت هم به‌پیمانهٔ ۲^r و هم به‌پیمانهٔ $۲^{r+۱}$،

$$۲^k - i \equiv n - i \equiv -i$$

پس بزرگترین توان ۲ که $n - i$ را می‌شمارد همان بزرگترین توان ۲ است که $۲^k - i$ را می‌شمارد. پس $\binom{n}{۲^k}$ فرد است. اگر n توانی از ۲ نباشد، $p > ۱$ و $۱ \leqslant ۲^k \leqslant n - ۱$ و بنابراین $\binom{n}{j}$ به‌ازای همهٔ مقادیر j، $۱ \leqslant j \leqslant n - ۱$، زوج نیست. اگر n توانی از ۲ باشد، از استدلالی مشابه معلوم می‌شود که به‌ازای هر j، $۱ \leqslant j \leqslant n - ۱$، بزرگترین توان ۲ که صورت $\binom{n}{j}$ را می‌شمارد از بزرگترین توان ۲ که مخرج آن‌را می‌شمارد بزرگتر است.

مسألهٔ ۱۲۱. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $x - y$ مقسوم‌علیه $x^n - y^n$ است. چون

$$۲۱۴۱ - ۱۸۶۳ = ۱۷۷۰ - ۱۴۹۲ = ۲۷۸$$

عبارت موردنظر بر ۲۷۸ بخش‌پذیر است. همچنین، چون

$$۲۱۴۱ - ۱۷۷۰ = ۱۸۶۳ - ۱۴۹۲ = ۳۷۱$$

عبارت موردنظر بر ۳۷۱ نیز بخش‌پذیر است. چون ۳۷۱ نسبت به ۲۷۸ اول است، عبارت موردنظر بر $۱۹۴۶ \times ۵۳ = ۳۷۱ \times ۲۷۸$، و درنتیجه بر ۱۹۴۶ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۲۲. چندجمله‌ای $Q(x) = xP(x) - ۱$ را درنظر بگیرید. با توجه به ویژگیهای $P(x)$ می‌دانیم که $Q(x)$ چندجمله‌ایی از درجهٔ $n + ۱$ است و ۱، ۲، $\cdots$ و $n + ۱$ ریشه‌هایش هستند. همچنین چون $Q(۰) = -۱$، پس

$$Q(x) = \frac{(x-۱)(x-۲)\cdots(x-n-۱)}{(-۱)^n (n+۱)!}$$

بنابراین $Q(n+۲)=(-۱)^n$ و درنتیجه

$$P(n+۲)=\frac{۱+(-۱)^n}{n+۲}=\begin{cases}۰ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،}\\ \frac{۲}{n+۲} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،}\end{cases}$$

مسألهٔ ۱۲۳. فرض کنید $\log x=\frac{f(x)}{g(x)}$ و n عددی طبیعی باشد. در این‌صورت

$$\frac{f(x^n)}{g(x^n)}=\log x^n=n\log x=\frac{nf(x)}{g(x)}$$

پس به‌ازای هر n،

$$f(x^n)g(x)=nf(x)g(x^n)$$

اگر $f(x)=a_px^p+\cdots+a_۰$ و $g(x)=b_qx^q+\cdots+b_۰$، آنگاه

$$f(x^n)g(x)=a_pb_qx^{np+q}+\cdots+a_۰b_۰$$

و

$$nf(x)g(x^n)=na_pb_qx^{p+nq}+\cdots+na_۰b_۰$$

از مقایسهٔ ضرایب پیشرو در این دو چندجمله‌ای نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر n، $a_pb_q=na_pb_q$ و این ناممکن است.

ملاحظه. به‌طور کلیتر می‌توان ثابت کرد که $\log x$ جبری نیست، یعنی در هیچ معادله‌ای به‌شکل زیر، که در آن هر $P_i(x)$ چندجمله‌ای است، صدق نمی‌کند:

$$P_n(x)y^n+P_{n-۱}(x)y^{n-۱}+\cdots+P_۱(x)y+P_۰(x)=۰$$

این مطلب را می‌توان از این واقعیت که $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{\log x}{x}=۰$ نتیجه گرفت.

مسألهٔ ۱۲۴. فرض کنید زمانی که راننده به ساعت خود نگاه کرده m دقیقه بعد از ساعت h $(۰\leqslant h\leqslant ۱۱)$ بوده است. چون عقربهٔ دقیقه‌شمار در هربارگردش کامل عقربهٔ ساعت‌شمار ۱۲ گردش کامل انجام می‌دهد، پس

$$۵h+\left(\frac{m}{۶۰}\right)۵=m$$

یعنی

$$m=\frac{۶۰}{۱۱}h$$

اما طی مسافت ۸ مایل $۱۴\frac{۶}{۱۱}$ دقیقه طول کشیده است، و در لحظهٔ حرکت قطار تعداد دقیقه‌های سپری شده از ساعتی مشخص عددی صحیح بوده است. پس $m-\frac{۶}{۱۱}$ باید عددی صحیح باشد، یعنی $\frac{۶۰}{۱۱}h-\frac{۶}{۱۱}$ عددی صحیح است؛ پس

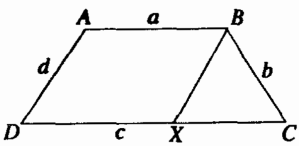
$$۶۰h-۶\equiv ۰\ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۱)$$

یا

$$۱۰h \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۱)$$

و بنابراین $h = ۱۰$ (چون $۱۱ \leqslant h \leqslant ۰$). پس $m = ۵۴\frac{۶}{۱۱}$ و قطار در ساعت ۴۰ : ۱۰ (صبح یا بعدازظهر) از ایستگاه حرکت کرده است.

مسألهٔ ۱۲۵. فرض کنید طول چهارضلع a، b، c و d باشند، AB با CD موازی باشد و $c > a$ (شکل ۱۱۲ را ببینید). اگر X نقطه‌ای روی DC باشد به‌طوری‌که $\overline{DX} = a$، طول سه ضلع مثلث XBC، d، b و $c - a$ هستند. پس ابتدا مثلث XBC را با این طول ضلعها رسم می‌کنیم؛ سپس CX را امتداد می‌دهیم و نقطهٔ D را روی این امتداد طوری می‌یابیم که $\overline{CD} = c$. بعد از B خطی موازی با CD رسم می‌کنیم و روی این خط نقطهٔ A را طوری مشخص می‌کنیم که $\overline{BA} = a$.

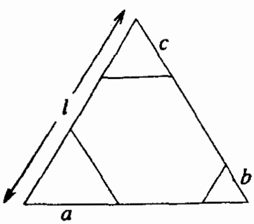


شکل ۱۱۲

مسألهٔ ۱۲۶. طول ضلع کاشیهای مثلثی شکل را واحد فرض می‌کنیم. توجه کنید که تعداد کاشیهای لازم برای تشکیل مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌طول ضلع x برابر است با

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲x - ۱) = x^۲$$

مثلث محیطی هر شش‌ضلعی از نوع مطلوب باید مثلثی متساوی‌الاضلاع، مثلاً به‌طول ضلع l، باشد (شکل ۱۱۳ را ببینید). برای به‌دست آوردن شش‌ضلعی باید سه مثلث متساوی‌الاضلاع به‌طول ضلعهای a، b و c را، که دراینجا $a \geqslant b \geqslant c > ۰$ و $l > a+b$، از سه گوشهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع به‌طول ضلع l برداریم.



شکل ۱۱۳

بنابراین عدد طبیعی n ویژگی موردنظر ما را دارد، اگر و فقط اگر

$$n = l^۲ - a^۲ - b^۲ - c^۲$$

که در آن $a \geqslant b \geqslant c > ۰$ و $l > a + b$.

تبصره. اگر $L = ۲l - (a + b + c)$، $A = l - (b + c)$، $B = l - (a + c)$ و $C = l - (a + b)$، اتحاد زیر را نتیجه بگیرید

$$L^۲ - A^۲ - B^۲ - C^۲ = l^۲ - a^۲ - b^۲ - c^۲$$

مسألهٔ ۱۲۷. چون ضرایب چندجمله‌ای $P(x)$ عددهایی صحیح و a، b و c عددهایی صحیح و متمایزند، از قضیهٔ عاملها نتیجه می‌شود که

$$\frac{P(a) - P(b)}{a - b}, \quad \frac{P(b) - P(c)}{b - c}, \quad \frac{P(c) - P(a)}{c - a}$$

عددهایی صحیح‌اند. فرض کنید $P(a) = b$، $P(b) = c$ و $P(c) = a$. در این‌صورت

$$\frac{b-c}{a-b}, \quad \frac{c-a}{b-c}, \quad \frac{a-b}{c-a}$$

عددهایی صحیح‌اند که حاصل‌ضربشان آشکارا ۱ است. پس قدرمطلق هریک از این عددها ۱ است و بنابراین

$$|a-b| = |b-c| = |c-a|$$

اما چون a، b و c متمایزند، این برابریها درست نیستند.

با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد که اگر $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_n عددهایی صحیح و متمایز باشند، ممکن نیست که همهٔ برابریهای زیر برقرار باشند

$$P(a_۱) = a_۲, \;\; P(a_۲) = a_۳, \;\; \cdots, \;\; P(a_{n-۱}) = a_n, \;\; P(a_n) = a_۱$$

مسألهٔ ۱۲۸. چون $a_۱ = \sum_{i=۱}^{n} r_i$ و $a_۲ = \sum_{۱\leqslant i<j\leqslant n} r_i r_j$، نتیجه می‌شود که

$$a_۱^۲ = \sum_{i=۱}^{n} r_i^۲ + ۲a_۲$$

بنابراین نابرابری موردنظر هم‌ارز است با

$$(n-۱)\left\{\sum_{i=۱}^{n} r_i^۲ + ۲a_۲\right\} \geqslant ۲na_۲$$

یا

$$(n-۱)\sum_{i=۱}^{n} r_i^۲ \geqslant ۲\sum_{۱\leqslant i<j\leqslant n} r_i r_j$$

و یا

$$\sum_{۱\leqslant i<j\leqslant n} (r_i - r_j)^۲ \geqslant ۰$$

نابرابری اخیر به‌روشنی برقرار است و از آن معلوم می‌شود که برابری دقیقاً وقتی روی می‌دهد که

$$r_۱ = r_۲ = \cdots = r_n$$

مسألهٔ ۱۲۹. به‌ازای هر مقدار مثبتی از n (که لزومی ندارد صحیح باشد)، از حالت تباهیده (یا حدی) $A = \pi$ و $B = C = ۰$ معلوم می‌شود که

$$(k(n) + \sin ۰) + (k(n) + \sin ۰) \geqslant k(n) + \sin\frac{\pi}{n}$$

و یا

$$k(n) \geqslant \sin\frac{\pi}{n}$$

بخصوص، وقتی‌که $n = ۱$، $k(۱) \geqslant ۰$. از طرف دیگر می‌دانیم که (بنابر قانون سینوسها) $\sin A$، $\sin B$ و $\sin C$ طول ضلعهای مثلثی متشابه با $\triangle ABC$ هستند. پس $k(۱) = ۰$.

فرض کنید $n \geqslant ۲$. چون $\sin\theta$ به‌ازای $۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$ تابعی صعودی و مثبت از θ است، و چون $\frac{A}{n} \leqslant \frac{\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{۲}$، نتیجه می‌شود $\sin\frac{A}{n} \leqslant \sin\frac{\pi}{n}$. بنابراین

$$\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{B}{n}\right) + \left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{C}{n}\right) \geqslant ۲\sin\frac{\pi}{n} \geqslant \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{A}{n}$$

نابرابریهای مشابهی نیز به‌ازای هر جایگشت A، B و C برقرارند. پس $k(n) = \sin\frac{\pi}{n}$.

ملاحظه. این نتیجه را می‌توان درمورد هر عدد حقیقی مانند n، $n \geqslant ۱$، تعمیم داد. اگر $u + \sin\frac{A}{n}$، $u + \sin\frac{B}{n}$ و $u + \sin\frac{C}{n}$ طول ضلعهای مثلثی باشند، از این که مجموع طولهای هر دو ضلع مثلث بزرگتر از طول ضلع سوم است نتیجه می‌شود

$$u \geqslant \sin\frac{A}{n} - \sin\frac{B}{n} - \sin\frac{C}{n}$$

جمله‌های طرف راست نابرابری بالا را به هر ترتیبی می‌توانیم جابه‌جا کنیم. چون $k(n)$ کوچکترین مقدار n با چنین ویژگیهایی است، باید

$$k(n) = \max_{A+B+C=\pi}\left\{\sin\frac{A}{n} - \sin\frac{B}{n} - \sin\frac{C}{n}\right\}$$
$$= \max\left\{\sin\frac{A}{n} - ۲\sin\frac{B+C}{۲n}\cos\frac{B-C}{۲n}\right\}$$

به‌ازای هر مقدار ثابتی از A، مقدار $B+C$ ثابت است و ماکسیمم وقتی حاصل می‌شود که $\cos\frac{B-C}{۲n}$ مینیمم باشد. چون

$$\cos\frac{B-C}{۲n} = \cos\frac{(\pi - A) - ۲B}{۲n}$$

این مینیمم وقتی روی می‌دهد که یا $B = ۰$ و یا $B = \pi - A$، یعنی $C = ۰$. در این‌صورت

$$k(n) = \max_{A+B=\pi}\left\{۲\sin\frac{A-B}{۲n}\cos\frac{A+B}{۲n}\right\}$$
$$= ۲\sin\frac{\pi}{۲n}\cos\frac{\pi}{۲n} = \sin\frac{\pi}{n}$$

به‌همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که

$$\min_{A+B+C=\pi}\left\{\sin\frac{A}{n} - \sin\frac{B}{n} - \sin\frac{C}{n}\right\} = -۲\sin\frac{\pi}{۲n}$$

از قرار معلوم وقتی‌که $۰ < n < ۱$ تحلیل وضعیت چندان آسان نیست.

مسألهٔ ۱۳۰. با استفادهٔ مکرر از نابرابری $\left(\frac{a+b}{۲}\right)^۲ \geqslant ab$، که در آن $a \geqslant ۰$ و $b \geqslant ۰$، به‌دست

می‌آوریم

$$\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲ \geqslant n\times ۱$$
$$\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{n-۱+۲}{۲}\right)^۲ \geqslant (n-۱)\times ۲$$
$$\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{n-۲+۳}{۲}\right)^۲ \geqslant (n-۱)\times ۳$$
$$\vdots$$
$$\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۲+n-۱}{۲}\right)^۲ \geqslant ۲(n-۱)$$
$$\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲ = \left(\frac{۱+n}{۲}\right)^۲ \geqslant ۱\times n$$

اگر همهٔ این نابرابریها را درهم ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^{۲n} \geqslant (n!)^۲$$

و یا

(الف) $$(n+۱)^n \geqslant ۲^n n!$$

از این نابرابری نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} ۶^n(n!)^۲ &\leqslant ۶^n\left\{\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n\right\}^۲ \\ &= ۲^n\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n ۳^n\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n \\ &= (n+۱)^n\left(\frac{۳n+۳}{۲}\right)^n \\ &\leqslant (n+۱)^n\left(\frac{۴n+۲}{۲}\right)^n \\ &= (n+۱)^n(۲n+۱)^n \end{aligned}$$ (ب)

نابرابری اخیر از نابرابری $۳n+۳ \leqslant ۴n+۲$ که آشکارا به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n برقرار است نتیجه می‌شود.

در هر دو نابرابری (الف) و (ب) برابری برقرار است اگر و فقط اگر $n=۱$.

نابرابری (الف) را به‌استقرا نیز می‌توان ثابت کرد. اگر برقراری این نابرابری را به‌ازای n مفروض بگیریم، چون $\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱} \geqslant ۲$ (که از قضیهٔ دو جمله‌ای نتیجه می‌شود)، پس

$$(n+۲)^{n+۱} \geqslant ۲(n+۱)^{n+۱} \geqslant ۲(n+۱)۲^n(n!) = ۲^{n+۱}(n+۱)!$$

مسألهٔ ۱۳۱. **راه‌حل اول.** فرض کنید

$$a = z_۱ + z_۲ + z_۳, \quad b = z_۱ z_۲ + z_۲ z_۳ + z_۳ z_۱, \quad c = z_۱ z_۲ z_۳$$

درنتیجه $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ سوم $z^۳ - az^۲ + bz - c$ هستند. از شرایط مفروض نتیجه می‌شود $c = ۱$ و $a = b$. پس چندجمله‌ای درجهٔ سوم به $z^۳ - az^۲ + az - ۱$ تبدیل می‌شود و ۱ آشکارا ریشهٔ این چندجمله‌ای است.

راه‌حل دوم. بنابر شرط (۱)، شرط (۲) را می‌توان چنین نوشت

$$z_۲ + z_۳ + \frac{۱}{z_۲ z_۳} = \frac{۱}{z_۲} + \frac{۱}{z_۳} + z_۲ z_۳$$

و یا

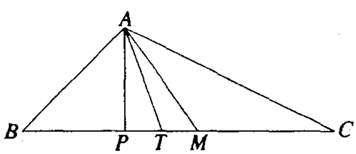
$$(۱ - z_۲)(۱ - z_۳) = \left(۱ - \frac{۱}{z_۲}\right)\left(۱ - \frac{۱}{z_۳}\right)$$

اگر دو طرف برابری اخیر را در $z_۲ z_۳$ ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$(z_۲ z_۳ - ۱)(۱ - z_۲)(۱ - z_۳) = ۰$$

بنابراین یا $z_۲ = ۱$ یا $z_۳ = ۱$ و یا $z_۲ z_۳ = ۱$ که از آن نتیجه می‌شود $z_۱ = ۱$.

مسألهٔ ۱۳۲. کافی است ثابت کنیم که میانهٔ خارج شده از هر رأس کوتاهتر از نیمساز خارج شده از آن رأس نیست. برای این کار فرض می‌کنیم در $\triangle ABC$، AM میانه و AT نیمساز باشد (شکل ۱۱۴ را ببینید). بدون کاستن از کلیت استدلال می‌توانیم فرض کنیم $\overline{AB} \leqslant \overline{AC}$.



شکل ۱۱۴

چون $\frac{\overline{BT}}{\overline{TC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$، نتیجه می‌شود که $\overline{BT} \leqslant \overline{BM}$. درنتیجه $\overline{AT} \leqslant \overline{AM}$. (توجه کنید که اگر AP ارتفاع باشد، $\angle PAB \leqslant \angle PAC$ و درنتیجه

$$\angle PAB \leqslant \angle TAB = \angle TAC \leqslant \angle PAC$$

پس T بین P و M واقع است.)

مسألهٔ ۱۳۳. در حالت خاصی که $n = ۵$، مقادیر S متناظر با $r = ۰, ۱, \ldots, ۵$ به‌ترتیب عبارت‌اند از ۱، ۴−، ۶، ۴−، ۱ و ۰. درنتیجه، حدس می‌زنیم که $S = (-۱)^r \binom{n-۱}{r}$.

برای اثبات این حدس توجه کنید که به‌ازای هر تابع مانند f،

$$\sum_{k=۱}^{r} \{f(k) - f(k-۱)\} = f(r) - f(۰)$$

اگر فرض کنیم $f(k) = (-۱)^k \binom{n-۱}{k}$، به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{k=۱}^{r} \left\{ (-۱)^k \binom{n-۱}{k} - (-۱)^{k-۱} \binom{n-۱}{k-۱} \right\} = (-۱)^r \binom{n-۱}{r} - ۱$$

بنابراین

$$(-۱)^r \binom{n-۱}{r} = ۱ + \sum_{k=۱}^{r} (-۱)^k \left\{ \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱} \right\} = \sum_{k=۰}^{r} (-۱)^k \binom{n}{k}$$

مسألهٔ ۱۳۴. با انجام عملیات ساده‌ای معلوم می‌شود که نابرابری مورد نظر هم‌ارز است با

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^۲ + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^۲ + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^۲ \geqslant ۰$$

و این نابرابری آشکارا برقرار است؛ برابری فقط در صورتی روی می‌دهد که $x = y = z$.

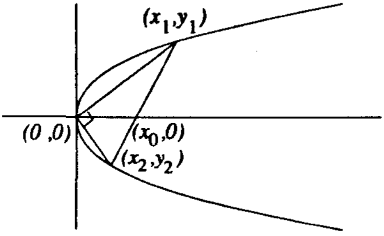
همچنین از

$$\frac{۱}{۳}\left(\frac{x^۲}{y^۲} + \frac{y^۲}{z^۲} + \frac{z^۲}{x^۲}\right) \geqslant \left\{\frac{۱}{۳}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)\right\}^۲ \geqslant \frac{۱}{۳}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \qquad (*)$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{x^۲}{y^۲} + \frac{y^۲}{z^۲} + \frac{z^۲}{x^۲} \geqslant \max\left\{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x},\ \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right\}$$

(دلیل برقراری نابرابریهای (*) را بیان کنید.)



شکل ۱۱۵

مسألهٔ ۱۳۵. راه‌حل اول. اگر همهٔ وترهای مورد نظر همرس باشند، بنابر تقارن انتظار داریم که نقطهٔ مشترک این وترها بر محور سهمی، یعنی محور xها، واقع باشد (شکل ۱۱۵ را ببینید). پس باید تحقیق کنیم که نقطهٔ تقاطع این گونه وترها با محور xها از مختصات دو سر آنها مستقل است یا خیر.

فرض کنید دو نقطهٔ انتهایی وتری که از رأس $(۰,۰)$ تحت زاویهٔ قائمه دیده می‌شود $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ باشند و نقطهٔ تقاطع این وتر با محور xها $(x_۰, ۰)$ باشد. البته

$$x_۱^۲ + y_۱^۲ + x_۲^۲ + y_۲^۲ = (x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲$$

و بنابراین

$$x_۱ x_۲ + y_۱ y_۲ = ۰ \qquad (۱)$$

و چون دو نقطهٔ انتهایی وتر روی سهمی واقع‌اند،

$$y_۱^۲ = ۴ax_۱ \,,\quad y_۲^۲ = ۴ax_۲ \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$(y_1 y_2)^2 = 16a^2 x_1 x_2 = -16a^2 y_1 y_2$$

و بنابراین

$$4a(x_2 y_1 - x_1 y_2) = y_1 y_2 (y_2 - y_1) = -16a^2 (y_2 - y_1)$$

از $\frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2} = \frac{y_1}{y_1 - y_2}$ به‌دست می‌آوریم

$$x_0 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2} = \frac{4a(y_1 - y_2)}{y_1 - y_2} = 4a$$

پس همهٔ وترهایی که از رأس سهمی تحت زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند از نقطهٔ $(4a, 0)$ می‌گذرند.

راه‌حل دوم. مانند راه‌حل قبلی فرض کنید (x_1, y_1) و (x_2, y_2) نقطه‌های انتهایی وتر باشند. چون شیب دو خطی که از مبدأ به‌این دو نقطه رسم می‌شوند قرینه و معکوس یکدیگرند،

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \qquad (3)$$

اگر معادلهٔ وتر $y = mx + b$ باشد، x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $(mx + b)^2 = 4ax$، یعنی معادلهٔ

$$m^2 x^2 + (2bm - 4a)x + b^2 = 0$$

هستند. بنابراین

$$x_1 x_2 = \frac{b^2}{m^2}$$

$$y_1 y_2 = (mx_1 + b)(mx_2 + b) = m^2 x_1 x_2 + mb(x_1 + x_2) + b^2 = \frac{4ab}{m}$$

بنابراین از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود $\frac{b^2}{m^2} + \frac{4ab}{m} = 0$ و یا $b = -4am$. پس هر وتری که از رأس سهمی تحت زاویهٔ قائمه دیده شود معادله‌ای به شکل

$$y = mx - 4am = m(x - 4a)$$

دارد و این معادلهٔ خطی است که از نقطهٔ $(4a, 0)$ می‌گذرد.

مسألهٔ ۱۳۶. فرض کنید a، m و b به‌ترتیب طول ارتفاعهای وارد بر DC در مثلثهای ADN، MDC و BNC باشند. فرض کنید $\overline{AM} = r\overline{AB}$ و $\overline{NC} = r\overline{DC}$. در این صورت $m = (1 - r)a + rb$. (اگر $AB \| DC$، برابری اخیر آشکارا برقرار است. در غیر این‌صورت، این برابری را می‌توان با در نظر گرفتن سه مثلث قائم‌الزاویهٔ متشابه که وتر هر سه در امتداد AB و یک ضلع مجاور وتر هر یک از آنها در امتداد DC واقع است به‌دست آورد.) در این صورت (نماد $[ABC]$ را برای نشان دادن مساحت

مثلث ABC به‌کار می‌بریم)

$$[ADN] = \frac{۱}{۲}a \cdot \overline{DN} = \frac{۱}{۲}a(۱-r) \cdot \overline{DC}$$
$$[MDC] = \frac{۱}{۲}m \cdot \overline{DC}$$
$$[BNC] = \frac{۱}{۲}b \cdot \overline{NC} = \frac{۱}{۲}br \cdot \overline{DC}$$

پس $[MDC] = [ADN] + [BNC]$. اگر مجموع مساحتهای دو مثلث PDN و QNC را از دو طرف این برابری کم کنیم، نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۱۳۷. از این پنج نقطه چهار تا انتخاب کنید. در وضعیت مفروض، کرهٔ یکتایی وجود دارد که شامل این چهار نقطه است؛ فرض کنید مرکز این کره نقطهٔ C و شعاع آن r باشد. اگر d فاصلهٔ بین C و نقطهٔ پنجم باشد، کرهٔ به مرکز C و شعاع $\frac{۱}{۲}(r+d)$ (اگر نقطهٔ پنجم بیرون کرهٔ اول باشد) از هر پنج نقطه به یک فاصله است. پس دست‌کم پنج کره با ویژگی مطلوب وجود دارد.

بسته به اینکه آرایش نقطه‌های مفروض چگونه باشد ممکن است تعدادی، متناهی یا نامتناهی، جواب دیگر نیز وجود داشته باشد. مکان‌هندسی مرکز کره‌ای که شامل سه تا از نقطه‌ها باشد خط است؛ مکان‌هندسی مرکز کره‌ای که شامل دو نقطهٔ دیگر باشد صفحه است. این خط ممکن است با صفحه موازی باشد، صفحه را در یک نقطه قطع کند و یا در صفحه واقع باشد. اگر O نقطهٔ تقاطع خط با صفحه باشد، به شیوه‌ای مشابه با آنچه در بند قبل توصیف شد می‌توان کره‌ای به مرکز O همفاصله از پنج نقطه یافت (که سه تا از نقطه‌ها در یک طرف و دو نقطهٔ دیگر در طرف دیگر آن واقع باشند).

مسألهٔ ۱۳۸. می‌توان نوشت

$$۵^{۲n+۱} + ۱۱^{۲n+۱} + ۱۷^{۲n+۱} \equiv ۲^{۲n+۱} + ۲^{۲n+۱} + ۲^{۲n+۱} \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳)$$

و

$$\begin{aligned} ۵^{۲n+۱} + ۱۱^{۲n+۱} + ۱۷^{۲n+۱} &= (۱۱-۶)^{۲n+۱} + ۱۱^{۲n+۱} + (۱۱+۶)^{۲n+۱} \\ &\equiv (-۶)^{۲n+۱} + ۶^{۲n+۱} \\ &\equiv ۶^{۲n+۱}(-۱+۱) \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۱) \end{aligned}$$

پس مجموع مفروض بر $۳۳ = ۱۱ \times ۳$ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۳۹. اگر در رابطهٔ $(x+۱)^n = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r} x^r$ قرار دهیم $x = ۱$، به‌دست می‌آوریم

$$۲^n = \sum_{r=۰}^{n} \binom{n}{r}$$

فرض کنید

$$Q(x) = \binom{x}{۰} + \binom{x}{۱} + \cdots + \binom{x}{n}$$

چون به‌ازای $۰ \leqslant r \leqslant n$،

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-۱)\cdots(x-r+۱)}{r!}$$

$Q(x)$ چندجمله‌ایی از درجهٔ n است. گذشته از این، به‌ازای $x = ۰, ۱, ۲, \cdots, n$، $P(x) = Q(x)$. پس چندجمله‌ایهای $P(x)$ و $Q(x)$ باید برابر باشند، و

$$P(n+۱) = Q(n+۱) = \binom{n+۱}{۰} + \binom{n+۱}{۱} + \cdots + \binom{n+۱}{n}$$
$$= ۲^{n+۱} - \binom{n+۱}{n+۱} = ۲^{n+۱} - ۱$$

تبصره. مسأله را وقتی‌که به‌جای ۲^k، ۳^k باشد حل کنید.

مسألهٔ ۱۴۰. (به‌استقرا). نتیجه به‌ازای $n = ۱$ آشکارا برقرار است. به‌ازای $n = ۲$ باید ثابت کنیم $(۱+x_۱)(۱+x_۲) \leqslant ۲(۱+x_۱x_۲)$. این نابرابری هم‌ارز است با $(۱-x_۱)(۱-x_۲) \geqslant ۰$ که آشکارا برقرار است (و در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر از $x_۱$ یا $x_۲$ یکی برابر ۱ باشد).

فرض کنید نتیجه به‌ازای همهٔ مقادیر n، از ۱ تا k، $k \geqslant ۲$، برقرار باشد و برابری در شرایط بیان شده روی دهد. در این صورت با فرض اینکه $۰ \leqslant x_i \leqslant ۱$، $i = ۱, ۲, \cdots, k+۱$، با استفاده از نتیجه مسأله به‌ازای $n = ۲$ و $n = k$،

$$۲^k(۱+x_۱x_۲\cdots x_kx_{k+۱}) = ۲^{k-۱}\left\{۲(۱+\overbrace{x_۱x_۲\cdots x_k}x_{k+۱})\right\}$$
$$\geqslant ۲^{k-۱}(۱+x_۱x_۲\cdots x_k)(۱+x_{k+۱})$$
$$\geqslant (۱+x_۱)(۱+x_۲)\cdots(۱+x_k)(۱+x_{k+۱})$$

اگر برابری برقرار باشد، از $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$ و x_k دست‌کم $k-۱$ تا برابر ۱ هستند. اگر فقط $k-۱$ تا از x_iها برابر ۱ باشند، $x_{k+۱}$ نیز باید برابر ۱ باشد.

مسألهٔ ۱۴۱. اگر شرکت کنید احتمال باخت شما بیشتر از احتمال برنده شدن شما است. تعداد ترکیبهای ممکن از سه مهره $۲۲۱۰۰ = \frac{۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰}{۱ \times ۲ \times ۳}$ است. تعداد ترکیبها از سه مهره که شمارهٔ بالاتر از ۴۰ نداشته باشند فقط $۹۸۸۰ = \frac{۴۰ \times ۳۹ \times ۳۸}{۱ \times ۲ \times ۳}$ است. بنابراین، احتمال بیرون آمدن سه مهره که هیچ‌یک شمارهٔ بالاتر از ۴۰ نداشته باشد $\frac{۳۸}{۸۵} = \frac{۹۸۸۰}{۲۲۱۰۰}$ است.

مسألهٔ ۱۴۲. اگر چهار رابطه را در هم ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$xyzw = abcd\lambda$$

که در آن λ ریشه‌ای از چندجمله‌ای $t^{۷} - ۱$ است. بنابراین

$$x = \frac{(abcd\lambda)^{۲}}{a^{۷}},\ y = \frac{(abcd\lambda)^{۲}}{b^{۷}},\ z = \frac{(abcd\lambda)^{۲}}{c^{۷}},\ w = \frac{(abcd\lambda)^{۲}}{d^{۷}}$$

مسألهٔ ۱۴۳. فرض کنید C طولانیترین وتر شکل فضایی مفروض باشد. هر مقطع این شکل که حاوی C باشد دایره‌ای به قطر C است. پس شکل فضایی مفروض سطحی دوّار حول C، و بنابراین کره است.

مسألهٔ ۱۴۴. تعداد راههای قرار دادن سکه‌ها روی هم بدون هیچ محدودیتی، $n!$ است. تعداد راههای قرار دادن سکه‌ها روی هم به‌طوری‌که دو سکهٔ مشخص مجاور یکدیگر باشند $۲(n-۱)!$ است (ضریب ۲ به‌این دلیل آمده است که جای این دو سکهٔ مشخص را می‌توان با هم عوض کرد). پس تعداد جایگشتهایی که در آنها دو سکهٔ مورد نظر مجاور یکدیگر نیستند برابر است با

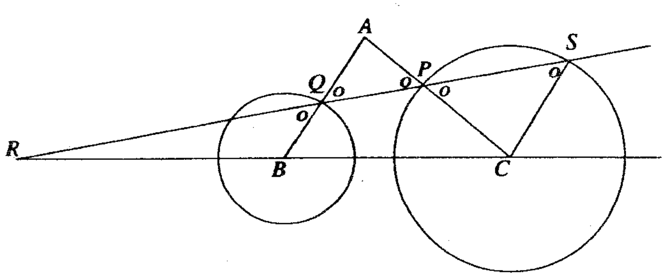
$$n! - ۲(n-۱)! = (n-۲)(n-۱)!$$

اگر پشت و رو شدن سکه‌ها را نیز در جایگشتها در نظر بگیریم، جواب مسأله $۲^{n}(n-۲)(n-۱)!$ خواهد بود.

مسألهٔ ۱۴۵. برای اینکه موقعیت را بهتر دریابید، حالت تباهیده‌ای را در نظر بگیرید که دایرهٔ متغیر خطی راست باشد. این خط راست مماس مشترک دو دایره است و ممکن است دایره‌ها در یک طرف آن واقع باشند یا در دو طرف مخالف آن. پس می‌توان انتظار داشت که دو نقطهٔ ثابت مورد نظر نقاط تقاطع مماسهای مشترک باشند. گذشته از این، بنابر تقارن موجود، می‌توان انتظار داشت که نقطه‌ها بر خط المرکزین دو دایره واقع باشند.

حالت ۱ (الف). هر دو دایرهٔ متغیر مماس خارج‌اند.

فرض کنید B و C مرکز دو دایرهٔ ثابت نامتقاطع باشند (شکل ۱۱۶ را ببینید)، و فرض کنید دایره‌ای به مرکز A به‌طور خارجی به‌ترتیب در نقطه‌های Q و P بر این دو دایره مماس باشد. در این صورت سه نقطهٔ A، Q و B و همچنین سه نقطهٔ A، P و C همخط‌اند و $\overline{AQ} = \overline{AP}$.



شکل ۱۱۶

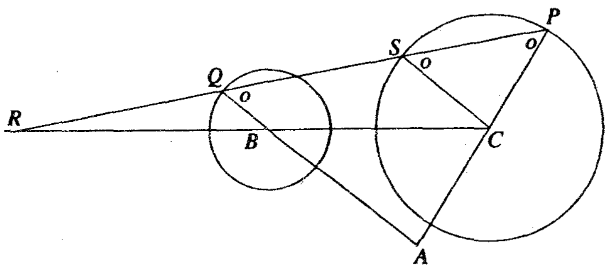
فرض کنید QP خط BC را در R و دایرهٔ به مرکز C را بار دیگر در S قطع کند. در این صورت

$$\angle BQR = \angle AQP = \angle APQ = \angle CPS = \angle CSP$$

و درنتیجه مثلثهای RQB و RSC متشابه‌اند و $\frac{\overline{QB}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$. بنابراین $\frac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$ نسبت ثابتی است. پس جای R مستقل از انتخاب دایرهٔ مماس است.

حالت ۱ (ب). هر دو دایره بر دایرهٔ متغیر مماس داخل‌اند.

اگر A، B و C مرکز سه دایره باشند (شکل ۱۱۷ را ببینید)، باز هم $\overline{AQ} = \overline{AP}$، و دو مثلث RQB و RSC متشابه‌اند، و $\frac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$ نسبت ثابتی است.

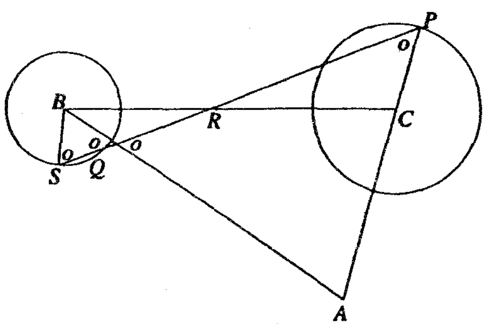


شکل۱۱۷

حالت ۲. یکی از دو دایره بر دایرهٔ متغیر مماس داخل است و دیگری مماس خارج.

فرض کنید A، B و C مرکز سه دایره باشند، به‌طوری‌که دایرهٔ متغیر به مرکز A به‌طور خارجی بر دایرهٔ به مرکز B و به‌طور داخلی بر دایرهٔ به مرکز C مماس باشد (شکل ۱۱۸ را ببینید). چون $\overline{AP} = \overline{AQ}$، پس

$$\angle APQ = \angle AQP = \angle BQS = \angle BSQ$$

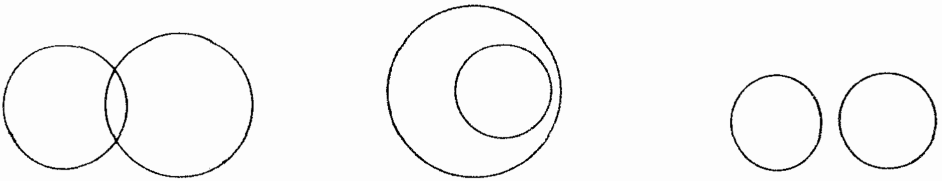


شکل۱۱۸

و دو مثلث RBS و RCP متشابه‌اند. بنابراین $\frac{\overline{BS}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$، و $\frac{\overline{RB}}{\overline{RC}}$ نسبت ثابتی است. پس R نقطه‌ای ثابت است.

تبصره. الف) تحقیق کنید که در حالتهای ۱ (الف) و ۱ (ب) نقطهٔ R محل تلاقی دو مماس مشترک خارجی دو دایره (مماسهایی که هر دو دایره در یک طرف هر یک از آنها واقع‌اند) است و در حالت

(۲) نقطهٔ R نقطهٔ تقاطع دو مماس مشترک دیگر است.
ب) اگر در دو دایره همنهشت باشند چه روی می‌دهد؟ (شکل ۱۱۹ـالف).
ج) اگر دو دایره متداخل باشند چه روی می‌دهد؟ (شکل ۱۱۹ـب).
د) اگر دو دایره متقاطع باشند چه روی می‌دهد؟ (شکل ۱۱۹ـج).



شکل۱۱۹

ملاحظه. همین نتیجه از عکس قضیهٔ منلائوس نیز به‌دست می‌آید. در شکل ۱۱۶ (حالت ۱(الف)): اگر سه نقطهٔ R، Q و PB به‌ترتیب روی ضلعهای CB، BA و AC از مثلثی واقع باشند به‌طوری‌که

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{BR}}{\overline{RC}} \cdot \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} = -۱$$

آنگاه R، P و Q همخط‌اند. در اینجا

$$\frac{r}{r_۱} \cdot \frac{\overline{BR}}{\overline{RC}} \cdot \frac{r_۲}{r} = -۱$$

که در آن r، $r_۱$ و $r_۲$ به‌ترتیب شعاع دایره‌های به مرکز A، B و C هستند. پس اگر R را روی BC چنان بگیریم که $r_۲\overline{BR} = -r_۱\overline{RC}$، آنگاه R نقطه‌ای ثابت است. حالتهای دیگر را نیز می‌توان به‌همین ترتیب تحلیل کرد.

مسألهٔ ۱۴۶. راه‌حل اول. بنابر نابرابری کوشی (پیوست، د (۴) را ببینید)،

$$n^۲ \leqslant \left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{S}{S-x_i}\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{S-x_i}{S}\right) = \left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{S}{S-x_i}\right)\left(\sum_{i=۱}^{n}\left(۱-\frac{x_i}{S}\right)\right)$$

$$= \left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{S}{S-x_i}\right)\left(n-\frac{\sum x_i}{S}\right) = \left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{S}{S-x_i}\right)(n-۱)$$

و در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر $\sqrt{\frac{S}{S-x_i}}\Big/\sqrt{\frac{S-x_i}{S}}$ها با هم برابر باشند، یعنی وقتی‌که $\frac{S}{S-x_i}$ها با هم برابر باشند.

راه‌حل دوم. وقتی‌که a_1، a_2، $\cdots$ و a_n مثبت باشند، بنابر نابرابری میانگین توافقی ـ میانگین حسابی،

$$\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}} = \left(\frac{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر همهٔ a_iها برابر باشند. فرض کنید $a_i = \dfrac{S}{S-x_i}$. در این صورت $\sum_{i=1}^{n} a_i = n-1$ و نتیجه بی‌درنگ حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۱۴۷. عبارت مورد نظر را با $P(a,b,c)$ نشان می‌دهیم. چون $P(a,b,c)=0$، $a-b$ عاملی از $P(a,b,c)$ است. به‌همین ترتیب، $b-c$ و $c-a$ نیز عاملهای $P(a,b,c)$ هستند. با انجام عملیات تقسیم به‌دست می‌آوریم

$$P(a,b,c) = (b-c)(c-a)(a-b)\{abc+(a^3+b^3+c^3) + (a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)\}$$

یا به‌صورت خلاصه‌تر،

$$P(a,b,c) = (b-c)(c-a)(a-b)\left\{abc+\sum_{\text{متقارن}} a^3+\sum_{\text{متقارن}} a^2b\right\}$$

مسألهٔ ۱۴۸. همهٔ امکانها در جدول ۲ فهرست شده است.

جدول ۲

امتیاز	۵	۴	۳	۲	۱	۰	تعداد راههایی که می‌توان امتیازها را بین ۷ مسأله تقسیم کرد
تعداد مسأله‌هایی که چنین امتیازی گرفته‌اند	۶	۰	۰	۰	۰	۱	$7=7$
	۵	۱	۰	۰	۱	۰	$7\times 6=42$
	۵	۰	۱	۱	۰	۰	$7\times 6=42$
	۴	۲	۰	۱	۰	۰	$\binom{7}{4}\binom{3}{2}=105$
	۴	۱	۲	۰	۰	۰	$\binom{7}{4}\binom{3}{1}=105$
	۳	۳	۱	۰	۰	۰	$\binom{7}{3}\binom{4}{3}=140$
	۲	۵	۰	۰	۰	۰	$\binom{7}{2}=21$
تعداد کلِ امکانها:							۴۶۲

مسألهٔ ۱۴۹. یکی از تعمیمها چنین است

$$(\underbrace{55\cdots5}_{n}6)^2-(\underbrace{44\cdots4}_{n}5)^2=\underbrace{11\cdots1}_{2n+2}\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

در واقع، چون $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$، طرف چپ تبدیل می‌شود به

$$(\underbrace{11\cdots1}_{n+1})(1\underbrace{00\cdots0}_{n}1)$$

که پس از انجام ضرب به طرف راست تبدیل می‌شود.

مسألهٔ ۱۵۰. معادله‌های مفروض هم‌ارزند با

$$(y-a)(z-a)=a^2+r$$

$$(z-a)(x-a)=a^2+s$$

$$(x-a)(y-a)=a^2+t$$

از این دستگاه معادله‌ها به‌دست می‌آید

$$(x-a)(y-a)(z-a)=\pm\sqrt{(a^2+r)(a^2+s)(a^2+t)}$$

بنابراین

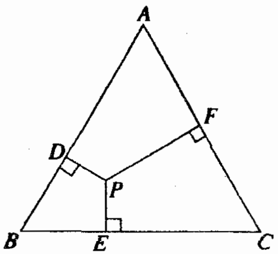
$$x-a=\frac{(x-a)(y-a)(z-a)}{a^2+r}=\pm\sqrt{\frac{(a^2+s)(a^2+t)}{a^2+r}}$$

و x را می‌توان از این رابطه به‌دست آورد. (علامت قبل از رادیکال را باید طوری انتخاب کرد که با معادله‌های مفروض سازگار باشد.)

مسألهٔ ۱۵۱. فرض کنید $a=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$. در این صورت مساحت مثلث ABC برابر $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ است. این مساحت با مجموع مساحتهای سه مثلث PAB، PBC و PCA نیز برابر است (شکل ۱۲۰ را ببینید). بنابراین

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=a\frac{\overline{PD}}{2}+a\frac{\overline{PE}}{2}+a\frac{\overline{PF}}{2}=\frac{a(\overline{PD}+\overline{PE}+\overline{PF})}{2}$$

و برابری مورد نظر به‌دست می‌آید.



شکل ۱۲۰

تبصره. ثابت کنید که به‌طور کلیتر، در هر مثلث و به‌ازای هر نقطه مانند P درون آن،

$$\min(h_1,h_2,h_3)\leqslant r_1+r_2+r_3\leqslant \max(h_1,h_2,h_3)$$

که در آن h_1، h_2 و h_3 به‌ترتیب ارتفاعهای وارد بر ضلعهای به‌طول a، b و c، و r_1، r_2 و r_3 به‌ترتیب فاصلهٔ نقطهٔ P از این ضلعها هستند.

مسألهٔ ۱۵۲. هر دو طرف معادله را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(۱۳x+۳۷) - ۳\sqrt[۳]{۱۳x+۳۷} \times \sqrt[۳]{۱۳x-۳۷}(\sqrt[۳]{۱۳x+۳۷} - \sqrt[۳]{۱۳x-۳۷})$$
$$-(۱۳x-۳۷) = ۲$$

بنابراین $\sqrt[۳]{۲}\sqrt[۳]{۱۳^۲x^۲ - ۳۷^۲} = ۲۴$. باز هم از مکعب کردن دو طرف این برابری حاصل می‌شود

$$۴ \times ۱۲^۳ = ۱۳^۲x^۲ - ۳۷^۲$$

و بنابراین $x = \pm ۷$. هر دو مقدار در معادلهٔ مفروض صدق می‌کنند.

مسألهٔ ۱۵۳. چون $A = ۱۰^{a+۱} - ۱۰^a = ۹ \times ۱۰^a$ و $B = ۱۰^b - ۱۰^{b-۱} = ۹ \times ۱۰^{b-۱}$، پس

$$\log A - \log B = a - (b-۱)$$

بنابراین

$$(\log A - a) - (\log B - b) = ۱$$

مسألهٔ ۱۵۴. فرض کنید $h = r\cos\theta$، $k = r\sin\theta$، $x - h = ۲ru$ و $y - k = ۲rv$. در این صورت دو معادلهٔ مفروض تبدیل می‌شوند به

$$u^۲ + v^۲ = ۱$$

$$(۲u + \cos\theta)(۲v + \sin\theta) = \sin\theta\cos\theta$$

فرض کنید $z = u + iv$، و درنتیجه $\overline{z} = u - iv$، $۲u = z + \overline{z}$ و $۲v = \frac{z - \overline{z}}{i}$. در این صورت

$$z\overline{z} = ۱ \qquad (۱)$$

و $(\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta)$

$$z(z + \operatorname{cis}\theta) = \overline{z}(\overline{z} + \operatorname{cis}(-\theta)) \qquad (۲)$$

رابطهٔ (۲) را در $z^۲$ ضرب می‌کنیم و با استفاده از (۱) به‌دست می‌آوریم

$$z^۳(z + \operatorname{cis}\theta) = ۱ + z\operatorname{cis}(-\theta)$$

با انجام عملیاتی بر روی این رابطه به‌دست می‌آوریم

$$(z^۳ - \operatorname{cis}(-\theta))(z + \operatorname{cis}\theta) = ۰$$

ریشهٔ $z = -\operatorname{cis}\theta$ متناظر است با

$$x = h + ۲ru = h - ۲r\cos\theta = -h, \quad y = k + ۲rv = k - ۲r\sin\theta = -k$$

که مختصات نقطهٔ $(-h,-k)$ هستند. عامل دیگر، یعنی $z^{۳}-\text{cis}(-\theta)$، سه ریشه دارد:

$$z=\text{cis}\frac{-\theta}{۳}:\ u=\cos\frac{\theta}{۳},\ v=-\sin\frac{\theta}{۳}$$

$$z=\text{cis}\frac{-\theta+۲\pi}{۳}:\ u=\cos\frac{\theta-۲\pi}{۳},\ v=-\sin\frac{\theta-۲\pi}{۳}$$

$$z=\text{cis}\frac{-\theta-۲\pi}{۳}:\ u=\cos\frac{\theta+۲\pi}{۳},\ v=-\sin\frac{\theta+۲\pi}{۳}$$

این ریشه‌ها نقطه‌های زیر را به‌دست می‌دهند:

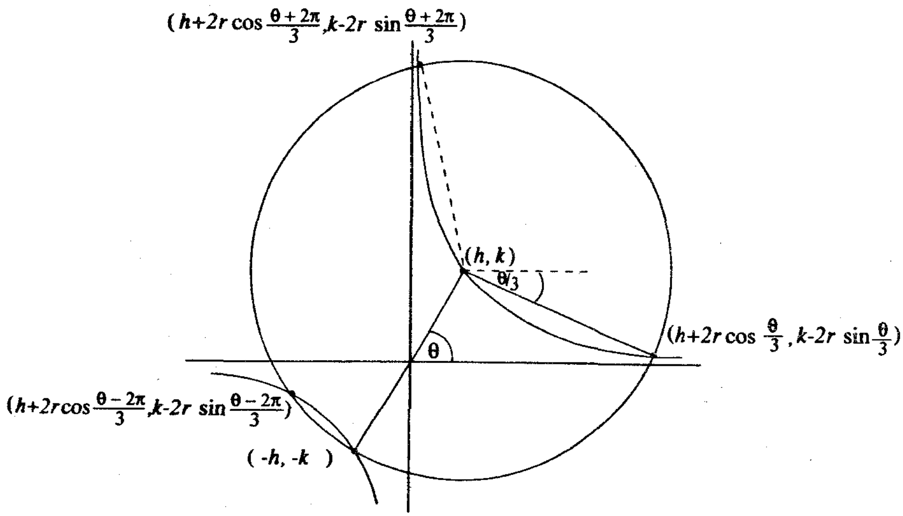
$$(h+۲r\cos\frac{\theta}{۳},k-۲r\sin\frac{\theta}{۳})$$

$$(h+۲r\cos\frac{\theta-۲\pi}{۳},k-۲r\sin\frac{\theta-۲\pi}{۳})$$

$$(h+۲r\cos\frac{\theta+۲\pi}{۳},k-۲r\sin\frac{\theta+۲\pi}{۳})$$

و این سه نقطه رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند.

در مورد تعبیر هندسی، نقطه‌ای مانند (h,k) را روی هذلولی $xy=a^{۲}$ در نظر بگیرید. دایره‌ای به مرکز (h,k) رسم کنید که از $(-h,-k)$ بگذرد (شکل ۱۲۱ را ببینید). این دایره هذلولی را در سه نقطهٔ دیگر که رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع هستند قطع می‌کند.



شکل۱۲۱

مسألهٔ ۱۵۵. فرض کنید

$$I_m=(\sqrt{۳}+۱)^{۲m}+(\sqrt{۳}-۱)^{۲m}$$

اگر I_m را بسط دهیم نتیجه می‌گیریم که همهٔ جمله‌های ناگویا حذف می‌شوند و I_m عددی صحیح است. چون $۱>۱-\sqrt{۳}$، پس $(۱-\sqrt{۳})^{۲m}<۱$. بنابراین I_m باید کوچکترین عدد صحیح بزرگتر

از $(\sqrt{3}+1)^{2m}$ باشد.

توجه کنید که $I_m = (4+2\sqrt{3})^m + (4-2\sqrt{3})^m$؛ همچنین $4+2\sqrt{3}$ و $4-2\sqrt{3}$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 = 8x - 4$ هستند. پس $4+2\sqrt{3}$ و $4-2\sqrt{3}$ در هر یک از معادله‌های زیر صدق می‌کنند

$$x^{m+2} = 8x^{m+1} - 4x^m, \quad m = 0, 1, \cdots$$

و

$$I_{m+2} = 8I_{m+1} - 4I_m$$

چون $I_1 = 8$ و $I_2 = 56$، پس I_m به‌ازای $m = 1, 2$ بر 2^{m+1} بخش‌پذیر است. فرض کنید به‌ازای $m = 1, 2, \cdots, k$، I_m بر 2^{m+1} بخش‌پذیر باشد. در این صورت، هر یک از عددهای $4I_{k-1}$ و $8I_k$ مضرب 2^{k+2} است. بنابراین I_{k+1} بر 2^{k+2} بخش‌پذیر است. نتیجه به‌استقرا حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۱۵۶. می‌توان نوشت

$$\left|\frac{r+2}{r+1} - \sqrt{2}\right| = \left|\frac{(r+2) - \sqrt{2}(r+1)}{r+1}\right| = \frac{(\sqrt{2}-1)|r-\sqrt{2}|}{1+r}$$
$$\leqslant (\sqrt{2}-1)|r-\sqrt{2}| < |r-\sqrt{2}|$$

تبصره. اگر r تقریبی گویا و نامنفی از (الف) $\sqrt{3}$ و (ب) $\sqrt[3]{2}$ باشد، تقریب گویای همواره بهتری از آن بیابید.

مسألهٔ ۱۵۷. چون $\cos 0 = 1$، $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ و $\cos\frac{\pi}{2} = 0$، عددهای ۰، $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ سه مقدار از k هستند که به‌ازای آنها $\cos k\pi$ گویاست. فرض کنید $\cos\theta = \frac{p}{q}$ به‌طوری‌که $q \geqslant 3$، $p < q$ و p و q نسبت به‌هم اول باشند. در این صورت

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{2p^2 - q^2}{q^2}$$

هر مقسوم‌علیه مشترک صورت و مخرج کسر اخیر باید هم $2p^2$ را بشمارد و هم q^2 را؛ چون تنها مقسوم‌علیه مشترک p و q، ۱ است، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $2p^2 - q^2$ و q^2، یا ۱ است یا ۲. بنابراین، وقتی $\frac{2p^2-q^2}{q^2}$ را به ساده‌ترین شکل بنویسیم، مخرج دستکم $\frac{q^2}{2}$ و درنتیجه از q بزرگتر است، و بنابراین $\cos 2\theta \neq \cos\theta$.

در ادامه ثابت می‌کنیم که اگر $\cos\theta$ گویا باشد (در ساده‌ترین شکل، با مخرج بزرگتر از ۲)، $\cos\theta$، $\cos 2\theta$، $\cos 4\theta$، $\cos 8\theta$، $\cos 16\theta$، $\cdots$، همه گویا هستند و مخرجها دنباله‌ای صعودی تشکیل می‌دهند. پس $\cos\theta$، $\cos 2\theta$، $\cos 4\theta$، $\cos 8\theta$، $\cdots$، از هم متمایزند.

فرض کنید $\theta = 2i\left(\frac{u}{v}\right)\pi$ به‌طوری‌که u و v فرد و نسبت به‌هم اول باشند. چون v فرد است، عددی طبیعی مانند w، $|i| < w$، وجود دارد به‌طوری‌که $2^w - 1$ بر v بخش‌پذیر باشد (پیوست، ب

(۸) را ببینید). بنابراین سمت راست برابری

$$۲^{۲w-i+۱}\theta - ۲^{w-i+۱}\theta = \frac{۲^w - ۱}{v}۲^w u(۲\pi)$$

مضرب صحیحی از $(\pi)۲$ است، و درنتیجه

$$\cos(۲^{۲w-i+۱}\theta) = \cos(۲^{w-i+۱}\theta)$$

بنابر آنچه قبلاً ثابت کردیم، وقتی $\pi\left(\frac{u}{v}\right)$ $\theta = ۲^i$، $\cos\pi$ عددی گویا با مخرج بزرگتر از ۲ نیست.

بنابراین $\cos k\pi$ فقط وقتی گویاست که $k = ۰, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۲}$.

مسألهٔ ۱۵۸. چندجمله‌ای درجهٔ سومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌هایش x، y و z باشند و سپس ریشه‌های این چندجمله‌ای را به روش دیگری می‌یابیم. نقش متقارنی که سه متغیر در دستگاه مفروض بازی می‌کنند و این واقعیت که ضرایب هر چندجمله‌ای تابعهایی متقارن از ریشه‌هایش هستند، این رهیافت را القا می‌کند.

چندجمله‌ای درجهٔ سوم با ریشه‌های x، y و z برابر است با

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^۳ - pt^۲ + qt - r$$

که در آن $p = x+y+z$، $q = xy+yz+zx$ و $r = xyz$. چون

$$p = ۰,\quad ۶ab = x^۲+y^۲+z^۲ = (x+y+z)^۲ - ۲p = -۲q$$

و (با توجه به اینکه x، y و z ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ سوم هستند)

$$(x^۳+y^۳+z^۳) - p(x^۲+y^۲+z^۲) + q(x+y+z) - ۳r = ۰$$

پس $q = -۳ab$ و $r = a^۳ + b^۳$.

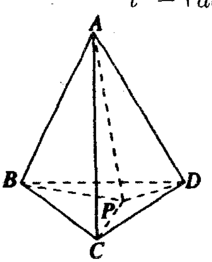
بنابراین، x، y و z ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ سوم زیرند

$$t^۳ - ۳abt - (a^۳+b^۳)$$

یکی از ریشه‌های این چندجمله‌ای $a+b$ است. پس چندجمله‌ای درجهٔ سوم بالا بر $t-(a+b)$ بخش‌پذیر است:

$$t^۳ - ۳abt - (a^۳+b^۳) = [t-(a+b)][t^۲ + (a+b)t + (a^۲ - ab + b^۲)]$$

بنابراین ریشه‌های دیگر $\frac{۱}{۲}\{-(a+b) \pm i\sqrt{۳}(a-b)\}$ هستند.



شکل ۱۲۲

مسألهٔ ۱۵۹. فرض کنید $ABCD$ چهاروجهی و P پای عمودی باشد که از A بر وجه BCD رسم شده است (شکل ۱۲۲ را ببینید). در این صورت، اگر نماد $[ABC]$ را برای مساحت مثلث ABC به‌کار ببریم،

$$[ABC] > [PBC],\ [ACD] > [PCD],\ [ADB] > [PDB]$$

اگر P نقطه‌ای درون مثلث BCD باشد،

$$[BCD] = [PBC] + [PCD] + [PDB]$$

از طرف دیگر، اگر P بیرون از مثلث BCD باشد،

$$[BCD] < [PBC] + [PCD] + [PDB]$$

در هر صورت

$$[ABC] + [ACD] + [ADB] > [BCD]$$

انتخابهای دیگر از سه وجه را هم می‌توانیم به‌همین ترتیب بررسی کنیم.

این نتیجه را از راهی دیگر نیز می‌توانیم به‌دست آوریم. نتیجهٔ مطلوب هم‌ارز است با

$$|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA}| + |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{DA}| + |\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{BA}|$$
$$\geqslant |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{BA}|$$

و این نابرابری از نابرابری مثلثی نتیجه می‌شود.

مسألهٔ ۱۶۰. نابرابری مطلوب هم‌ارز است با

$$a + b \leqslant \sqrt{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲}$$

که هم‌ارز است با

$$a^۲ + ۲ab + b^۲ \leqslant ۲(a^۲ + b^۲)$$

و یا $(a-b)^۲ \geqslant ۰$.

ملاحظه. به‌طورکلیتر، در هر مثلث با طول ضلعهای a، b و c، $a + b \leqslant c\csc\frac{C}{۲}$، که C زاویهٔ روبه‌روی ضلع c است، و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $a = b$.

مسألهٔ ۱۶۱. فرض‌کنید $۰ \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{۲}$. دراین صورت $۰ \leqslant \sin^۵\theta \leqslant \sin^۲\theta$ و $۰ \leqslant \cos^۵\theta \leqslant \cos^۲\theta$، و درنتیجه

$$\sin^۵\theta + \cos^۵\theta \leqslant \sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر θ برابر با ۰ یا $\frac{\pi}{۲}$ باشد.

مسألهٔ ۱۶۲. اگر a نخستین جمله و d قدرنسبت تصاعد حسابی باشد،

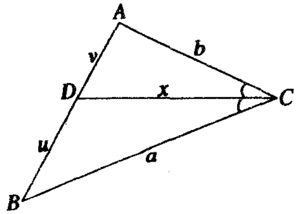
$$p = a + (q-۱)d, \quad q = a + (p-۱)d$$

بنابراین $d = -۱$ و $a = p + q - ۱$. بنابراین، جملهٔ nاُم برابر است با

$$(p + q - ۱) - (n - ۱) = p + q - n$$

و درنتیجه جملهٔ $(p+q)$اُم برابر ۰ است.

مسألهٔ ۱۶۳. راه‌حل اول. اگر $[ABC]$ مساحت مثلث ABC را نشان دهد و $x = \overline{CD}$ (شکل ۱۲۳ را ببینید)، آنگاه



شکل ۱۲۳

$$[BCD] = \frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2}$$

$$[ACD] = \frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2}$$

$$[ABC] = \frac{1}{2}ab\sin C = ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

بنابراین

$$\frac{1}{2}ax\sin\frac{C}{2} + \frac{1}{2}bx\sin\frac{C}{2} = ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

و نتیجه حاصل می‌شود.

راه‌حل دوم. با استفاده از این واقعیت که $\frac{u}{v} = \frac{b}{a}$، به‌دست می‌آوریم (شکل ۱۲۳ را ببینید)

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{v^2}{u^2} = \frac{b^2 + x^2 - 2bx\cos\frac{C}{2}}{a^2 + x^2 - 2ax\cos\frac{C}{2}}$$

اگر $a \neq b$، با ساده کردن رابطهٔ بالا به‌دست می‌آوریم

$$(b^2 - a^2)x^2 = 2ab(b-a)x\cos\frac{C}{2}$$

نتیجهٔ مطلوب با تقسیم کردن دو طرف این برابری بر $x(b-a)$ حاصل می‌شود. اگر $a = b$، مستقیماً از شکل مثلث متساوی‌الساقین معلوم می‌شود که

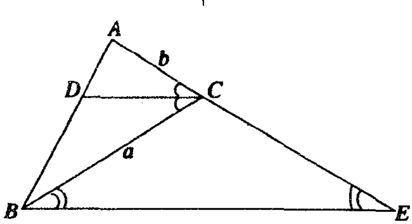
$$x = a\cos\frac{C}{2} = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

راه‌حل سوم. از B خطی موازی با DC رسم و فرض می‌کنیم این خط امتداد AC را در نقطهٔ E قطع کند (شکل ۱۲۴ را ببینید). در این صورت

$$\overline{CE} = \overline{CB} = a,\quad \overline{BE} = 2a\cos\frac{C}{2},\quad \frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

بنابراین

$$\frac{\overline{CD}}{2a\cos\frac{C}{2}} = \frac{b}{a+b}$$



شکل ۱۲۴

مسألهٔ ۱۶۴. چون

$$(۱۳۶۷۶۳۱)_b = ۱ + ۳b + ۶b^۲ + ۷b^۳ + ۶b^۴ + ۳b^۵ + b^۶ = (۱ + b + b^۲)^۳$$

پس عدد مورد نظر در هر مبنای بزرگتر از ۷ مکعب کامل است.

مسألهٔ ۱۶۵. نابرابری مورد نظر هم‌ارز است با

$$۱ + x + x^۲ + \cdots + x^{۲n} \geqslant (۲n + ۱)x^n$$

که این هم هم‌ارز است با

$$(x^n + x^{-n} - ۲) + (x^{n-۱} + x^{۱-n} - ۲) + \cdots + (x + x^{-۱} - ۲) \geqslant ۰$$

این نابرابری درست است، چون به‌ازای $t > ۰$،

$$t + \frac{۱}{t} - ۲ = \left(\sqrt{t} - \frac{۱}{\sqrt{t}}\right)^۲ \geqslant ۰$$

تبصره. ثابت کنید که نابرابری مورد نظر به‌ازای هر $n \geqslant ۰$ و هر $x \geqslant ۰$، $x \neq ۱$، درست است.

مسألهٔ ۱۶۶. راه‌حل اول. اگر a جملهٔ آغازی و d قدرنسبت تصاعد باشد،

$$q = a + (p - ۱)d,\ r = a + (q - ۱)d,\ p = a + (r - ۱)d$$

اگر a و d را حذف کنیم به‌دست می‌آوریم

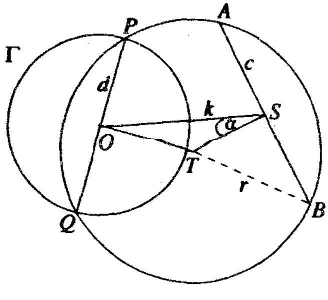
$$q(q - r) + r(r - p) + p(p - q) = ۰$$

بنابراین

$$(p - q)^۲ + (q - r)^۲ + (r - p)^۲ = ۰$$

درنتیجه $p = q = r$ و تفاضل مطلوب صفر است.

راه‌حل دوم. هر تصاعد حسابی غیر ثابت یا صعودی است یا نزولی. در حالت صعودی، اگر $p \leqslant q \leqslant r$، نتیجه می‌شود $q \leqslant r \leqslant p$؛ بنابراین، $p = q = r$. در حالتهای دیگر نیز نتیجه می‌گیریم $p = q = r$. پس تفاضل مطلوب صفر است.



شکل ۱۲۵

مسألهٔ ۱۶۷. از استدلال زیر معلوم می‌شود که چنین روش ترسیمی وجود دارد. در شکل ۱۲۵ دایره‌ای که باید رسم کنیم دایره $PQBA$ است؛ PQ قطر و O مرکز دایرهٔ مفروض، Γ، است. نقطهٔ T، مرکز دایرهٔ مطلوب، نقطهٔ تقاطع OT و ST، یعنی عمودمنصفهای PQ و AB، است.

فرض کنید $\overline{OP} = d$، $\overline{AS} = c$، $\overline{OS} = k$، $\angle OST = \alpha$ و r شعاع دایرهٔ مطلوب باشد که برابر است با

$$\overline{AT} = \overline{BT} = \overline{PT} = \overline{QT}$$

مقادیر c، d، k و α معلوم‌اند، ولی r نامعلوم است. چون $\overline{ST}=\sqrt{r^۲-c^۲}$ و $\overline{OT}=\sqrt{r^۲-d^۲}$، از قانون کسینوسها در $\triangle OST$ نتیجه می‌شود

$$r^۲-d^۲=r^۲-c^۲+k^۲-۲k\sqrt{r^۲-c^۲}\cos\alpha$$

و یا

$$\sqrt{r^۲-c^۲}=\frac{k^۲+d^۲-c^۲}{۲k\cos\alpha}$$

مستطیلی را که مساحتش $k^۲+d^۲-c^۲$ و طول ضلعی از آن $۲k\cos\alpha$ باشد می‌توان رسم کرد. طول ضلع دیگر این مستطیل $\sqrt{r^۲-c^۲}=\overline{ST}$ است. پس جای T تعیین می‌شود.

یادداشت. برای دیدن تعمیمی از این مسأله نگاه کنید به

crux Mathematicorum 7(1981)207, Problem # 562.

مسألهٔ ۱۶۸. راه‌حل اول. فرض کنید $x=t^۳$. در این صورت از معادلهٔ

$$t^۳+at^۲+bt+c=\circ$$

به‌دست می‌آوریم

$$-(x+c)=\sqrt[۳]{x}(b+a\sqrt[۳]{x})$$

هر دو طرف این معادله را مکعب می‌کنیم:

$$-(x+c)^۳=x(b^۳+a^۳x+۳ab\sqrt[۳]{x}(b+a\sqrt[۳]{x}))$$

و یا

$$-(x+c)^۳=x(b^۳+a^۳x-۳ab(x+c))$$

راه‌حل دوم. اگر m، n و p ریشه‌های چندجمله‌ای مفروض باشند، آنگاه

$$m+n+p=-a,\ mn+mp+np=b,\ mnp=-c$$

ریشه‌های معادلهٔ مطلوب $m^۳$، $n^۳$ و $p^۳$ هستند. بنابراین

$$\begin{aligned}m^۳+n^۳+p^۳&=(m+n+p)^۳-۳(m+n+p)(mn+mp+np)+۳mnp\\&=-a^۳+۳ab-۳c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m^۳n^۳+m^۳p^۳+n^۳p^۳&=۳m^۲n^۲p^۲+(mn+mp+np)^۳\\&\quad-۳(m+n+p)(mn+mp+np)mnp\\&=۳c^۲+b^۳-۳abc\end{aligned}$$

$$m^۳n^۳p^۳=-c^۳$$

معادله‌ای که در جستجوی آنیم چنین است

$$x^۳ + (a^۳ - ۳ab + ۳c)x^۲ + (۳c^۲ + b^۳ - ۳abc)x + c^۳ = ۰$$

مسألهٔ ۱۶۹. به‌آسانی معلوم می‌شود که نابرابری

$$\frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{a + b + c} \geqslant \frac{a + b + c}{۳}$$

هم‌ارز است با

$$(a - b)^۲ + (b - c)^۲ + (c - a)^۲ \geqslant ۰$$

که آشکارا درست است. اگر این نابرابری را در مورد هر یک از جمله‌های طرف چپ نابرابری مورد نظر به‌کار بریم نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

تبصره. ثابت کنید که به‌طور کلیتر، اگر

$$S_۲ = a_۱^۲ + a_۲^۲ + \cdots + a_n^۲$$

$$S_۱ = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n, \qquad a_i > ۰$$

آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{S_۲ - a_i^۲}{S_۱ - a_i} \geqslant S_۱$$

مسألهٔ ۱۷۰. عدد صحیحی که با رقم ۶ آغاز شود به‌شکل $۶ \times ۱۰^n + m$ است، که در آن $۰ \leqslant m \leqslant ۱۰^n - ۱$.

الف) در این حالت $۲۵m = ۶ \times ۱۰^n + m$، و یا $m = ۲^{n-۲} \times ۵^n$. پس عددهای مطلوب به‌این شکل‌اند

$$۶ \times ۱۰^n + ۲^{n-۲} \times ۵^n = ۶۲۵ \times ۱۰^{n-۲}$$

یعنی عددهایی مانند ۶۲۵، ۶۲۵۰، ۶۲۵۰۰، ....

ب) فرض کنید اولین رقم d باشد. در این صورت باید $۳۵m = d \times ۱۰^m + m$ و یا $۱۷m = d \times ۲^{m-۱} \times ۵^m$. چون $۱ \leqslant d \leqslant ۹$ چنین چیزی ممکن نیست.

مسألهٔ ۱۷۱. فرض کنید اندازهٔ زاویه‌های چندضلعی $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\cdots$ و α_n و اندازهٔ زاویه‌های خارجی متناظر این زاویه‌ها $\beta_۱$، $\beta_۲$، $\cdots$ و β_n باشند. در این صورت $\alpha_i + \beta_i = ۱۸۰^\circ$، $i = ۱, ۲, \cdots, n$. اگر $n \geqslant ۳$ و $\alpha_n = \alpha_{n-۱} = \alpha_{n-۲} = ۶۰^\circ$، آنگاه $\beta_n = \beta_{n-۱} = \beta_{n-۲} = ۱۲۰^\circ$ و درنتیجه $\beta_n + \beta_{n-۱} + \beta_{n-۲} = ۳۶۰^\circ$. از طرف دیگر، می‌دانیم که مجموع همهٔ زاویه‌های خارجی هر چندضلعی محدب ۳۶۰° است. درنتیجه $n = ۳$.

اگر چندضلعی محدبی چهار زاویهٔ قائمه داشته باشد باید مستطیل باشد. به‌طور کلیتر، اگر مجموع r زاویهٔ چندضلعی محدبی $(r - ۲)۱۸۰^\circ$ باشد، این چندضلعی rضلعیی با زاویه‌های مفروض است.

مسألهٔ ۱۷۲. چون

$$۱ + y^۴ \geqslant ۲y^۲,\ \ ۱ + z^۴ \geqslant ۲z^۲,\ \ ۱ + x^۴ \geqslant ۲x^۲$$

(و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $x^۲ = y^۲ = z^۲ = ۱$) کافی است ثابت کنیم

$$x^۴y^۲ + y^۴z^۲ + z^۴x^۲ \geqslant ۳x^۲y^۲z^۲$$

اما این نابرابری نتیجهٔ بی‌درنگ نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی است. برابری برقرار است اگر و فقط اگر یا $x = y = z = ۰$ و یا $x^۲ = y^۲ = z^۲ = ۱$.

مسألهٔ ۱۷۳. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k تعداد توانهای kاُم بین ۱ و $۱۰^{۳۰}$ (و خود این عدد) برابر است با تعداد عددهای صحیح بین ۱ و $۱۰^{\frac{۳۰}{k}}$ (و خود این دو عدد). بنابر اصل شمول و عدم شمول، جواب چنین است

$$۱۰^{۳۰} - ۱۰^{\frac{۳۰}{۲}} - ۱۰^{\frac{۳۰}{۳}} - ۱۰^{\frac{۳۰}{۵}} + ۱۰^{\frac{۳۰}{۲\times۳}} + ۱۰^{\frac{۳۰}{۲\times۵}} + ۱۰^{\frac{۳۰}{۳\times۵}} - ۱۰^{\frac{۳۰}{۲\times۳\times۵}}$$
$$= ۱۰^{۳۰} - ۱۰^{۱۵} - ۱۰^{۱۰} - ۱۰^{۶} + ۱۰^{۵} + ۱۰^{۳} + ۱۰^{۲} - ۱۰$$

مسألهٔ ۱۷۴. چند عدد اول از اعداد به‌شکل $۱۶^n + ۱۰^n - ۱$ عبارت‌اند از ۲۵، ۲۷۵، ۴۱۲۵، $\cdots$. می‌توان حدس زد که جواب ۲۵ است. برای اثبات این حدس می‌کوشیم که از هر یک از اعداد مجموعهٔ مفروض یک عامل ۲۵ بیرون بکشیم. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$۱۶^n + ۱۰n - ۱ = (۱ + ۱۵)^n + ۱۰n - ۱ = ۱ + ۱۵n + ۱۵^۲k + ۱۰n - ۱$$
$$= ۲۵(n + ۹k)$$

که در آن k عددی صحیح است (چون در بسط دوجمله‌ای $(۱۵ + ۱)^n$ از جملهٔ سوم به بعد هر جمله شامل عامل $۱۵^۲$ است). درنتیجه بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک مورد نظر ۲۵ است.

مسألهٔ ۱۷۵. راه‌حل اول. (به‌استقرا). نتیجه به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$ برقرار است. فرض کنید نتیجه به‌ازای $n = k \geqslant ۲$ برقرار باشد. در این صورت

$$a_۱a_۲\cdots a_k \geqslant ۱ - k + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k$$

دو طرف را در $a_{k+۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$a_۱a_۲\cdots a_ka_{k+۱} \geqslant a_{k+۱}(۱ - k + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k)$$
$$\geqslant a_{k+۱} + (۱ - k + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k) - ۱ \quad \text{با توجه به حالتی که } n = ۲$$
$$= a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k + a_{k+۱} - k$$

در این رابطه برابری برقرار است اگر و فقط اگر یا $a_{k+1} = 1$ و همهٔ عددهای a_1، a_2، $\cdots$ و a_k، مگر حداکثر یکی از آنها، برابر واحد باشند، و یا $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = k - 1 + 1$. در هر دو حالت، شرط این است که همهٔ a_iها بجز حداکثر یکی از آنها ۱ باشند.

راه‌حل دوم. فرض کنید $a_i = 1 + t_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. در این صورت $t_i \geqslant 0$ و باید ثابت کنیم که نابرابری زیر برقرار است

$$n + (1 + t_1)(1 + t_2)\cdots(1 + t_n) \geqslant 1 + n + t_1 + \cdots + t_n$$

اما

$$(1 + t_1)(1 + t_2)\cdots(1 + t_n) = 1 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n + p$$

که در آن $p = \prod_i (1 + t_i) - 1 - \sum_i t_i$ و p نامنفی است، و صفر است اگر و فقط اگر دست‌کم $n - 1$ تا از t_iها صفر باشند.

مسألهٔ ۱۷۶. بنابر قضیهٔ باقیمانده‌ها $p(a) = a$، $p(b) = b$ و $p(c) = c$. با فرض اینکه a، b و c متمایز باشند، می‌توانیم بنویسیم

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)q(x) + r(x)$$

که در آن $r(x)$ چندجمله‌ایی با درجهٔ حداکثر ۲ است. باید $r(a) = a$، $r(b) = b$ و $r(c) = c$. بنابراین درجهٔ چندجمله‌ای $r(x) - x$ حداکثر ۲ است و چون a، b و c ریشه‌های آن هستند باید چندجمله‌ای صفر باشد. پس باقیماندهٔ مطلوب x است.

تبصره. ثابت کنید که اگر a_1، a_2، $\ldots$ و a_n متمایز از هم باشند و a_i باقیماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x - a_i$ باشد $(i = 1, 2, \ldots, n)$، آنگاه به ازای چندجمله‌ایی مانند $p(x)$،

$$p(x) = q(x)\prod(x - a_i) + x$$

مسألهٔ ۱۷۷. اگر $x - 1$ را به‌جای x قرار دهیم به‌دست می‌آوریم

$$(1 - x)^2 F(1 - x) + F(x) = 2(1 - x) - (1 - x)^4$$

اگر دستگاه معادله‌های شامل این معادله و معادلهٔ مفروض را برحسب $F(x)$ حل کنیم، به‌دست می‌آوریم $F(x) = 1 - x^2$.

مسألهٔ ۱۷۸. اگر معادلهٔ مفروض را به‌پیمانهٔ ۴ در نظر بگیریم معلوم می‌شود که ممکن نیست دقیقاً یکی یا دقیقاً دو تا و یا دقیقاً سه تا از عددهای مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ فرد باشد. پس هر سه عدد باید زوج باشند و به‌ازای عددهای صحیحی مانند a_1، b_1 و c_1، $a = 2a_1$، $b = 2b_1$ و $c = 2c_1$. درنتیجه

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4a_1^2 b_1^2 \equiv 0 \ (\text{به پیمانهٔ } 4)$$

باز هم می‌توانیم نتیجه بگیریم که a_1، b_1 و c_1 نیز هر سه باید زوج باشند، و عددهای صحیحی مانند

$a_۲$، $b_۲$ و $c_۲$ وجود دارند به‌طوری‌که $a_۱ = ۲a_۲$، $b_۱ = ۲b_۲$ و $c_۱ = ۲c_۲$. می‌توان استدلال را به‌همین ترتیب ادامه داد و ثابت کرد که $a_۲$، $b_۲$ و $c_۲$ نیز هر سه باید زوج باشند و همین طور الی آخر. اما این کار را نمی‌توان به‌طور نامتناهی ادامه داد. درنتیجه، معادلهٔ مورد نظر جوابهای صحیحی ندارد.

یادداشت. برای دیدن تعمیمهایی از این مسأله نگاه کنید به[۱]

M.S. Klamkin, *USA Mathematical Olympiads 1972-1986*, MAA., Washington D.C. 1988, pp. 32-33.

مسألهٔ ۱۷۹. راه‌حل اول. چون $a_{n+۲} - ۱ = a_۱ a_۲ \cdots a_{n+۱}$ نتیجه می‌شود که

$$a_{n+۱} = \frac{a_{n+۲} - ۱}{a_{n+۱} - ۱}$$

بنابراین

$$\frac{۱}{a_{n+۲} - ۱} = \frac{۱}{(a_{n+۱} - ۱)a_{n+۱}} = \frac{۱}{a_{n+۱} - ۱} - \frac{۱}{a_{n+۱}}, \quad n = ۱, ۲, \cdots$$

ازاین‌رو

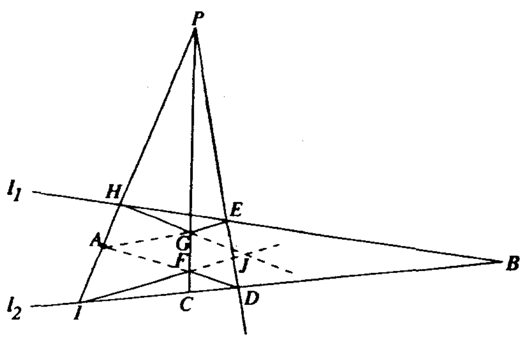
$$۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{a_{n+۱}} = ۱ + \sum_{i=۱}^{\infty} \left\{ \frac{۱}{a_{n+۱} - ۱} - \frac{۱}{a_{n+۲} - ۱} \right\} = ۱ + \frac{۱}{a_۲ - ۱} = ۲$$

راه‌حل دوم. به‌استقرا می‌توان ثابت کرد که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{a_i} = ۲ - \frac{۱}{a_۱ a_۲ \cdots a_n}$$

و نتیجه مطلوب از این رابطه حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۱۸۰. از نقطهٔ B خطهای $l_۱$ و $l_۲$ را که از نزدیک A می‌گذرند رسم کنید و امتداد دهید. خطهای اختیاری PA، PC و PD را مانند شکل ۱۲۶ رسم کنید. نقطه‌های تقاطع AE و AD با PC را G و F



شکل ۱۲۶

---

۱. ترجمهٔ فارسی این کتاب را مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است.

بنامید. مثلثهای GHE و FID را در نظر بگیرید. بنابر قضیهٔ دزارگ (پیوست، ه (۳۷) را ببینید) HG و IF یکدیگر را در نقطه‌ای روی AB نزدیک به A قطع می‌کنند. اکنون AB را می‌توان گام به‌گام رسم کرد.

مسألهٔ ۱۸۱. صفحه‌ای که با مرکز و نقطهٔ وسط وتر مشترک دو دایره (یا در صورت لزوم نقطهٔ تماس دو دایره) مشخص می‌شود شامل خطهای عمود بر صفحه‌های دو دایره و گذرنده از مرکز آنها نیز هست. اما خطی که بر صفحهٔ دایره‌ای عمود باشد و از مرکز آن دایره بگذرد مکان‌هندسی نقاطی در فضاست که از نقاط دایره هم‌فاصله‌اند. پس دو خط مذکور در نقطه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند که از همهٔ نقاط دو دایره، بخصوص دو نقطهٔ انتهایی وتر مشترک یا نقطهٔ تماس آنها، به یک فاصله است. این نقطه مرکز کره‌ای است که شامل هر دو دایره است.

مسألهٔ ۱۸۲. فرض کنید عددهای اول متمایزی مانند p، q و r وجود داشته باشند به‌طوری‌که ریشه‌های سوم آنها جمله‌هایی از تصاعدی حسابی باشند؛ یعنی، عددهای حقیقی a و d و عددهای صحیح b و c وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$\sqrt[3]{p}=a,\ \sqrt[3]{q}=a+bd,\ \ \sqrt[3]{r}=a+cd$$

چون

$$d=\frac{\sqrt[3]{q}-\sqrt[3]{p}}{b}=\frac{\sqrt[3]{r}-\sqrt[3]{p}}{c}$$

نتیجه می‌شود

$$u\sqrt[3]{p}=v\sqrt[3]{q}+w\sqrt[3]{r}$$

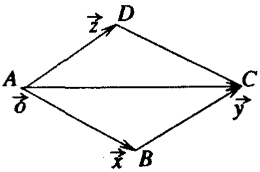
که در آن $u=c-b$، $v=c$ و $w=-b$، و u، v و w عددهایی صحیح‌اند. از مکعب کردن این برابری به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}u^۳p&=v^۳q+w^۳r+۳vw\sqrt[3]{qr}(v\sqrt[3]{q}+w\sqrt[3]{r})\\&=v^۳q+w^۳r+۳uvw\sqrt[3]{pqr}\end{aligned}$$

اما از این برابری نتیجه می‌شود که $\sqrt[3]{pqr}$ عددی گویاست، یعنی برابر $\dfrac{u^۳p-v^۳q-w^۳r}{۳uvw}$ است؛ و این ممکن نیست. بنابراین عددهایی اول مانند p، q و r با ویژگی بیان شده وجود ندارند.

تبصره. ثابت کنید که اگر در صورت مسأله به‌جای «ریشهٔ سوم»، «ریشهٔ nاُم» ($n \geqslant ۲$)، یا به‌جای «تصاعد حسابی»، «تصاعد هندسی» بگذاریم باز هم نتیجه برقرار است.

مسألهٔ ۱۸۳. فرض کنید ED خطی عمود بر صفحهٔ BOC باشد. در این صورت ED با AO موازی است و بنابراین در صفحهٔ AOD قرار دارد. اکنون BC هم بر AD عمود است هم بر ED، و بنابراین بر صفحهٔ AOD و هر خط در این صفحه عمود است. بخصوص، BC بر OD عمود است.



شکل ۱۲۷

مسألهٔ ۱۸۴. راه‌حل اول. فرض کنید A مبدأ فضای ۳ بعدی باشد و $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{AD}$ (شکل ۱۲۷ را ببینید). توجه کنید که چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و فقط اگر دو قطر آن یکدیگر را نصف کنند.

حالت ۱. $\left\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right\}$ مجموعه‌ای خطی است. فرض کنید چهار رأس P، Q، R و S به‌ترتیب $t\overrightarrow{x}$، $(۱-u)\overrightarrow{x}+u\overrightarrow{y}$، $(۱-v)\overrightarrow{y}+v\overrightarrow{z}$ و $w\overrightarrow{z}$ باشند و t، u، v و w بین ۰ و ۱ (و یا خود این دو عدد) باشند. در این صورت $PQRS$ متوازی‌الاضلاع است اگر فقط و اگر

$$\frac{۱}{۲}\left\{t\overrightarrow{x}+(۱-v)\overrightarrow{y}+v\overrightarrow{z}\right\} = \frac{۱}{۲}\left\{(۱-u)\overrightarrow{x}+u\overrightarrow{y}+w\overrightarrow{z}\right\}$$

چون $\overrightarrow{x}$، $\overrightarrow{y}$ و $\overrightarrow{z}$ خطی‌اند، $u = ۱-t$، $v = t$ و $w = t$، و مکان‌هندسی مرکز متوازی‌الاضلاع چنین است

$$\left\{\frac{۱}{۲}(t\overrightarrow{x}+(۱-t)\overrightarrow{y}+t\overrightarrow{z}) : ۰ \leqslant t \leqslant ۱\right\} = \left\{t\left(\frac{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{z}}{۲}\right)+(۱-t)\frac{\overrightarrow{y}}{۲} : ۰ \leqslant t \leqslant ۱\right\}$$

یعنی پاره‌خطی که نقطه‌های وسط دو قطر را به‌یکدیگر وصل می‌کند.

حالت ۲. $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\}$ مجموعه‌ای وابسته خطی است (یعنی A، B، C و D همصفحه‌اند). در این حالت به‌ازای عددهایی حقیقی مانند r و s، $\overrightarrow{y} = r\overrightarrow{x}+s\overrightarrow{z}$. در این صورت P، Q، R و S به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$t\overrightarrow{x}$$

$$(۱-u)\overrightarrow{x}+u\overrightarrow{y} = (۱-u+ur)\overrightarrow{x}+us\overrightarrow{z}$$

$$(۱-v)\overrightarrow{y}+v\overrightarrow{z} = (۱-v)r\overrightarrow{x}+[(۱-v)s+v]\overrightarrow{z}$$

$$w\overrightarrow{z}$$

از این شرط که قطرها یکدیگر را نصف کنند نتیجه می‌شود

$$(۱-u+ur)\overrightarrow{x}+(us+w)\overrightarrow{z} = [t+(۱-v)r]\overrightarrow{x}+[(۱-v)s+v]\overrightarrow{z}$$

و درنتیجه

$$۱-u+ur = t+r-vr, \quad us+w = s-vs+v$$

اگر $r = ۱$، آنگاه $۱ = t+۱-v$ و یا $t = v$ و نقطهٔ وسط قطرها عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}\left[\overrightarrow{x}+(us+w)\overrightarrow{z}\right] = \frac{۱}{۲}\left[\overrightarrow{x}+(s-ts+t)\overrightarrow{z}\right]$$

$$= (۱-t)\left(\frac{\overrightarrow{x}+s\overrightarrow{z}}{۲}\right)+t\left(\frac{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{z}}{۲}\right)$$

که در آنها $۰ \leqslant t \leqslant ۱$.

اگر $s = ۱$، آنگاه $u + w = ۱$ و نقطهٔ وسط قطرها عبارت است از

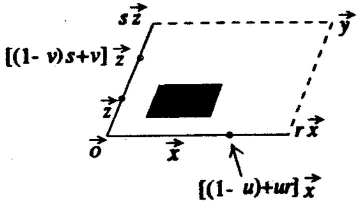
$$\frac{۱}{۲}\left[(۱ - u + ur)\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}\right] = (۱ - u)\left(\frac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}}{۲}\right) + u\left(\frac{r\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}}{۲}\right)$$

به‌طورکلی، نقطهٔ وسط قطرها عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}\left\{[(۱ - u) + ur]\overrightarrow{x} + [(۱ - v)s + v]\overrightarrow{z}\right\}, \quad u \geqslant ۰, v \leqslant ۱$$

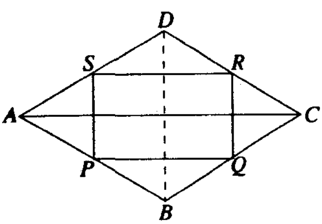
مکان‌هندسی مورد نظر در شکل ۱۲۸ سایه خورده است. این مکان‌هندسی متوازی‌الاضلاعی است که ضلعهایش با بردارهای $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{z}$ موازی و چهار رأس آن در نقاط زیر واقع‌اند:

$$\frac{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}}{۲}, \qquad \frac{\overrightarrow{x} + s\overrightarrow{z}}{۲}, \qquad \frac{r\overrightarrow{x} + s\overrightarrow{z}}{۲}, \qquad \frac{r\overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}}{۲}$$



شکل۱۲۸

راه‌حل دوم. (وقتی‌که A ، B ، C و D همصفحه نباشند.) نخست توجه کنید که $PQRS$ مسطح است و صفحهٔ شامل آن یا موازی با AC است یا امتداد AC را در نقطه‌ای مانند T قطع می‌کند. در حالت اخیر، T باید هم بر امتداد PQ واقع باشد و هم بر امتداد RS، و این با موازی بودن PQ و RS تناقض دارد. [توجه کنید که پاره‌خطهای TP و TQ هم در صفحهٔ ABC واقع‌اند و هم در صفحهٔ $PQRS$، و چون این دو صفحه بر هم منطبق نیستند، TP و TQ باید بر هم منطبق باشند؛ یعنی، T باید بر PQ واقع باشد. از استدلال مشابهی در مورد صفحه‌های ADC و $PQRS$ معلوم می‌شود که T باید بر SR واقع باشد.ـم.] بنابراین AC با $PQRS$ موازی است. چون PQ در صفحهٔ ABC واقع است، PQ و AC متنافر نیستند. پس $AC \parallel PQ \parallel RS$. به‌همین ترتیب $BD \parallel PS \parallel QR$. (شکل ۱۲۹ را ببینید.)



شکل ۱۲۹

فرض کنید $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$. در این صورت $\overrightarrow{AS} = k\overrightarrow{AD}$، $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + (۱ - k)\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AD} + (۱ - k)\overrightarrow{DC}$. مرکز $PQRS$ را M می‌نامیم. در این صورت

$$\overrightarrow{AM} = \frac{۱}{۴}\left\{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{AS}\right\}$$

$$= \frac{۱}{۴}\left\{(۱ + k)\overrightarrow{AB} + (۱ + k)\overrightarrow{AD} + (۱ - k)\overrightarrow{BC} + (۱ - k)\overrightarrow{DC}\right\}$$

$$= (۱ - k)\left\{\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}{۴} + \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}}{۴}\right\} + k\left\{\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{۲}\right\}$$

$$= (۱ - k)۲\frac{\overrightarrow{AC}}{۲} + k\left\{\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{۲}\right\} = (۱ - k)\frac{\overrightarrow{AC}}{۲} + k\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{۲}$$

مقدار k بین ۰ و ۱ (و خود این دو عدد) تغییر می‌کند، و درنتیجه $\overrightarrow{AM}$ روی پاره‌خطی که نقاط وسط AC و BD را به‌یکدیگر وصل می‌کند تغییر می‌کند.

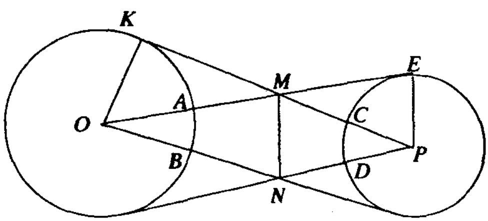
مسألهٔ ۱۸۵. راه‌حل اول. $\triangle OKM$ با $\triangle PEM$ متشابه است (شکل ۱۳۰ را ببینید)، و درنتیجه $\frac{\overline{OK}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PM}}$. چون $\overline{OK} = \overline{OA}$ و $\overline{PE} = \overline{PC}$، پس

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PM}} \qquad (۱)$$

از تشابه دو مثلث OAB و OMN و دو مثلث PCD و PMN نتیجه می‌شود

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}, \qquad \frac{\overline{PC}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{MN}} \qquad (۲)$$

از ترکیب رابطه‌های (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{MN}}$، و درنتیجه $\overline{AB} = \overline{CD}$.

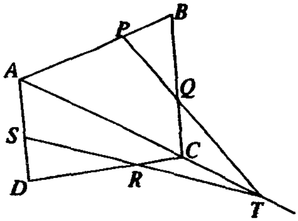


شکل ۱۳۰

راه‌حل دوم. فرض کنید $O = (۰, ۰)$، $P = (d, ۰)$ و شعاع دایره‌های به مرکز O و P به‌ترتیب r و R باشد. فرض کنید $y = mx$ معادلهٔ OE باشد. فاصلهٔ P از OE، $R = \frac{|md|}{\sqrt{۱ + m^۲}}$ است. بنابراین $\frac{R^۲}{d^۲} = \frac{m^۲}{۱ + m^۲}$. خط $y = mx$ دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = r^۲$ را در نقطه‌ای قطع می‌کند که عرض آن از $y^۲(۱ + m^۲) = m^۲r^۲$، یعنی $y^۲ = \frac{R^۲r^۲}{d^۲}$، به‌دست می‌آید. بنابراین طول AB، $\frac{۲Rr}{d}$ است. چون عبارت $\overline{AB}$ نسبت به شعاع دو دایره متقارن است، $\overline{CD}$ نیز از همین عبارت به‌دست می‌آید. بنابراین $\overline{AB} = \overline{CD}$.

مسألهٔ ۱۸۶. ابتدا فرض کنید $AC \parallel PQ$. چون A، C، R، S و A، P، Q، C دو صفحه را مشخص می‌کنند که در امتداد AC متقاطع‌اند، اگر PQ و SR با هم موازی نباشند باید یکدیگر را در نقطه‌ای

واقع بر خط AC قطع کنند که این هم با موازی بودن PQ و AC تناقض دارد. پس $SR \parallel PQ$. بنابراین $SR \parallel AC$. در این صورت روشن است که $P'Q' \parallel A'C'$ [توجه کنید که $\frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}}$ و بنابراین $\frac{\overline{B'P'}}{\overline{P'A'}} = \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{Q'C'}}$.ـم.] و $S'R' \parallel A'C'$ و درنتیجه $P'Q' \parallel S'R'$. بنابراین، P'، Q'، S' و R' همصفحه‌اند. اکنون فرض کنید که هیچ‌یک از خطهای PQ و SR با AC موازی نباشد. در این صورت PQ و SR هر دو AC را در T، یعنی نقطهٔ تقاطع امتداد AC با صفحهٔ $PQRS$، قطع می‌کنند (شکل ۱۳۱ را ببینید). بنابر قضیهٔ منلائوس (پیوست، ه (۲۰) را ببینید)،



شکل ۱۳۱

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{TC}} = -\frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{BP}} = -\frac{\overline{RD}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{DS}}$$

روشن است که $P'Q'$ با $A'C'$ موازی نیست. پس دو خط $P'Q'$ و $A'C'$ یکدیگر را در نقطه‌ای مانند T' قطع می‌کنند و

$$\frac{\overline{A'T'}}{\overline{T'C'}} = -\frac{\overline{Q'B'}}{\overline{C'Q'}} \cdot \frac{\overline{P'A'}}{\overline{B'P'}} = -\frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{BP}}$$

به‌همین ترتیب $S'R'$ و $A'C'$ یکدیگر را در نقطه‌ای مانند T'' قطع می‌کنند و

$$\frac{\overline{A'T''}}{\overline{T''C''}} = -\frac{\overline{R'D'}}{\overline{C'R'}} \cdot \frac{\overline{S'A'}}{\overline{D'S'}} = -\frac{\overline{RD}}{\overline{CR}} \cdot \frac{\overline{SA}}{\overline{DS}} = -\frac{\overline{QB}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{A'T'}}{\overline{T'C'}}$$

بنابراین $T' = T''$، و درنتیجه $P'Q'$ و $S'R'$ یکدیگر را در نقطهٔ T' قطع می‌کنند. بنابراین P'، Q'، S' و R' همصفحه‌اند.

مسألهٔ ۱۸۷. بنابر قانون سینوسها،

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

و بنابراین شرط (الف) تبدیل می‌شود به

$$\sin A + \sin B = k \sin C = k \sin(\pi - A - B) = k \sin(A + B)$$

و یا

$$۲k \sin \frac{A+B}{۲} \cos \frac{A+B}{۲} = ۲ \sin \frac{A+B}{۲} \cos \frac{A-B}{۲}$$

چون $\pi > \frac{A+B}{۲} > ۰$، می‌توانیم $۲ \sin \frac{A+B}{۲}$ را حذف کنیم و به‌دست آوریم

$$k \cos \frac{A+B}{۲} = \cos \frac{A-B}{۲} \qquad (۱)$$

بنابر شرط (ب)،

$$\frac{\cos \frac{A}{۲}}{\sin \frac{A}{۲}} + \frac{\cos \frac{B}{۲}}{\sin \frac{B}{۲}} = k \frac{\sin \frac{A+B}{۲}}{\cos \frac{A+B}{۲}}$$

و درنتیجه

$$\cos\frac{A+B}{۲}\left\{\cos\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}+\cos\frac{B}{۲}\sin\frac{A}{۲}\right\}=k\sin\frac{A+B}{۲}\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}$$

بنابراین

$$\cos\frac{A+B}{۲}\sin\frac{A+B}{۲}=\frac{۱}{۲}k\sin\frac{A+B}{۲}\left\{\cos\frac{A-B}{۲}-\cos\frac{A+B}{۲}\right\}$$

پس

$$(۲)\qquad ۲\cos\frac{A+B}{۲}=k\left\{\cos\frac{A-B}{۲}-\cos\frac{A+B}{۲}\right\}$$

اکنون از (۱) و (۲) با هم نتیجه می‌شود $k^۲=۲+k$، و یا

$$(k-۲)(k+۱)=۰$$

چون $k=-۱$ قابل قبول نیست، نتیجه می‌گیریم $k=۲$. مثلاً وقتی $k=۲$، شرایط (الف) و (ب) در مورد مثلثهای متساوی‌الاضلاع برقرارند.

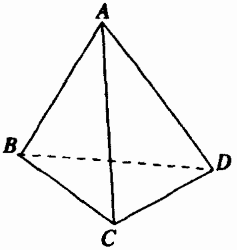
مسألهٔ ۱۸۸. راه‌حل اول. فرض کنید A ، B ، C و D همصفحه نباشند. چهاروجهی $ABCD$ را در نظر بگیرید (شکل ۱۳۲ را ببینید). چون در هر زاویهٔ سه‌وجهی مجموع زاویه‌های هر دو وجه بزرگتر از زاویهٔ وجه سوم است، پس

$$\angle CAB+\angle CAD>\angle DAB=۹۰^\circ$$

$$\angle DBC+\angle DBA>\angle ABC=۹۰^\circ$$

$$\angle ACD+\angle ACB>\angle BCD=۹۰^\circ$$

$$\angle BDA+\angle BDC>\angle CDA=۹۰^\circ$$



شکل ۱۳۲

اگر این چهار نابرابری را با هم جمع کنیم، از برابری

$$\angle DAB+\angle ABC+\angle BCD+\angle CDA=۳۶۰^\circ$$

نتیجه می‌گیریم که مجموع همهٔ زاویه‌های چهاروجه مثلثی شکل چهاروجهی $ABCD$ بزرگتر از $۴(۱۸۰^\circ)=۷۲۰^\circ$ است. چون این نتیجه درست نیست، A، B، C و D باید همصفحه باشند.

راه‌حل دوم. نقطهٔ D هم بر صفحه‌ای واقع است که از A می‌گذرد و بر AB عمود است و هم بر صفحه‌ای که از C می‌گذرد و بر BC عمود است. پس D بر خط l که فصل مشترک این دو صفحه است قرار دارد. چون AB و BC که خطوط قائم این صفحه‌ها هستند بر یکدیگر عمودند، این دو صفحه متعامدند و خط l بر صفحهٔ ABC عمود است.

فرض کنید l صفحهٔ ABC را در D' قطع کند. در این صورت $ABCD'$ مستطیلی مسطح است. پس AC از D و D' تحت زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. پس D و D' هر دو نقاط تقاطع l با کره‌ای

به قطر AC هستند. اما l بر شعاعی از این کره (که D را به نقطهٔ وسط AC وصل می‌کند) عمود و بنابراین مماس بر کره است. بنابراین D و D' بر هم منطبق و A، B، C و D هم‌صفحه‌اند.

راه‌حل سوم. نقطهٔ D' را مانند راه‌حل دوم مشخص کنید. در نتیجه

$$\overline{AD}^۲ + \overline{DC}^۲ = \overline{AC}^۲ = \overline{AD'}^۲ + \overline{D'C}^۲$$
$$= (\overline{AD}^۲ + \overline{DD'}^۲) + (\overline{DD'}^۲ + \overline{DC}^۲)$$
$$= \overline{AD}^۲ + \overline{DC}^۲ + ۲\overline{DD'}^۲ \qquad \text{(بنابر قضیهٔ فیثاغورس)}$$

بنابراین $\overline{DD'} = ۰$ و $D = D'$.

راه‌حل چهارم. هندسه مختصاتی سه‌بعدی را به‌کار می‌گیریم. فرض کنید B در مبدأ مختصات، A روی محور xها و C رو محور yها واقع باشد؛ درنتیجه، به‌ازای عددهای ناصفری چون a و c، $A = (a, ۰, ۰)$، $B = (۰, ۰, ۰)$ و $C = (۰, c, ۰)$. فرض کنید $D = (x, y, z)$. در این صورت

$$\angle BAD = ۹۰^\circ \Rightarrow ۰ = (a, ۰, ۰) \cdot (x - a, y, z) = a(x - a)$$
$$\Rightarrow x = a$$
$$\angle BCD = ۹۰^\circ \Rightarrow ۰ = (۰, c, ۰) \cdot (x, y - c, z) = c(y - c)$$
$$\Rightarrow y = c$$
$$\angle ADC = ۹۰^\circ \Rightarrow ۰ = (x - a, y, z) \cdot (x, y - c, z)$$
$$= x(x - a) + y(y - c) + z^۲ = z^۲$$

بنابراین $D = (a, c, ۰)$ و نتیجه حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۱۸۹. چون $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = ۲R$، باید ثابت کنیم

$$۲(\sin A - \sin B) = ۱$$

یعنی

$$۲(\cos ۳۶^\circ - \cos ۷۲^\circ) = ۲(\sin ۱۲۶^\circ - \sin ۱۸^\circ) = ۱$$

فرض کنید $\theta = ۷۲^\circ$. در این صورت $\cos ۳\theta = \cos(۳۶۰^\circ - ۲\theta) = \cos ۲\theta$. چون

$$\cos ۳\theta = ۴\cos^۳\theta - ۳\cos\theta, \quad \cos ۲\theta = ۲\cos^۲\theta - ۱$$

در می‌یابیم که $x = \cos\theta$ عددی مثبت است که در معادلهٔ

$$۴x^۳ - ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$$

و یا

$$(x - ۱)(۴x^۲ + ۲x - ۱) = ۰$$

صدق می‌کند. چون $x \neq ۱$، $۴x^۲ + ۲x - ۱ = ۰$ و

$$\cos ۷۲^\circ = x = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}, \quad \cos ۳۶^\circ = \frac{\sqrt{۵} + ۱}{۴}$$

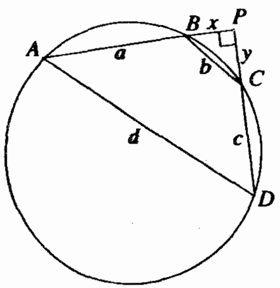
بنابراین

$$۲(\cos ۳۶^\circ - \cos ۷۲^\circ) = ۱$$

مسألهٔ ۱۹۰. فرض کنید P نقطهٔ تقاطع امتداد AB با امتداد DC باشد (شکل ۱۳۳ را ببینید). با توجه به اینکه $ABCD$ محاطی است، پس

$$\angle PDA = ۱۸۰^\circ - \angle ABC = \angle PBC$$

$$\angle PDA = ۱۸۰^\circ - \angle BCD = \angle PCB$$



شکل ۱۳۳

بنابراین $\triangle PAD \sim \triangle PCB$. پس اگر $y = \overline{PC}$ و $x = \overline{PB}$،

$$\frac{y}{b} = \frac{a + x}{d}, \quad \frac{x}{b} = \frac{c + y}{d}$$

با حل کردن این دستگاه برحسب x و y به‌دست می‌آوریم

$$(d^۲ - b^۲)y = b(ad + bc)$$

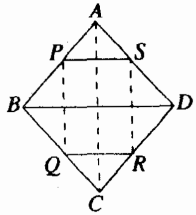
و

$$(d^۲ - b^۲)x = b(ab + cd)$$

چون $x^۲ + y^۲ = b^۲$، برابری مطلوب حاصل می‌شود.

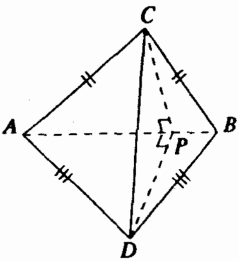
مسألهٔ ۱۹۱. چون PS و QR متقاطع‌اند، P، S، Q و R همصفحه‌اند. همچنین یا PQ و RS متقاطع‌اند یا $PQ \parallel RS$. فرض کنید PQ و RS یکدیگر را در نقطهٔ T قطع کنند. چون نقطهٔ T بر امتداد PQ واقع است، در صفحهٔ ABC قرار داد. به‌همین ترتیب T در صفحهٔ ACD واقع است. بنابراین T روی فصل مشترک این دو صفحه، یعنی خط AC، واقع است. بنابراین، در این حالت، PQ، RS و AC همرس‌اند.

فرض کنید امتدادهای PQ و RS یکدیگر را قطع نکنند (شکل ۱۳۴ را ببینید). در این صورت $PQ \parallel RS$. ثابت می‌کنیم که امتداد AC صفحهٔ $PQRS$ را قطع نمی‌کند. فرض کنید امتداد AC صفحهٔ $PQRS$ را در نقطهٔ V قطع کند. V در هر دو صفحهٔ $PQRS$ و ABC، و بنابراین روی فصل مشترک این دو صفحه، یعنی خط PQ، واقع است. به‌همین ترتیب V روی خط RS واقع است و به تناقض رسیده‌ایم. پس AC با صفحهٔ $PQRS$ موازی است. بنابراین AC و PQ یکدیگر را قطع نمی‌کنند. چون AC و PQ همصفحه‌اند، باید موازی هم باشند. بنابراین $PQ \parallel RS \parallel AC$.



شکل ۱۳۴

مسألهٔ ۱۹۲. فرض کنید P پای عمودهایی باشد که از C و D بر AB رسم شده‌اند (شکل ۱۳۵ را ببینید). در این صورت $\angle CPD = \theta$. طول AC را ۱ بگیرید. در این صورت $CP = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$. فرض کنید $\angle CAD = \alpha$. بنابر قانون کسینوسها،



شکل ۱۳۵

$$\overline{CD}^۲ = ۱ + ۱ - ۲\cos\alpha$$

و

$$\overline{CD}^۲ = \frac{۳}{۴} + \frac{۳}{۴} - \frac{۹}{۸}\cos\theta$$

بنابراین $۲\cos\alpha = \frac{۱}{۲} + \frac{۹}{۸}\cos\theta$ و یا

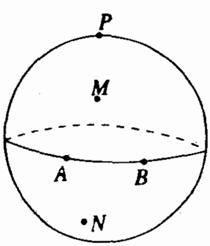
$$\alpha = \arccos\left(\frac{۴ + ۹\cos\theta}{۱۶}\right)$$

مسألهٔ ۱۹۳. از قانون کسینوسها به‌آسانی نتیجه می‌شود $\cos A = \frac{۳}{۴}$ و $\cos C = \frac{۱}{۸}$. بنابراین

$$\cos C = \frac{۱}{۸} = ۲\left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ - ۱ = ۲\cos^۲ A - ۱ = \cos ۲A$$

چون اندازهٔ $۲A$ و اندازهٔ C بین ۰ و π است، $۲A = C$.

مسألهٔ ۱۹۴. دایرهٔ دلخواهی روی کره رسم کنید؛ فرض کنید مرکز این دایره نقطهٔ P باشد (شکل ۱۳۶ را ببینید). از دو نقطهٔ دلخواه مانند A و B روی دایره کمانهای برابری رسم کنید که یکدیگر را در M و N قطع کنند. دایره‌ای که از P، M و N می‌گذرد دایرهٔ عظیمه است (P، M و N از A و B همفاصله‌اند؛ بنابراین، این نقطه‌ها بر صفحه‌ای واقع‌اند که AB را تحت زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. این صفحه از مرکز کره می‌گذرد و سطح کره را در دایره‌ای عظیمه قطع می‌کند.) با پرگارها فاصله‌های وتری PM، MN و NP را به صفحه منتقل و دایرهٔ محیطی مثلث PMN را (که به صفحه منتقل شده است) رسم کنید. شعاع این دایرهٔ محیطی برابر شعاع کره است.



شکل ۱۳۶

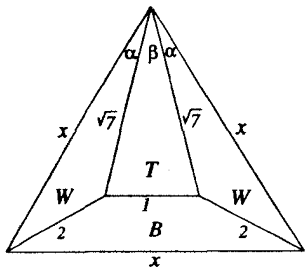
مسألهٔ ۱۹۵. اگر n نقطه مانند A، B، C، $\cdots$ داشته باشیم، طرف چپ اتحاد را می‌توان تعداد جفت پاره‌خطهایی تعبیر کرد که از وصل کردن این n نقطه به‌یکدیگر حاصل می‌شوند. نقطه‌ای دیگر مانند Q اضافه کنید و ترکیبهای چهارنقطه‌ای را در نظر بگیرید. ترکیب Q، A، B، C سه جفت پاره‌خط از مجموعهٔ جفت پاره‌خطهای اولیه به‌دست می‌دهد: AB، AC؛ AB، BC؛ BC، AC. ترکیب A، B، C، D نیز سه جفت پاره‌خط به‌دست می‌دهد: AB، CD؛ AC BD؛ AD، BC. بنابراین تعداد جفت پاره‌خطها سه برابر تعداد راههای انتخاب ۴ نقطه از $n + ۱$ نقطه، یعنی برابر با $۳\binom{n+۱}{۴}$ است.

مسألهٔ ۱۹۶. بنابر دستور اویلر، $V + F = E + ۲$، که در آن E تعداد یالها، F تعداد وجه‌ها و V تعداد

رأسهای چندوجهی محدب است. همچنین چون هر وجه دست‌کم سه یال دارد و هر یال متعلق به دو وجه است، $۲E \geqslant ۳F$. به‌همین ترتیب، چون از هر رأس دست‌کم سه یال خارج می‌شود و چون هر یال شامل دو رأس چندوجهی است، $۲E \geqslant ۳V$.

الف) در این حالت، $۳F \leqslant ۱۴$ و $۳V \leqslant ۱۴$. پس $F < ۴$ و $V < ۴$. اما $E + ۲ < ۸$ که با $E = ۷$ تناقض دارد.

ب) در این حالت، $۲E = ۶F$ و درنتیجه بنابر دستور اویلر، $۳V = ۳E + ۶ - ۳F = ۲E + ۶$. اما این نتیجه با $۲E \geqslant ۳V$ تناقض دارد.



شکل ۱۳۷

مسألهٔ ۱۹۷. راه‌حل اول. (شکل ۱۳۷ را ببینید). بنابر قانون کسینوسها، $۱ = ۷ + ۷ - ۱۴\cos\beta$، و بنابراین $\cos\beta = \frac{۱۳}{۱۴}$، و $\sin\beta = \frac{\sqrt{۲۷}}{۱۴}$

$$۲\cos^۲\alpha = ۱ + \cos ۲\alpha = ۱ + \cos\left(\frac{\pi}{۳} - \beta\right)$$
$$= ۱ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۳}{۱۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲۷}}{۱۴} = ۱ + \frac{۱۱}{۱۴} = \frac{۲۵}{۱۴}$$

بنابراین $\cos\alpha = \frac{۵}{۲\sqrt{۷}}$.

باز هم بنابر قانون کسینوسها،

$$۴ = ۷ + x^۲ - ۲x\sqrt{۷}\cos\alpha = ۷ + x^۲ - ۵x$$

درنتیجه $x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$. چون $x > ۱$، باید $x = \frac{۱}{۲}(۵ + \sqrt{۱۳})$.

راه‌حل دوم. با توجه به‌شکل ۱۳۷ و استفاده از قاعدهٔ هرون برای محاسبهٔ مساحت مثلث (پیوست، ه(۴۴) را ببینید) در می‌یابیم که مساحت مثلث T برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ و طول ارتفاع آن برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$ است. طول ارتفاع ذوزنقهٔ B برابر $\frac{(x - ۳)\sqrt{۳}}{۲}$، و بنابراین مساحت آن برابر $\frac{(x^۲ - ۲x - ۳)\sqrt{۳}}{۴}$ است. پس

$$۲(\text{مساحت}\,W) = (\text{مساحت مثلث بزرگ}) - (\text{مساحت}\,T) - (\text{مساحت}\,B)$$
$$= \frac{\sqrt{۳}x^۲}{۴} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۴} - \frac{\sqrt{۳}(x^۲ - ۲x - ۳)}{۴} = \frac{\sqrt{۳}x}{۲}$$

اما از قاعدهٔ هرون نتیجه می‌شود

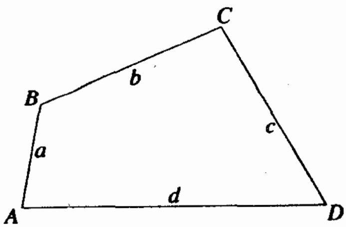
$$۲(\text{مساحت}\,W) = ۲\sqrt{\frac{x + ۲ + \sqrt{۷}}{۲} \cdot \frac{x + ۲ - \sqrt{۷}}{۲} \cdot \frac{\sqrt{۷} + (x - ۲)}{۲} \cdot \frac{\sqrt{۷} - (x - ۲)}{۲}}$$
$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{\{(x + ۲)^۲ - ۷\}\{۷ - (x - ۲)^۲\}}$$
$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{\{۴x + (x^۲ - ۳)\}\{۴x - (x^۲ - ۳)\}}$$
$$= \frac{۱}{۲}\sqrt{۲۲x^۲ - x^۴ - ۹}$$

بنابراین $\sqrt{۲۲x^۲ - x^۴ - ۹} = \sqrt{۳}x$ و درنتیجه $x^۴ - ۱۹x^۲ + ۹ = ۰$. ریشه‌ای که به‌کارمان می‌آید در $x^۲ = \frac{۱۹ + ۵\sqrt{۱۳}}{۲}$ صدق می‌کند، و درنتیجه $x = \frac{۵ + \sqrt{۱۳}}{۲}$.

مسألهٔ ۱۹۸. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی باشد. چون $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{۰}$، پس

$$\overrightarrow{DA}^۲ = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^۲$$

اگر مانند شکل ۱۳۸ طول ضلعهای چهارضلعی را a، b، c و d بنامیم، آنگاه



شکل ۱۳۸

$$d^۲ = a^۲+b^۲+c^۲+۲\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+۲\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+۲\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}$$

این برابری هم‌ارز است با

$$b^۲ + d^۲ = a^۲ + c^۲ + ۲(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = a^۲ + c^۲ + ۲\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

از این برابری نتیجه می‌گیریم که شرط لازم و کافی برای اینکه قطرهای چهارضلعی $ABCD$ بر یکدیگر عمود باشند این است که $b^۲ + d^۲ = a^۲ + c^۲$.

در مسألهٔ خودمان، اگر a، b، c و d طول ضلعهای $ABCD$ و a'، b'، c' و d' طول ضلعهای $A'B'C'D'$ باشند، آنگاه $a = a'$، $b = b'$، $c = c'$ و $d = d'$. بنابراین

$$AC \perp BD \Rightarrow b^۲ + d^۲ = a^۲ + c^۲ \Rightarrow b'^۲ + d'^۲ = a'^۲ + c'^۲$$
$$\Rightarrow A'C' \perp B'D'$$

مسألهٔ ۱۹۹. به‌طور کلیتر، ثابت می‌کنیم که اگر $P_۰(x)$، $P_۱(x)$، $\cdots$، $P_{n-۲}(x)$ $(n \geqslant ۲)$ و $S(x)$ چندجمله‌ایهایی باشند که

$$P_۰(x^n) + xP_۱(x^n) + \cdots + x^{n-۲}P_{n-۲}(x^n) = (x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x + ۱)S(x)$$

آنگاه به‌ازای هر i، $x - ۱$ عاملی از $P_i(x)$ است.

فرض کنید w_i، $i = ۱, ۲, \cdots, n - ۱$، ریشهٔ nاُم مختلط واحد و غیراز ۱ باشد. چون

$$x^n - ۱ = (x - ۱)(۱ + x + \cdots + x^{n-۱})$$

نتیجه می‌شود که به‌ازای هر i،

$$۱ + w_i + w_i^۲ + \cdots + w_i^{n-۱} = ۰$$

اکنون اگر w_i را در اتحاد مفروض بالا قرار دهیم، در می‌یابیم که به‌ازای هر i،

$$P_۰(۱) + w_iP_۱(۱) + \cdots + w_i^{n-۲}P_{n-۲}(۱) = ۰$$

چون چندجمله‌ای $\sum_{k=۰}^{n-۲} P_k(۱)x^k$ از درجهٔ $n - ۲$ است و $n - ۱$ ریشهٔ متمایز دارد (w_iها)، باید متحد

با صفر باشد. بنابراین

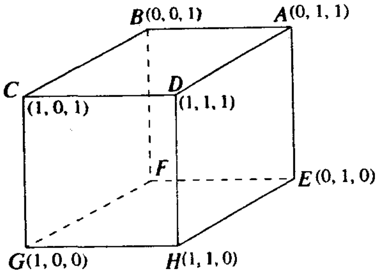
$$P_{\circ}(1) = P_{1}(1) = \cdots = P_{n-2}(1) = \circ$$

سرانجام اینکه، بنابر قضیهٔ عاملها، $x - 1$ مقسوم‌علیه هر یک از چندجمله‌ایهای $P_{\circ}(x)$، $P_{1}(x)$، $\cdots$ و $P_{n-2}(x)$ است.

مسألهٔ ۲۰۰. دستگاه مختصات دکارتی را، مانند شکل ۱۳۹، در نظر بگیرید به‌طوری‌که مبدأ دستگاه در F باشد و محورهای x، y و z به‌ترتیب در امتداد FG، EF و FB باشند. فرض کنید $\overline{AB} = 1$، تا اینکه مختصات نقطه‌های P، Q و R عبارت باشند از

$$P = (\circ, c, 1), \quad Q = (1, \circ, a), \quad R = (b, 1, \circ)$$

که در آنها $\circ \leqslant a, b, c \leqslant 1$. مسأله تعیین a، b و c با شرایط $\circ \leqslant a, b, c \leqslant 1$ است به‌طوری‌که



شکل ۱۳۹

$$L = \sqrt{a^2 + (1-b)^2 + 1} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2 + 1} + \sqrt{c^2 + (1-a)^2 + 1}$$

مینیمم باشد.

بنابر نابرابری مینکوفسکی،

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} + \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$$
$$\geqslant \sqrt{(x_1 + y_1 + z_1)^2 + (x_2 + y_2 + z_2)^2 + (x_3 + y_3 + z_3)^2}$$

از این نابرابری وقتی‌که $(x_1, x_2, x_3) = (1, a, 1-b)$ ، $(y_1, y_2, y_3) = (1, b, 1-c)$ و $(z_1, z_2, z_3) = (1, c, 1-a)$ نتیجه می‌شود

$$L^2 \geqslant 9 + s^2 + (3-s)^2 = 2(s - \tfrac{3}{2})^2 + \tfrac{27}{2}$$

که در آن، $s = a + b + c$.

چون $2(s - \frac{3}{2})^2 + \frac{27}{2}$ به‌ازای $s = \frac{3}{2}$ مقدار مینیمم خود را می‌گیرد، پس $L^2 \geqslant \frac{27}{2}$. اما وقتی‌که $a = b = c = \frac{1}{2}$، $s = \frac{3}{2}$ و $L = 3\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27}{2}}$. پس مینیمم محیط مثلث $3\sqrt{\frac{3}{2}}$ است.

ملاحظه. در نابرابری مینکوفسکی برابری برقرار است اگر و فقط اگر (x_1, x_2, x_3)، (y_1, y_2, y_3) و (z_1, z_2, z_3) متناسب باشند. در این مسأله $L^2 \geqslant 9 + s^2 + (3-s)^2$ و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $a = b = c = \frac{1}{2}$.

مسألهٔ ۲۰۱. او به موقع به محل کار خود نمی‌رسد! چون زمان لازم برای پیمودن ۲ کیلومتر با سرعت ۱۲ کیلومتر بر ساعت برابر زمان لازم برای پیمودن ۶ کیلومتر با سرعت ۳۶ کیلومتر بر ساعت است. در

روز مورد نظر، راننده همهٔ زمانی که برای رسیدن به محل کار داشته است صرف پیمودن ۲ کیلومتر اول کرده است.

مسألهٔ ۲۰۲. راه‌حل اول. وجهی را برای نوشتن ماه فروردین انتخاب کنید. $\binom{11}{5}$ راه برای انتخاب ماههایی که باید روی پنج وجه مجاور به فروردین نوشته شوند، و !۴ راه اساساً متفاوت برای نوشتن این پنج ماه روی این پنج وجه که حلقه تشکیل می‌دهند وجود دارد. حلقهٔ دیگری شامل پنج وجه وجود دارد که هر یک از وجوه آن مجاور دو همسایهٔ فروردین است؛ $\binom{6}{5}$ راه برای انتخاب ماههایی که باید روی این وجوه نوشته شوند، و !۵ راه اساساً متفاوت برای نوشتن این پنج ماه روی حلقهٔ دوم نسبت به حلقهٔ اول وجود دارد. سرانجام، ماهی که باید روی وجه متقاطر وجه فروردین نوشته شود تعیین شده است. بنابراین، تعداد راههای اساساً متفاوت برای درست کردن این تقویم برابر است با

$$\binom{11}{5}4!\binom{5}{6}5! = \frac{11!}{5}$$

راه‌حل دوم. اگر وجوه ۱۲وجهی قابل تمیز از یکدیگر باشند، !۱۲ راه برای نوشتن ماهها روی وجوه وجود دارد. هر یک از این آرایشها را می‌توان با تبدیلهای فضایی صلبی که دوازده‌وجهی را به خودش تبدیل می‌کنند به آرایشهای متفاوت دیگری تبدیل کرد. چنین تبدیل صلبی باید هر رأس دوازده‌وجهی را به رأس دیگری تبدیل کند و با مشخص کردن تصویرهای دو وجه مجاور به‌طور یکتا مشخص می‌شود (انعکاس، که در فضای سه بعدی قابل انجام نیست، به حساب نمی‌آید). برای وجه اول ۱۲ تصویر ممکن است؛ بعد از مشخص شدن تصویر وجه اول، برای هر وجه مجاور آن پنج تصویر ممکن است. پس $5 \times 12 = 60$ تقارن برای دوازده‌وجهی وجود دارد، و هر یک از !۱۲ آرایش اساساً با ۶۰ آرایش (از جمله خودش) یکسان است. پس تعداد آرایشهای اساساً متفاوت $\frac{11!}{5} = \frac{12!}{60}$ است.

مسألهٔ ۲۰۳. الف) فرض کنید n عددی باشد که با مجموع مربعهای رقمهای خود برابر است. اگر n، k رقم داشته باشد، باید $10^{k-1} \leqslant n \leqslant 9^2k = 81k$. اکنون به‌ازای $p \geqslant 4$، فرض اینکه $81p < 10^{p-1}$ مستلزم $10^p > 81 + 10^{p-1} > 81(p+1)$ است. چون $81 \times 4 < 10^3$، به‌استقرا نتیجه می‌شود که به‌ازای $p \geqslant 4$، $81p < 10^{p-1}$. پس $k \leqslant 3$ و رقمهایی مانند a_0، a_1 و a_2 وجود دارند به‌طوری‌که $n = a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$. چون

$$a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = a_2^2 + a_1^2 + a_0^2$$

نتیجه می‌شود

$$(10^2 - a_2)a_2 + (10 - a_1)a_1 = a_0^2 - a_0$$

هر دو طرف این برابری نامنفی‌اند، و $9 \geqslant a_0 \geqslant 1$ مستلزم آن است که $a_0^2 - a_0$ حداکثر ۷۲ باشد. چون $10^2 - a_2 \geqslant 91$، باید $a_2 = 0$. بنابراین

$$(10 - a_1)a_1 = a_0^2 - a_0$$

چون مقادیر ممکن $a_1(10-a_1)$، ۰، ۹، ۱۶، ۲۱، ۲۴ و ۲۵، و مقادیر ممکن $a_0^2-a_0$، ۰، ۲، ۶، ۱۲، ۲۰، ۳۰، ۴۲، ۵۶ و ۷۲ است، نتیجه حاصل می‌شود.

ب) فرض کنید n برابر مجموع مکعبهای ارقام خود باشد. اگر n، k رقم داشته باشد، $10^{k-1} \leqslant 729k$. مانند قسمت (الف) می‌توان استدلال کرد که $k \leqslant 4$.

اگر $k=4$ و

$$n = a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = a_3^3 + a_2^3 + a_1^3 + a_0^3$$

نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} a_3(919) = a_3(10^3 - 9^2) &\leqslant a_3(10^3 - a_3^2) \\ &= a_3 10^3 - a_3^3 \\ &= a_2(a_2^2 - 10^2) + a_1(a_1^2 - 10) + a_0(a_0^2 - 1) \\ &\leqslant 0 + 9 \times 71 + 9 \times 80 = 1359 \end{aligned}$$

بنابراین $1 \leqslant a_3$. به‌آسانی معلوم می‌شود که $a_3 \neq 1$ و درنتیجه $k \leqslant 3$.

چون ۲۸، ۳۵، ۶۵، ۷۲ و ۹۱ تنها عددهای دو رقمی‌اند که مجموع دو مکعب‌اند، روشن است که $k \neq 2$. تنها امکان در حالتی که $k=1$ عبارت است از $n=1$.

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $k=3$ و

$$n = a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = a_2^3 + a_1^3 + a_0^3$$

که در آن $a_2 \neq 0$. درنتیجه

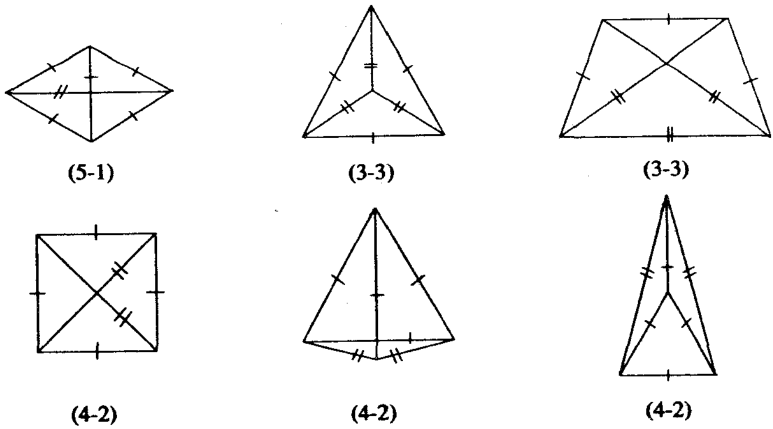
$$a_2(100 - a_2^2) + a_1(10 - a_1^2) - a_0(a_0^2 - 1) = 0$$

انتخابهای ممکن a_2، a_1 و a_0 در جدول زیر نوشته شده است.

x	$x(100-x^2)$	$x(10-x^2)$	$-x(x^2-1)$
۰	۰	۰	۰
۱	۹۹	۹	۰
۲	۱۹۲	۱۲	−۶
۳	۲۷۳	۳	−۲۴
۴	۳۳۶	−۲۴	−۶۰
۵	۳۷۵	−۷۵	−۱۲۰
۶	۳۸۴	−۱۵۶	−۲۱۰
۷	۳۵۷	−۲۷۳	−۳۳۶
۸	۲۸۸	−۴۳۲	−۵۰۴
۹	۱۷۱	−۶۳۹	−۷۲۰

روشن است که ممکن نیست a_1 و a_0، ۸ یا ۹ باشند. با توجه به رقمهای آخر، تعداد امکانهای موجود به سرعت کاهش می‌یابد و تنها عددهای ممکن ۱۵۳، ۳۷۰، ۳۷۱ و ۴۰۷ هستند.

مسألهٔ ۲۰۴. شش راه اساساً متفاوت وجود دارد که در شکل ۱۴۰ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۴۰

مسألهٔ ۲۰۵. بهتر است وضعیت را از آخر به اول بررسی کنیم. در هر مرحله اساساً فقط یک راه برای توزیع مهره‌ها وجود دارد. توجه کنید که مجموع تعداد مهره‌های هر سه نفر در هر مرحله ۷۲ است.

پس از سه بازی، تعداد مهره‌ها ۲۴، ۲۴، ۲۴ بوده است.

پس از دو بازی، تعداد مهره‌ها ۱۲، ۱۲، ۴۸ بوده است.

پس از یک بازی، تعداد مهره‌ها ۶، ۴۲، ۲۴ بوده است.

در ابتدا تعداد مهره‌ها ۳۹، ۲۱، ۱۲ بوده است.

مسألهٔ ۲۰۶. الف) بنابر نابرابری مثلثی، $۲\overline{BC} = \overline{AB} < \overline{AC} + \overline{BC}$ و درنتیجه $\overline{BC} < \overline{AC}$. بنابراین BC کوتاهترین ضلع مثلث است.

چون

$$۲۴ = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = ۳\overline{BC} + \overline{AC} > ۴\overline{BC}$$

پس $\overline{BC} < ۶$.

چون

$$۲۴ = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC} + (\overline{AB} + \overline{BC}) = ۶\overline{BC}$$

پس $\overline{BC} > ۴$.

ب) فرض کنید در مثلث ABC، $۳\overline{BC} = \overline{AB}$. در این صورت، مانند قسمت (الف)، می‌توان استدلال کرد که $۲\overline{BC} < \overline{AC}$ و BC کوتاهترین ضلع است.

بنابراین $۶\overline{BC} < ۴\overline{BC} + \overline{AC} = ۲۴$ و درنتیجه $\overline{BC} < ۴$.
همچنین $۸\overline{BC} = ۲(\overline{AB} + \overline{BC}) > ۲۴$ و درنتیجه $\overline{BC} > ۳$.

مسألهٔ ۲۰۷. الف) به‌ازای $k = ۱$ و $k = ۲$ برابری برقرار است. به‌ازای $k = ۰$ نابرابری اکید است. وقتی‌که $k \geqslant ۳$،

$$۱^{۲k} + ۲^{۲k} + ۳^{۲k} > ۳^{۲k} = ۹^k > ۲ \times ۷^k$$

ب) به‌ازای $k = ۰$ و $k = ۱$ برابری برقرار است. وقتی‌که $k \geqslant ۲$،

$$۱^{۲k+۱} + ۲^{۲k+۱} + ۳^{۲k+۱} > ۳^{۲k+۱} = ۳^k ۳^{k+۱} > ۲ \times ۲^k \times ۳^{k+۱} = ۶^{k+۱}$$

مسألهٔ ۲۰۸. پرانتزها را در یکدیگر ضرب می‌کنیم:

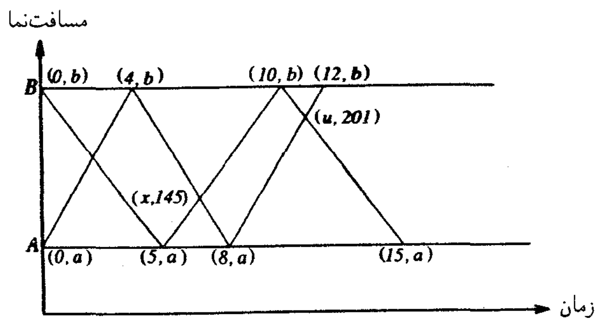
$$x^۳ + ۶x^۲ + ۱۱x + ۶ = x^۳ + ۶x^۲ - ۷x - ۶۰$$

و درنتیجه $x = \frac{-۱۱}{۳}$

مسألهٔ ۲۰۹. اگر عدد مورد نظر M باشد، $M + ۱$ باید کوچکترین مضرب مشترک ۲، ۳، ...، ۱۰، یعنی $۷ \times ۵ \times ۳^۲ \times ۲^۳$ باشد. بنابراین $M = ۲۵۱۹$.

مسألهٔ ۲۱۰. شرایط مسأله را می‌توان به‌صورت نموداری مانند شکل ۱۴۱ نمایش داد. فرض کنید واحدهای زمان طوری انتخاب شده باشند که اتومبیل تندروتر فاصلهٔ A تا B را در ۴ واحد زمان طی کند و اتومبیل کندروتر همین فاصله را در ۵ واحد زمان طی کند. فرض کنید نقطهٔ A درکیلومتر a و نقطهٔ B درکیلومتر b باشد. خطهای شکسته در نمودار شکل ۱۴۰ حرکت اتومبیلها را نشان می‌دهند؛ x زمان دومین ملاقات و u زمان سومین ملاقات اتومبیلها در جاده است. از تشابه مثلثها در می‌یابیم که

$$\frac{b - ۱۴۵}{۱۴۵ - a} = \frac{۱۰ - x}{x - ۵} = \frac{x - ۴}{۸ - x}$$



شکل۱۴۱

و درنتیجه $x = \frac{۲۰}{۳}$ و $۲a + b = ۴۳۵$. به‌همین ترتیب

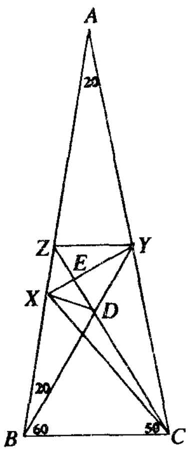
$$\frac{b - ۲۰۱}{۲۰۱ - a} = \frac{۱۲ - u}{u - ۸} = \frac{u - ۱۰}{۱۵ - u}$$

و درنتیجه $u = \frac{۱۰۰}{۹}$ و $۲a + ۷b = ۱۸۰۹$. به‌این ترتیب $a = ۱۰۳$ و $b = ۲۲۹$. بنابراین A در کیلومتر ۱۰۳ و B در کیلومتر ۲۲۹ است.

مسألهٔ ۲۱۱. توجه کنید که $۴۹ = ۷^۲$، $۳۴۳ = ۷^۳$، و $۲۴۰۱ = ۲۴ \times ۱۰۰ + ۱ = ۷^۴$. از این مثالها معلوم می‌شود که باید تا حد ممکن عامل $۷^۴$ را از عدد مورد نظر بیرون بکشیم. بنابراین

$$\begin{aligned}
۷^{۹۹۹۹} &= ۷^۳ \times ۷^{۹۹۹۶} = (۳۴۳)(۷^۴)^{۲۴۹۹} \\
&= (۳۴۳)(۲۴۰۱)^{۲۴۹۹} \\
&\equiv (۳۴۳)(۱ + ۲۴۹۹ \times ۲۴۰۰) \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۰۰۰) \quad (\text{بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای}) \\
&= (۳۴۳)(۱ + (۲۵۰۰ - ۱)(۲۴۰۰)) \\
&\equiv (۳۴۳)(۱ - ۲۴۰۰) \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۰۰) \\
&\equiv (۳۴۳)(۶۰۱) \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۰۰) \\
&\equiv ۱۴۳ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۰۰)
\end{aligned}$$

پس سه رقم آخر ۱۴۳ است.



شکل ۱۴۲

مسألهٔ ۲۱۲. راه‌حل اول. از Y خطی موازی با BC رسم کنید تا AB را در Z قطع کند. فرض کنید CZ و BY یکدیگر را در D و CZ و XY یکدیگر را در E قطع کنند. D و X را به‌هم وصل کنید. شکل ۱۴۲ را ببینید.

چون $\angle ZCB = \angle YBC = ۶۰^\circ$، $\triangle DBC$ متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $\angle ZDY = ۶۰^\circ$، و درنتیجه مثلث متساوی‌الساقین ZDY در واقع متساوی‌الاضلاع است.

$\triangle BCX$ را در نظر بگیرید. چون $\angle BCX = ۵۰^\circ = \angle BXC$، $\overline{BX} = \overline{BC} = \overline{BD}$. بنابراین $\angle BXD = \angle BDX = ۸۰^\circ$ و درنتیجه $\angle ZXD = ۱۰۰^\circ$.

اکنون

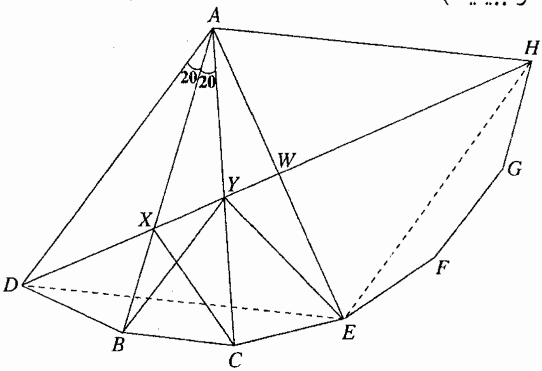
$$\angle XZD = ۱۸۰^\circ - \angle AZY - \angle YZD = ۴۰^\circ$$

$$\angle XDZ = ۱۸۰^\circ - \angle BDC - \angle BDX = ۴۰^\circ$$

بنابراین $\overline{XZ} = \overline{XD}$. چون $\overline{YZ} = \overline{YD}$، $\triangle XZY \cong \triangle XDY$. بنابراین

$$\angle ZXY = \angle YXD = \frac{۱}{۲}\angle ZXD = ۵۰^\circ$$

راه‌حل دوم. می‌توانیم A را مرکز ۱۸ضلعیی منتظم و BC را یک ضلع از آن در نظر بگیریم. فرض کنید D، B، C، E، F، G و H هفت رأس این ۱۸ضلعی به‌همین ترتیب باشند و D و H را به‌یکدیگر وصل کنید. فرض کنید DH پاره‌خطهای AB، AC و AE را به‌ترتیب در X، Y و W قطع کند. ثابت می‌کنیم نقطه‌های X و Y که به‌این ترتیب به‌دست می‌آیند دقیقاً همان نقطه‌های مشخص شده در مسأله‌اند. (شکل ۱۴۳ را ببینید.)



شکل۱۴۳

هفت‌ضلعی $DBCEFGH$ را در نظر بگیرید. مجموع زاویه‌های این هفت ضلعی 900° است. چون $\angle HDB = \angle DHE$ و هر یک از ۵ زاویهٔ دیگر 160° است، باید $\angle HDB = 50^\circ$. چون $\triangle DXB \cong \triangle CXB$، $\angle XCB = \angle XDB = 50^\circ$.

چون $\angle DAE = 60^\circ$ و $\overline{AD} = \overline{AE}$، مثلث ADE متساوی‌الاضلاع است. به‌همین ترتیب $\triangle AHE$ متساوی‌الاضلاع است. بنابراین

$$\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{DE} = \overline{AH} = \overline{HE}$$

درنتیجه $ADEH$ لوزی است و پاره‌خطهای DH و AE عمودمنصف یکدیگرند. بنابراین $\overline{AY} = \overline{YE} = \overline{YB}$ و درنتیجه $\angle ABY = \angle BAY = 20^\circ$. چون $\angle ABC = 80^\circ$، نتیجه می‌شود $\angle YBC = 60^\circ$.

اکنون که X و Y را مشخص کرده‌ایم، معلوم می‌شود که در مثلث XDB، $\angle XBD = 80^\circ$ و $\angle XDB = 50^\circ$ و درنتیجه $\angle DXB = 50^\circ$. بنابراین $\angle AXY = 50^\circ$.

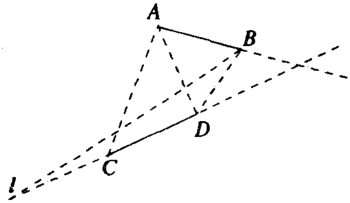
ملاحظه. این مسأله درکتاب زیر بررسی شده است:

Ross Honsberger, *Mathematical Gems II*, MAA, 1976, pp. 16-18.

مسألهٔ ۲۱۳. حجم چهاروجهی با مساحت قاعده (یکی از وجه‌های مثلثی شکل آن) و ارتفاع آن (فاصلهٔ رأس چهارم از صفحهٔ وجه قاعده) متناسب است. پس می‌توانیم مسأله را با اثبات اینکه هیچ‌یک از این اجزا تغییر نمی‌کند حل کنیم. آشکارا کافی است ثابت کنیم که نتیجه وقتی یکی از

پاره‌خطها را ثابت نگاه داریم و پاره‌خط دیگر حرکت کند برقرار است.

فرض کنید AB پاره‌خط ثابت باشد و CD در امتداد خط l تغییر کند (شکل ۱۴۴ را ببینید). فرض کنید π صفحهٔ شامل A و خط l باشد. در این صورت مساحت $\triangle ACD$ در همهٔ موقعیتهای CD ثابت می‌ماند. فاصلهٔ B تا صفحهٔ وجه ACD همان فاصلهٔ B تا صفحهٔ π و ثابت است. به‌این ترتیب نتیجه حاصل می‌شود.



شکل ۱۴۴

ملاحظه. همچنین می‌توان ثابت کرد که حجم چهاروجهی برابر یک‌ششم حاصل‌ضرب طول دو ضلع روبه‌رو، کوتاهترین فاصلهٔ این دو ضلع و سینوس زاویهٔ بین این دو ضلع است. (پیوست، هـ (۴۱) و (۴۲) را ببینید).

مسألهٔ ۲۱۴. **الف) راه‌حل اول.** فرض کنید u سرعت سربازان و x مسافتی باشد که افسر طی می‌کند. سرعت حرکت افسر ux است. وقتی‌که افسر به طرف جلوی صف حرکت می‌کند، سرعت او نسبت به صف سربازان $u(x-۱)$، و درنتیجه مدت زمانی که طول می‌کشد تا او به جلو صف برسد $\frac{۱}{u(x-۱)}$ است. سرعت نسبی حرکت افسر وقتی‌که به طرف عقب برمی‌گردد $u(x+۱)$، و درنتیجه مدت زمانی که طول می‌کشد تا به انتهای صف برسد $\frac{۱}{u(x+۱)}$ است. چون زمان لازم برای اینکه صف سربازان یک کیلومتر به پیش رود $\frac{۱}{u}$ است، به‌دست می‌آوریم (پس از ضرب در u)

$$\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}=۱$$

بنابراین $x^۲-۲x-۱=۰$. ریشه منفی قابل قبول نیست؛ بنابراین، $x=۱+\sqrt{۲}$. پس افسر مسافت $۱+\sqrt{۲}$ کیلومتر را طی کرده است.

الف) راه‌حل دوم. فرض کنید سرعت حرکت افسر v و سرعت حرکت صف سربازان u باشد. همچنین فرض کنید t مدت زمانی باشد که طول می‌کشد تا افسر به جلو صف برسد و s مدت زمانی باشد که طول می‌کشد تا افسر دوباره به عقب برسد. در این صورت

$$(v-u)t=۱,\ \ (v+u)s=۱,\ \ u(t+s)=۱$$

بنابراین

$$u\left(\frac{۱}{v-u}+\frac{۱}{v+u}\right)=۱$$

و یا

$$v^۲-۲vu-u^۲=۰$$

درنتیجه $v=u(۱+\sqrt{۲})$. بنابراین مسافتی که افسر طی می‌کند چنین است

$$v(t+s)=u(۱+\sqrt{۲})\left(\frac{۱}{u}\right)=۱+\sqrt{۲}$$

ب) مانند قسمت (الف)، سرعت حرکت افسر نسبت به آرایهٔ مربعی صفهای سربازان هنگامی‌که به طرف جلوی صفها حرکت می‌کند $u(x-۱)$ و هنگامی‌که به طرف عقب صفها حرکت می‌کند $u(x+۱)$ است. هنگامی‌که افسر در جلو صفها یا در عقب صفها حرکت می‌کند، تندی او مؤلفه‌ای در جهت حرکت سربازان، u، مؤلفه‌ای در جهت عمود بر جهت حرکت سربازان، v، دارد، و $u^۲+v^۲=u^۲x^۲$. بنابراین $v=u\sqrt{x^۲-۱}$. پس کلِّ مدت زمان لازم برای دور زدن آرایهٔ مربعی چنین است

$$\frac{۱}{u(x-۱)}+\frac{۱}{u(x+۱)}+\frac{۲}{u\sqrt{x^۲-۱}}=\frac{۱}{u}$$

درنتیجه

$$\frac{۲}{\sqrt{x^۲-۱}}=۱-\left(\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۱}\right)=۱-\frac{۲x}{x^۲-۱}$$

و یا

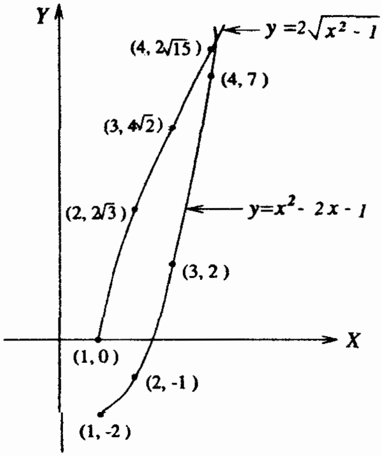
$$۲\sqrt{x^۲-۱}=x^۲-۲x-۱$$

بنابر شرایط مسأله باید $x>۱$. (در واقع، افسر باید دست‌کم یک کیلومتر برای رسیدن به جلو صفها و دو کیلومتر برای رد شدن از جلو و عقب صفها طی کند؛ بنابراین، $x>۳$.)

حل نموداری برای یافتن x در شکل ۱۴۵ نشان داده شده است. ریشه‌ای که در جستجوی آن هستیم در نابرابریهای $۴<x<۵$ صدق می‌کند. حذف رادیکال معادله را به

$$x^۴-۴x^۳-۲x^۲+۴x+۵=۰$$

تبدیل می‌کند. جوابی تقریبی $x=۴٫۱۸$ است.



شکل۱۴۵

مسألهٔ ۲۱۵. فرض کنید v حجم چهاروجهی و t مساحت هر یک از چهاروجه باشد. در این صورت طول عمودی که از هر رأس بر وجه روبه‌روی آن رسم شود h خواهد بود و $۳v=th$. چون $\overline{OA}+\overline{OL}\geqslant h$،

$$t(\overline{OA}+\overline{OL})\geqslant ۳v=t(\overline{OL}+\overline{OM}+\overline{ON}+\overline{OP})$$

درنتیجه $\overline{OA} \geqslant \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}$. اگر این نابرابری را با نابرابریهای مشابهی که برای $\overline{OB}$، $\overline{OC}$ و $\overline{OD}$ به‌دست می‌آیند جمع کنیم نتیجه حاصل می‌شود.

تبصره. اگر وجه‌ها لزوماً مساحت یکسان نداشته باشند، آیا باز هم همین نابرابری برقرار است؟

مسألهٔ ۲۱۶. فرض کنید x مقدار آبی باشد که هنگام آغاز خالی کردن آب از قایق در آن جمع شده است؛ همچنین فرض کنید y مقدار نشت آب در هر ساعت و z مقدار آبی باشد که هر ملوان در هر ساعت می‌تواند از قایق بیرون بریزد. فرض کنید $h(n)$ مدت زمانی برحسب ساعت باشد که n ملوان می‌توانند آب درون قایق را کاملاً تخلیه کنند. در این صورت

$$x + h(n)y = nh(n)z \qquad (*)$$

بخصوص

$$x + ۳y = (۱۲ \times ۳)z = ۳۶z$$

و

$$x + ۱۰y = (۵ \times ۱۰)z = ۵۰z$$

بنابراین $y = ۲z$ و $x = ۳۰z$. پس رابطهٔ $(*)$ تبدیل می‌شود به

$$۳۰ + ۲h(n) = nh(n)$$

و یا

$$h(n)(n - ۲) = ۳۰$$

اگر $h(n) = ۲$، $n = ۱۷$ و درنتیجه ۱۷ ملوان می‌توانند کار را در ۲ ساعت به‌انجام رسانند.

مسألهٔ ۲۱۷. مربعهای صفحهٔ شطرنجی را یکی‌درمیان سیاه و سفید رنگ کنید به‌طوری‌که هر دو مربع مجاور هم رنگهای متفاوت داشته باشند. هر دو مربعی که به‌اندازهٔ یک حرکت اسب با هم فاصله داشته باشند رنگهای متفاوت دارند. چون اسب در هر گردش mn مربع را طی می‌کند و mn عددی فرد است، آخرین مربعی که اسب اشغال خواهد کرد همرنگ اولین مربع است، و بنابراین فاصله‌اش تا آن به‌اندازهٔ یک حرکت اسب نیست.

تبصره. آیا لزوماً گردش غیر بسته‌ای برای اسب وجود دارد؟

مسألهٔ ۲۱۸. فرض کنید بنابر زمانی که ساعت من نشان می‌دهد بین هر دو دفعهٔ متوالی که عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار روی هم قرار می‌گیرند x دقیقه فاصله باشد. در مدتی که عقربهٔ دقیقه‌شمار x واحد طی می‌کند، عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{x}{۱۲}$ واحد طی می‌کند. بنابراین $\frac{x}{۱۲} = x - ۶۰$ و درنتیجه

$$x = ۶۰\left(\frac{۱۲}{۱۱}\right) = ۶۰ + \frac{۶۰}{۱۱} = ۶۵ + \frac{۵}{۱۱}$$

پس ساعت من در هر ۶۵ دقیقه $\frac{۵}{۱۱}$ دقیقه جلو می‌افتد.

مدت زمانی که طول می‌کشد تا ساعت من یک ساعت جلو بیفتد چنین است

$$\frac{۱}{۶۰}\left(\frac{۶۰}{۵/۱۱}\right)(۶۵) = ۱۴۳ \text{ ساعت}$$

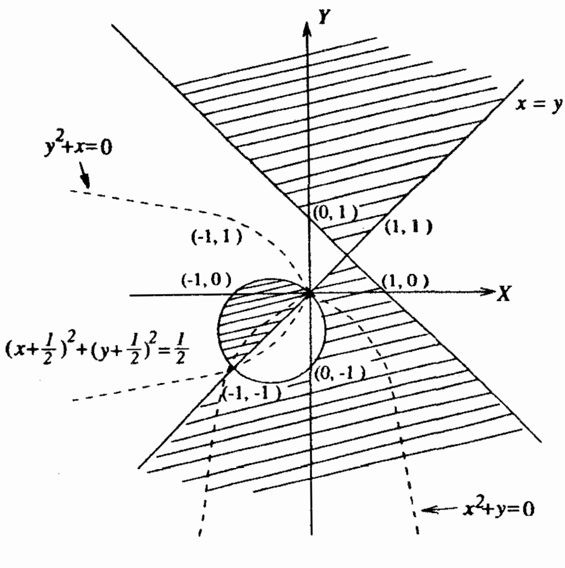
مسألهٔ ۲۱۹. اگر $x^۲ + y \geqslant ۰$ و $y^۲ + x \geqslant ۰$، نامعادلهٔ مورد نظر $(y - x)(x + y - ۱) \geqslant ۰$ است.

اگر $x^۲ + y \leqslant ۰$ و $y^۲ + x \leqslant ۰$، نامعادلهٔ مورد نظر $(x - y)(x + y - ۱) \geqslant ۰$ است.

اگر $x^۲+y \leqslant ۰$ و $y^۲+x \geqslant ۰$، نامعادلهٔ مورد نظر $-(x^۲+y) \leqslant y^۲+x$ یا $x^۲+y^۲+x+y \geqslant ۰$ و یا $(x + \frac{۱}{۲})^۲ + (y + \frac{۱}{۲})^۲ \geqslant \frac{۱}{۲}$ است.

اگر $x^۲ + y \geqslant ۰$ و $y^۲ + x \leqslant ۰$، نامعادلهٔ مورد نظر $(x + \frac{۱}{۲})^۲ + (y + \frac{۱}{۲})^۲ \leqslant \frac{۱}{۲}$ است.

مجموعهٔ نقاطی که جواب نامعادلهٔ مورد نظرند در شکل ۱۴۶ با خطوط مورب سایه خورده است. برای امتحان، توجه کنید که اگر $y = ۰$ نامعادلهٔ مورد نظر به $|x^۲| \leqslant |x|$ یا $|x| \leqslant ۱$، و اگر $x = ۰$، نامعادلهٔ مورد نظر به $y = ۰$ یا $|y| \geqslant ۱$ تبدیل می‌شود. همهٔ نقاط خط $x = y$ و همهٔ نقاط سهمی $x^۲ + y = ۰$ متعلق به مجموعهٔ جوابهای نامعادلهٔ مورد نظرند، ولی تنها نقاطی از سهمی $y^۲ + x = ۰$ که متعلق به‌این مجموعه‌اند دو نقطهٔ $(-۱,-۱)$ و $(۰,۰)$ هستند که در واقع نقاط مشترک بین این سهمی و سهمی $x^۲ + y = ۰$ هستند.



شکل ۱۴۶

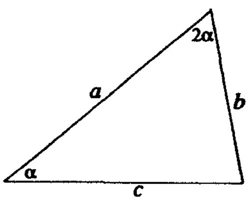
مسألهٔ ۲۲۰. طرحمان برای حل مسأله این است که عبارتی برای سمت چپ نابرابری بیابیم که شامل مجموع حاصلضرب مربعها، که مثبت‌اند، باشد. بنابر قضیهٔ عاملها، $۳a^۴ - ۴a^۳b + b^۴$ بر $a - b$

بخش‌پذیر است. بنابراین

$$\begin{aligned}
۳a^۴ - ۴a^۳b + b^۴ &= ۳a^۴ - ۳a^۳b - a^۳b + b^۴ \\
&= (a-b)(۳a^۳) - b(a^۳ - b^۳) \\
&= (a-b)(۳a^۳) - b(a-b)(a^۲ + ab + b^۲) \\
&= (a-b)(۳a^۳ - a^۲b - ab^۲ - b^۳) \\
&= (a-b)(a^۳ - b^۳ + a^۳ - a^۲b + a^۳ - ab^۲) \\
&= (a-b)^۲(a^۲ + ab + b^۲ + a^۲ + a^۲ + ab) \\
&= (a-b)^۲(۲a^۲ + (a+b)^۲) \geqslant ۰
\end{aligned}$$

راه‌حل دیگر. بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$\frac{a^۴ + a^۴ + a^۴ + b^۴}{۴} \geqslant \sqrt[۴]{a^{۱۲}b^۴} = a^۳b$$



شکل ۱۴۷

مسألهٔ ۲۲۱. فرض کنید طول ضلعها a، b و c و زاویهٔ α روبه‌روی ضلع b و زاویهٔ ۲α روبه‌روی ضلع c باشد (شکل ۱۴۷ را ببینید). بنابر قانون سینوسها،

$$۲\cos\alpha = \frac{\sin ۲\alpha}{\sin\alpha} = \frac{c}{b}$$

بنابر قانون کسینوسها،

$$b^۲ = a^۲ + c^۲ - ۲ac\cos\alpha = a^۲ + c^۲ - \frac{ac^۲}{b}$$

و درنتیجه

$$b(b^۲ - a^۲) = c^۲(b - a)$$

اگر $a = b$، زاویه‌ها α، α و ۲α هستند، و درنتیجه $\alpha = ۴۵^\circ$ و در این حالت ممکن نیست a، b و c هر سه صحیح باشند. پس $b - a \neq ۰$ و درنتیجه $b(b+a) = c^۲$.

می‌توانیم فرض کنیم بزرگترین مقسوم علیه مشترک a، b و c برابر است (در واقع در صورت لزوم می‌توانیم این عددها را بر مقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم کنیم و عددهای حاصل طول ضلعهای مثلثی متشابه با مثلث اولیه خواهند بود). در این صورت b و $a + b$ باید مربع کامل باشند. بنابراین دو عدد مانند r و s وجود دارند که نسبت به‌هم اول‌اند و $a = s^۲ - r^۲$، $b = r^۲$ و $c = ۲s$. چون $b < c < ۲b$، پس $r < s < ۲r$.

به‌طور کلی، طول ضلعهای مثلث باید به‌شکل

$$(k(s^۲ - r^۲), kr^۲, krs)$$

باشند که در آن k، r و s عددهایی طبیعی‌اند، $r < s < ۲r$ و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک r و s برابر

۱ است.

اکنون ثابت می‌کنیم هر سه‌تایی مانند (k, r, s) که در شرایط بالا صدق کند مثلثی از نوع مشخص شده در مسأله را به‌دست می‌دهد. اگر $a = s^۲ - r^۲$، $b = r^۲$ و $c = rs$، آنگاه

$$(a + c) - b = s(s + r) - ۲r^۲ > ۰$$

$$(a + b) - c = s(s - r) > ۰$$

$$(b + c) - a = ۲r^۲ + rs - s^۲ = (۲r - s)(r + s) > ۰$$

و درنتیجه a، b و c طول ضلعهای مثلثی هستند. اگر $\angle B$ زاویهٔ روبه‌روی ضلع با طول b و $\angle C$ زاویهٔ روبه‌روی ضلع با طول c باشد، با استفاده از $b(b + a) = c^۲$ به‌دست می‌آوریم

$$\cos C = \frac{-c^۲ + a^۲ + b^۲}{۲ab} = \frac{a^۲ - ab}{۲ab} = \frac{a - b}{۲b}$$
$$\cos B = \frac{-b^۲ + a^۲ + c^۲}{۲ac} = \frac{a(a + b)}{۲ac} = \frac{c}{۲b}$$

و

$$\cos ۲B = ۲\left(\frac{c^۲}{۴b^۲}\right) - ۱ = \frac{a - b}{۲b} = \cos C$$

بنابراین $۲\angle B = \angle C$.

مسألهٔ ۲۲۲. الف) عددی دلخواه مثلثی است اگر و فقط اگر به‌شکل $\frac{۱}{۲}k(k + ۱)$ باشد. اگر $n = \frac{۱}{۲}k(k + ۱)$، آنگاه $۹n + ۱ = \frac{۱}{۲}(۳k + ۱)(۳k + ۲)$، و درنتیجه $۹n + ۱$ نیز مثلثی است.

ب) فرض کنید، به‌ازای هر n، از مثلثی بودن n بتوان نتیجه گرفت که $an + b$ مثلثی است. اگر $n = \frac{۱}{۲}n(n + ۱)$ و $an + b = \frac{۱}{۲}r(r + ۱)$، آنگاه

$$\frac{ak(k + ۱)}{۲} + b = \frac{r(r + ۱)}{۲}$$

و درنتیجه

$$r^۲ + r - [ak(k + ۱) + ۲b] = ۰$$

جواب این معادلهٔ درجهٔ دوم به‌ازای هر مقدار k باید عدد صحیحی مانند r باشد. چنین چیزی فقط در صورتی روی می‌دهد که a و b چنان باشند که مبین این معادله به‌ازای هر مقدار k مربع کامل باشد. اگر به‌ازای عددهای صحیحی مثل u و v، مستقل از انتخاب k،

$$۱ + ۴ak(k + ۱) + ۸b = (ku + v)^۲$$

از مقایسهٔ ضرایب معلوم می‌شود که $۴a = u^۲ = ۲uv$ و درنتیجه $u = ۲v$. بنابراین $b = \frac{v^۲ - ۱}{۸}$ و $a = v^۲$. اگر v عددی فرد باشد، b عددی صحیح خواهد بود.

بنابراین اگر v عددی فرد باشد، $a = v^۲$، $b = \frac{v^۲ - ۱}{۸}$ و $n = \frac{k(k + ۱)}{۲}$ عددی مثلثی باشد،

آنگاه

$$an + b = \frac{v^۲k(k+۱)}{۲} + \frac{v^۲-۱}{۸} = \frac{۱}{۲}\left[vk + \frac{v-۱}{۲}\right]\left[vk + \frac{v+۱}{۲}\right]$$

و $an + b$ نیز مثلثی است.

مسألهٔ ۲۲۳. تحقیق درستی نابرابریهای

$$\sqrt{۴n+۱} < \sqrt{n} + \sqrt{n+۱} < \sqrt{۴n+۳} \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots)$$

با مجذورکردن دو طرف آسان است. همچنین نه $۴n + ۲$ مربع کامل است نه $۴n + ۳$، و درنتیجه

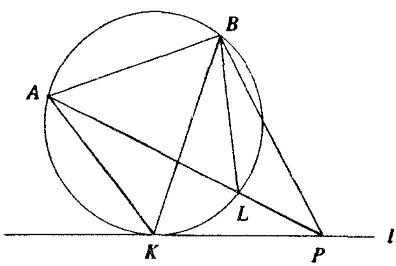
$$\left[\sqrt{۴n+۱}\right] = \left[\sqrt{۴n+۲}\right] = \left[\sqrt{۴n+۳}\right]$$

و نتیجه حاصل می‌شود.

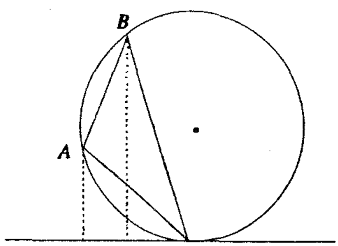
مسألهٔ ۲۲۴. ابتدا باید جای نقطهٔ P راکه به‌ازای آن $\angle APB$ ماکسیمم* می‌شود مشخص کنیم. دایره‌ای رسم کنید که از A و B بگذرد و بر l، مثلاً در نقطهٔ K، مماس باشد (شکل ۱۴۸ را ببینید). در این صورت به‌ازای هر نقطه مانند P روی l غیر از K،

$$\angle AKB = \angle ALB > \angle APB$$

با دانستن این نتیجه به‌آسانی می‌توانیم آرایشی ترسیم کنیم (مثلاً آرایش شکل ۱۴۹) که حکم بیان شده در مورد آن درست نباشد.



شکل ۱۴۸



شکل ۱۴۹

مسألهٔ ۲۲۵. چون $\sin C \leqslant ۱$ و $\sin A \sin B \geqslant ۱$، پس

$$۱ \geqslant \cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$
$$= ۱ + \sin A \sin B(۱ - \sin C) \geqslant ۱$$

بنابراین $\cos(A-B) = ۱$، $\sin C = ۱$، و درنتیجه $\angle C = ۹۰^\circ$ و $\angle A = \angle B = ۴۵^\circ$. بنابراین ABC مثلثی قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.

مسألهٔ ۲۲۶. تعمیمی ساده این است

$$a_n = (n+۱)^۲ + (n+۲)^۲ + ((n+۱)(n+۲))^۲$$
$$= (n^۲ + ۳n + ۳)^۲$$

مسألهٔ ۲۲۷. راه‌حل اول. اگر $xyz = ۰$، مثلاً اگر $z = ۰$، $x \geqslant ۰$ و $y \geqslant ۰$، باید درستی نابرابری

$$۸(x^۳ + y^۳)^۲ \geqslant ۹x^۲y^۲xy$$

را ثابت کنیم. این نابرابری با نابرابری

$$۸x^۶ + ۷x^۳y^۳ + ۸y^۶ \geqslant ۰$$

هم‌ارز است، که آشکارا درست است. اگر $xyz \neq ۰$، یعنی اگر $x > ۰$، $y > ۰$ و $z > ۰$ در صورتی که

$$a = \frac{x^۲}{yz}, \quad b = \frac{y^۲}{zx}, \quad c = \frac{z^۲}{xy}$$

نابرابری زیر هم‌ارز با همان نابرابری است که باید درستی آن را ثابت کنیم

$$۸(a+b+c)^۲ - ۹(۱ + \frac{۱}{a})(۱ + \frac{۱}{b})(۱ + \frac{۱}{c}) \geqslant ۰$$

توجه کنید که $a, b, c > ۰$ و $abc = ۱$. طرف چپ این نابرابری برابر است با

$$۸(a^۲ + b^۲ + c^۲) + ۱۶(ab + bc + ca) - ۱۸ - ۹\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}\right) - ۹\left(\frac{۱}{ab} + \frac{۱}{bc} + \frac{۱}{ca}\right)$$
$$= ۸(a^۲ + b^۲ + c^۲) + ۷\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}\right) - ۹(a+b+c) - ۱۸$$
$$= \frac{۱}{a}(۸a^۳ - ۹a^۲ - ۶a + ۷) + \frac{۱}{b}(۸b^۳ - ۹b^۲ - ۶b + ۷)$$
$$+ \frac{۱}{c}(۸c^۳ - ۹c^۲ - ۶c + ۷)$$
$$= \frac{(a-۱)^۲(۸a+۷)}{a} + \frac{(b-۱)^۲(۸b+۷)}{b} + \frac{(c-۱)^۲(۸c+۷)}{c}$$

و این عبارت مطمئناً منفی نیست.

راه‌حل دوم. بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$(x^۲ + yz)(y^۲ + zx)(z^۲ + xy) \leqslant \left(\frac{x^۲ + y^۲ + z^۲ + yz + zx + xy}{۳}\right)^۳$$

چون

$$۰ \leqslant (x-y)^۲ + (y-z)^۲ + (z-x)^۲$$
$$= ۲(x^۲ + y^۲ + z^۲ - yz - zx - xy)$$

نتیجه می‌شود که

$$yz + zx + xy \leqslant x^۲ + y^۲ + z^۲$$

و بنابراین

$$(x^۲ + yz)(y^۲ + zx)(z^۲ + xy) \leqslant \frac{۸}{۲۷}(x^۲ + y^۲ + z^۲)^۳$$

چون

$$\left(\frac{x^m + y^m + z^m}{۳}\right)^{\frac{۱}{m}}$$

تابعی صعودی از m است (پیوست، د(۷) را ببینید)، پس

$$\left(\frac{x^۲ + y^۲ + z^۲}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant \left(\frac{x^۳ + y^۳ + z^۳}{۳}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

و درنتیجه $(x^۲ + y^۲ + z^۲)^۳ \leqslant ۳(x^۳ + y^۳ + z^۳)^۲$. اکنون استفاده از این نابرابری نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌دهد.

ملاحظه. تعمیم زیر را ثابت کنید: به‌ازای $x_۱, x_۲, \cdots, x_n \geqslant ۰$،

$$۲^n \left\{\frac{x_۱^n + x_۲^n + \cdots + x_n^n}{n}\right\}^{n-۱} \geqslant \prod_{i=۱}^{n} \left(x_i^{n-۱} + \frac{x_۱ x_۲ \cdots x_n}{x_i}\right)$$

مسألهٔ ۲۲۸. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ انسانهایی باشد که در طول زندگی خود به تعداد دفعات زوجی با انسانهای دیگر دست داده‌اند و T مجموعهٔ همهٔ انسانهایی باشد که در طول زندگی خود به تعداد دفعات فردی با انسانهای دیگر دست داده‌اند. به‌ازای هر شخصی مانند k فرض کنید h_k تعداد دفعاتی باشد که k در طول زندگی خود با دیگران دست داده است.

چون در هر دست دادن دقیقاً دو نفر درگیرند، $\sum_{x \in S} h_x + \sum_{y \in T} h_y$ دو برابر تعداد دست‌دادنها و درنتیجه زوج است. چون به‌ازای هر $x \in S$، h_x زوج است، نتیجه می‌شود که $\sum_{x \in S} h_x$ زوج است. بنابراین $\sum_{y \in T} h_y$ نیز زوج است. اما به‌ازای هر $y \in T$، h_y فرد است. بنابراین مجموعهٔ T باید شامل تعداد زوجی از انسانها باشد.

مسألهٔ ۲۲۹. تعریف کنید $p = x + y + z$. اگر (۲) را از (۱) کم کنیم نتیجه می‌شود

$$p(x - y) = a^۲ - b^۲ \qquad (۴)$$

به‌همین ترتیب

$$p(y - z) = b^۲ - c^۲ \qquad (۵)$$

$$p(z - x) = c^۲ - a^۲ \qquad (۶)$$

ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که $a^۲ = b^۲ = c^۲$. در این صورت یا $x = y = z$، که فقط وقتی روی می‌دهد که $a = b = c = ۰$، یا $p = x + y + z = ۰$. در حالت اخیر، از هر یک از سه معادلهٔ (۱)،

(۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$x^2 + xy + y^2 = a^2$$

بنابراین، مثلاً می‌توان x را به‌دلخواه انتخاب و متغیرهای دیگر را تعیین کرد.

اکنون فرض کنید که a^2، b^2 و c^2 هر سه با هم مساوی نباشند. بخصوص، $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. از (۴)، (۵) و (۶) نتیجه می‌شود $p = 0$. چون $py = px - (a^2 - b^2)$ و $pz = px + (c^2 - a^2)$، پس

$$p^2 = p(x + y + z) = 3px + (b^2 + c^2 - 2a^2)$$

و یا

$$3px = p^2 + (2a^2 - b^2 - c^2) \tag{۷}$$

به‌همین ترتیب

$$3py = p^2 + (2b^2 - a^2 - c^2) \tag{۸}$$

$$3pz = p^2 + (2c^2 - a^2 - b^2) \tag{۹}$$

اگر بتوانیم p را جداگانه تعیین کنیم، معادله‌ها حل خواهند شد. با جمع کردن معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) با هم به‌دست می‌آوریم

$$(x - y)^2 + (y - x)^2 + (z - x)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

با استفاده از رابطه‌های (۴)، (۵) و (۶) همراه با این رابطه به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \end{aligned}$$

از رابطهٔ (۷) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3p}\{p^2 + (2a^2 - b^2 - c^2)\} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)\{(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2)+(a^2+b^2+c^2)(2a^2-b^2-c^2)\}}{3\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}(a^2+b^2+c^2)} \\ &= \frac{3a^4 - 3b^2c^2}{3\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}} \end{aligned}$$

بنابراین، نهایتاً به‌دست می‌آوریم

$$\frac{x}{a^4 - b^2c^2} = \frac{y}{b^4 - c^2a^2} = \frac{z}{c^4 - a^2b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2}}$$

(توجه کنید که چون $p \neq 0$، $a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2$ صفر نیست، و بنابراین دو تا ریشهٔ دوم دارد. صفر شدن $a^4 - b^2c^2$ با صفر شدن x هم‌ارز است، و مشابه همین در مورد y و z نیز درست است.)

مسألهٔ ۲۳۰. اگر n زوج باشد، آنگاه

$$
\begin{aligned}
&(۱^۲-۲^۲)+(۳^۲-۴^۲)+\cdots+((n-۱)^۲-n^۲)\\
&=(۱-۲)(۱+۲)+(۳-۴)(۳+۴)+\cdots+((n-۱)-n)((n-۱)+n)\\
&=-(۱+۲)-(۳+۴)-\cdots-((n-۱)+n)\\
&=-(۱+۲+۳+۴+\cdots+n)\\
&=(-۱)^{n+۱}(۱+۲+۳+\cdots+n)
\end{aligned}
$$

اگر n فرد باشد، آنگاه

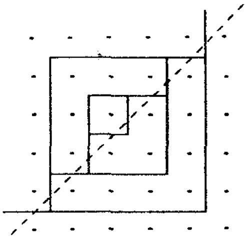
$$
\begin{aligned}
&۱^۲-(۲^۲-۳^۲)-(۴^۲-۵^۲)-\cdots-((n-۱)^۲-n^۲)\\
&=۱-(۲-۳)(۲+۳)-(۴-۵)(۴+۵)-\cdots-((n-۱)-n)((n-۱)+n)\\
&=۱+۲+۳+\cdots+(n-۱)+n\\
&=(-۱)^{n+۱}(۱+۲+۳+\cdots+n)
\end{aligned}
$$

ملاحظات. این نتیجه را به‌استقرا یا با نوشتن سمت چپ به‌صورت

$$(۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+\cdots)-۲(۲^۲)(۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots)$$

و استفاده از دستور مجموع مربعها نیز می‌توان ثابت کرد.

همچنین می‌توان درستی حکم را از روی نمودار تحقیق کرد. در شکل ۱۵۰ نمودار مورد نظر در حالتی که $n=۶$ نشان داده شده است.



شکل ۱۵۰

$۶^۲$ نقطه در صفحه قرار دهید، $۵^۲$ نقطه را حذف کنید، $۴^۲$ نقطه اضافه کنید، $۳^۲$ نقطه را حذف کنید، $۲^۲$ نقطه اضافه کنید، $۱^۲$ نقطه را حذف کنید؛ نقطه‌های باقی‌مانده زیر «خط‌چین» نشان داده شده در شکل ۱۵۰ قرار دارند.

مسألهٔ ۲۳۱. چون

$$(a+b-c)(a-b+c)=a^۲-(b-c)^۲\leqslant a^۲$$

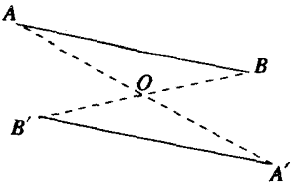
پس

$$
\begin{aligned}
(a+b-c)(a-b+c)&\leqslant a^۲\\
(b+c-a)(b-c+a)&\leqslant b^۲ \qquad (*)\\
(c+a-b)(c-a+b)&\leqslant c^۲
\end{aligned}
$$

چون $a+b-c>۰$، $b+c-a>۰$ و $c+a-b>۰$، می‌توانیم سه نابرابری $(*)$ را در هم ضرب کنیم و سپس با گرفتن ریشهٔ دوم به نابرابری مطلوب برسیم.

یادداشت. برای مطالعهٔ برهانهایی دیگر و تعمیمهایی از این مسأله نگاه کنید به
Crux Mathematicorum, 10(1984), pp. 46-48.

مسألهٔ ۲۳۲. فرض کنید O مرکز ناحیه و AB وتری در این ناحیه باشد (شکل ۱۵۱ را ببینید). فرض کنید $A'B'$ قرینهٔ AB نسبت به مرکز ناحیه باشد. در این صورت



شکل ۱۵۱

$$\overline{AB} \leqslant \overline{AO} + \overline{OB} \leqslant ۲\max(\overline{AO}, \overline{OB})$$
$$= \max(۲\overline{AO}, ۲\overline{OB}) = \max(\overline{AA'}, \overline{BB'})$$

و نتیجه حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۲۳۳. می‌توان دنباله‌ای از حرکتها پیدا کرد تا اینکه در نهایت همهٔ سکه‌ها در یک قطاع شوند، اگر و فقط اگر k فرد باشد.

فرض کنید $k = ۲m + ۱$. قطاعها را به‌طور متوالی شماره‌گذاری کنید:

$$-m, -m + ۱, \cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots, m - ۱, m$$

دنباله‌ای از حرکتها از نوع $(-i \to -i + ۱, i \to i - ۱)$ در نهایت همهٔ سکه‌ها را در قطاع شمارهٔ صفر جمع می‌کند.

از طرف دیگر، فرض کنید $k = ۲m$. قطاعها را به‌طور متوالی از ۱ تا $۲m$ شماره‌گذاری کنید. فرض کنید در هر آرایشی از سکه‌ها در قطاعها، n_i تعداد سکه‌ها در قطاع iاُم باشد

$$s = n_۱ + ۲n_۲ + ۳n_۳ + \cdots + kn_k$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که در هر حرکت s (به‌پیمانهٔ k) تغییر نمی‌کند.

در وضعیت اولیهٔ سکه‌ها،

$$s = ۱ + ۲ + \cdots + ۲m = m(۲m + ۱) \not\equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲m)$$

اما اگر همهٔ سکه‌ها در قطاع i جمع شده باشند،

$$s = ۲mi \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲m)$$

بنابراین، دنباله‌ای از حرکتها وجود ندارد که در نهایت همهٔ سکه‌ها در یک قطاع جمع شوند.

مسألهٔ ۲۳۴. معادله‌های مفروض هم‌ارزند با

$$۲\sin\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲} = a \qquad (۱)$$

$$۲\cos\frac{x+y}{۲}\cos\frac{x-y}{۲} = b \qquad (۲)$$

با تقسیم کردن معادلهٔ (۱) بر معادلهٔ (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\tan\frac{x+y}{۲} = \frac{a}{b} \qquad (۳)$$

اگر هر دو معادلهٔ (۱) و (۲) را به توان ۲ برسانیم و با هم جمع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$۴\cos^۲ \frac{x-y}{۲} = a^۲ + b^۲ \qquad (۴)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌گیریم

$$\cos\frac{x+y}{۲} = \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

و

$$\cos\frac{x-y}{۲} = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{۲}$$

(می‌توانستیم هر دو عبارت را با علامت منها در نظر بگیریم؛ نتیجهٔ نهایی تغییر نمی‌کند.) بنابراین

$$۲\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{y}{۲} = \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}} + \frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{۲} = \frac{a^۲+b^۲+۲b}{۲\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$۲\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{y}{۲} = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲}}{۲} - \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{a^۲+b^۲-۲b}{۲\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

درنتیجه

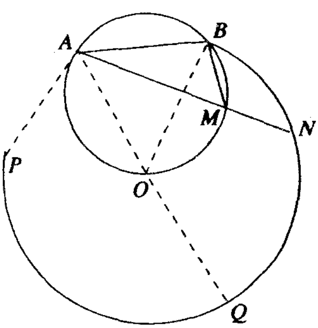
$$\tan\frac{x}{۲}\tan\frac{y}{۲} = \frac{a^۲+b^۲-۲b}{a^۲+b^۲+۲b} \qquad (۵)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\tan\frac{x}{۲}+\tan\frac{y}{۲} &= \tan\frac{x+y}{۲}\left(۱-\tan\frac{x}{۲}\tan\frac{y}{۲}\right)\\ &= \frac{a}{b}\left(\frac{۴b}{a^۲+b^۲+۲b}\right)\\ &= \frac{۴a}{a^۲+b^۲+۲b} \qquad (۶)\end{aligned}$$

از (۵) و (۶) معلوم است که $\tan\frac{x}{۲}$ و $\tan\frac{y}{۲}$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیرند

$$(a^۲+b^۲+۲b)t^۲ - ۴at + (a^۲+b^۲-۲b) = ۰$$



شکل ۱۵۲

مسألهٔ ۲۳۵. با مراجعه به‌شکل ۱۵۲، توجه کنید که چون $\triangle BMN$ متساوی‌الساقین است، $\angle BNM = \frac{۱}{۲}\angle BMA$، و درنتیجه $\angle BNM$ ثابت است. بنابراین N باید روی دایره‌ای واقع باشد که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد. مرکز این دایره باید نقطه‌ای مانند نقطهٔ O باشد، به‌طوری‌که $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{OQ}$. اما مکان‌هندسی مورد نظر فقط بخشی از این دایره است. این بخش از دایره کمانی است که نقطهٔ B را به نقطهٔ P با این ویژگی که $\overline{AP} = \overline{AB}$ و AP مماس بر دایرهٔ AOB است، وصل می‌کند. زیرا اگر N روی این کمان باشد، آنگاه

$$\angle BNA = \frac{۱}{۲}\angle AOB = \frac{۱}{۲}\angle AMB$$

بنابراین $\angle BNM = \angle MBN$ و $\overline{BM} = \overline{BN}$.

اگر توجه کنیم که ممکن است M در هر طرف AB واقع باشد، می‌بینیم که مکان‌هندسی N متشکل از دو کمان دایره‌ای است که هر دو از B شروع می‌شوند، هر دو بخشهایی از دایره‌هایی هستند که از A و B می‌گذرند و مرکز هر یک از آنها یکی از دو سر قطری است که AB را نصف می‌کند، و هر دو در یک طرف خط مماسی که از A بر دایرهٔ مفروض رسم می‌شود واقع‌اند.

پرسش. بخشهای باقیماندهٔ این دایره‌ها را چگونه تعبیر می‌کنید؟

مسألهٔ ۲۳۶. معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$x^{۶} + x^{۵} + x^{۴} - ۲۸x^{۳} + x^{۲} + x + ۱ = ۰$$

روشن است که $x = ۰$ جواب این معادله نیست، پس این معادله هم‌ارز است با

$$x^{۳} + x^{۲} + x - ۲۸ + \frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^{۲}} + \frac{۱}{x^{۳}} = ۰$$

فرض کنید $z = x + \frac{۱}{x}$. در این صورت $z^{۲} = x^{۲} + ۲ + \frac{۱}{x^{۲}}$ و $z^{۳} = x^{۳} + ۳(x + \frac{۱}{x}) + \frac{۱}{x^{۳}}$؛ بنابراین، $x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}} = z^{۲} - ۲$ و $x^{۳} + \frac{۱}{x^{۳}} = z^{۳} - ۳z$. به‌این ترتیب معادلهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$z^{۳} + z^{۲} - ۲z - ۳۰ = ۰$$

با آزمودن چند مقدار درمی‌یابیم که $z = ۳$ ریشهٔ این معادله است. در این صورت، بنابر قضیهٔ عاملها،

$$(z - ۳)(z^{۲} + ۴z + ۱۰) = ۰$$

پس $z = ۳$ تنها ریشهٔ حقیقی این معادله است.

چون حقیقی بودن x مستلزم حقیقی بودن z است، جوابهای حقیقی معادلهٔ مورد نظر، مانند x، باید در $x + \frac{۱}{x} = ۳$ و یا $x^{۲} - ۳x + ۱ = ۰$ صدق کنند. بنابراین

$$x = \frac{۳ - \sqrt{۵}}{۲} \quad \text{یا} \quad x = \frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲}$$

ملاحظه. با استفاده از قاعدهٔ علامتهای دکارت می‌توان ثابت کرد که معادله حداکثر دو ریشهٔ مثبت دارد.

مسألهٔ ۲۳۷. راه‌حل اول. فرض کنید مقدار بنزین لازم به n بخش $b_{۱}$، $b_{۲}$، $\cdots$ و b_{n} تقسیم شود و این بخشها در نقاط $P_{۱}$، $P_{۲}$، $\cdots$ و P_{n} که پشت سر هم در جهت ساعتگرد نامگذاری شده‌اند، دور مسیر دایره‌ای قرار داده شود. فرض کنید مقدار بنزین لازم برای رسیدن از P_{i} به $P_{i+۱}$ برابر a_{i} $(i = ۱, ۲, \cdots, n - ۱)$ و از P_{n} به $P_{۱}$ برابر a_{n} باشد.

فرض کنید $x_{i} = b_{i} - a_{i}$ و $s_{i} = x_{۱} + x_{۲} + \cdots + x_{i}$ $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$. توجه کنید که

$s_n = 0$. مقدار r را طوری انتخاب کنید که به‌ازای هر i، $s_r < s_i$. در این صورت به‌ازای هر i،

$$x_{r+1} = s_{r+1} - s_r \geqslant 0$$
$$x_{r+1} + x_{r+2} \geqslant s_{r+1} - s_r \geqslant 0$$
$$\vdots$$
$$x_{r+1} + x_{r+2} + \cdots + x_i = s_i - s_r \geqslant 0$$

بنابراین، اگر اتومبیل از نقطهٔ $r+1$ شروع به حرکت کند، چون

$$b_{r+1} \geqslant a_{r+1}, b_{r+1} + b_{r+2} \geqslant a_{r+1} + a_{r+2}, \ldots$$

همیشه مقدار بنزین لازم برای رسیدن از هر نقطه به نقطهٔ بعدی را دارد.

راه‌حل دوم (به‌استقرا). ثابت می‌کنیم که همواره پیمودن مسیر دایره‌ای در جهت ساعتگرد ممکن است. روشن است که اگر همهٔ بنزین لازم برای پیمودن مسیر در یک نقطه قرار داده شود نتیجه درست است.

فرض کنید نتیجه در حالتی که بنزین به $n-1$ بخش تقسیم شود درست باشد. اکنون فرض کنید b_1، b_2، $\cdots$ و b_n مقدارهای بنزینی باشد که در نقاط P_1، P_2، $\cdots$ و P_n (که در جهت ساعتگرد نامگذاری شده‌اند) در مسیر قرار داده شده است. دست‌کم در یک نقطه باید مقدار بنزین کافی برای اینکه اتومبیل در جهت ساعتگرد در مسیر دایره‌ای تا نقطهٔ بعدی حرکت کند موجود باشد؛ بدون کاستن از کلیت استدلال می‌توانیم فرض کنیم b_1 مقدار بنزین کافی برای رفتن از P_1 به P_2 باشد. مقدار بنزین موجود در P_2 را به بنزین موجود در P_1 اضافه می‌کنیم. بنابر فرض استقرا، اگر در P_1 به‌اندازهٔ $b_1 + b_2$ و در P_i به‌اندازهٔ b_i $(i = 3, 4, \cdots, n)$ بنزین قرار داده شود، نقطه‌ای مانند r در مسیر وجود دارد که اگر اتومبیل از این نقطه شروع به حرکت کند، بتواند مسیر دایره‌ای را در جهت ساعتگرد به‌طور کامل طی کند. چون b_1، مقدار بنزین در P_1، برای رساندن اتومبیل به P_2 کافی است، اگر در P_2 به‌اندازهٔ b_2 بنزین قرار داده شود، باز هم همان مسیر را می‌توان طی کرد.

مسألهٔ ۲۳۸. به‌دلیل متناوب بودن تابعها کافی است فقط مقادیری از x را در نظر بگیریم که در فاصله‌ای به‌طول 2π قرار دارند. بنابراین فرض کنید $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$.

فرض کنید $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. در این صورت $-1 \leqslant \cos x < 0$، و درنتیجه $\sin(\cos x) < 0$. همچنین، چون $-\frac{1}{2}\pi < -1 \leqslant \sin x \leqslant 1 < \frac{1}{2}\pi$، پس $\cos(\sin x) \geqslant 0$. بنابراین به‌ازای $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$، $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

حالتی را در نظر بگیرید که $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$. روشن است که نابرابری به‌ازای $x = 0$ برقرار است. چون

$$\cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x)$$

و $\sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x)$. بنابراین، کافی است ثابت کنیم که نتیجه به‌ازای $0 < x \leqslant \frac{1}{2}\pi$ برقرار

است. اکنون چون $\circ < \sin x < x$ و چون $\cos x$ به‌ازای $\circ < x \leqslant \frac{۱}{۲}\pi$ تابعی نزولی است، پس

$$\cos(\sin x) > \cos x > \sin(\cos x)$$

تبصره. رابطهٔ بین $\sin(\sin x)$ و $\cos(\cos x)$ را بررسی کنید.

مسألهٔ ۲۳۹. معادلهٔ مورد نظر هم‌ارز است با

$$(x+y+۱)(x+y-m-۱)=\circ$$

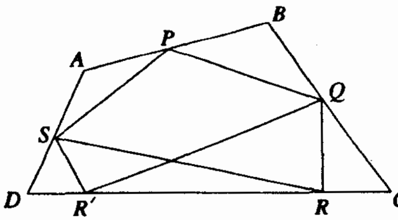
چون به‌ازای هر (x,y) قابل قبول $x+y+۱>\circ$، پس $x+y=m+۱$ که آشکارا m جواب دارد:

$$(x,y)=(i,m+۱-i), \qquad i=۱,۲,\cdots,m$$

مسألهٔ ۲۴۰. P ، Q و S را به‌ترتیب نقاط وسط AB، BC و DA بگیرید (شکل ۱۵۳ را ببینید). چون مساحت $PQRS$ با مساحت $PQR'S$ برابر است،

$$(\triangle SQR \text{ مساحت}) = (\triangle SQR' \text{ مساحت})$$

و بنابراین $SQ \parallel DC$. بنابراین باید $SQ \parallel AB$. درنتیجه $AB \parallel CD$. به‌طور مشابه، $BC \parallel AD$. پس چهارضلعی $ABCD$ باید متوازی‌الاضلاع باشد.



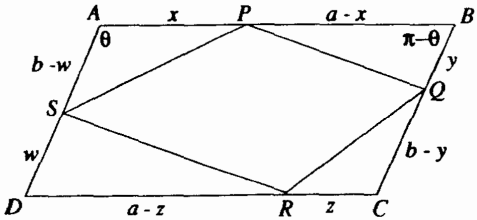
شکل۱۵۳

اکنون ثابت می‌کنیم که نتیجهٔ مورد نظر در مورد هر چهارضلعی محدب دلخواه مانند $PQRS$ که در هر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ محاط شده برقرار است. با توجه به نماد گذاریهای شکل ۱۵۴ می‌بینیم که

$$\begin{aligned}
&۲(ABCD \text{ مساحت} - PQRS \text{ مساحت})\\
&\quad = (\sin\theta)\{x(b-w)+y(a-x)+z(b-y)+w(a-z)\}\\
&\quad = (\sin\theta)\{(a-x)w+(b-y)x+(a-z)y+(b-w)z\}\\
&\quad = ۲(ABCD \text{ مساحت} - P'Q'R'S' \text{ مساحت})
\end{aligned}$$

بنابراین

$$(PQRS \text{ مساحت}) = (P'Q'R'S' \text{ مساحت})$$



شکل۱۵۴

مسألهٔ ۲۴۱. با توجه به معادله‌های مفروض، ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ چهارم

$$t^{۴} - wt^{۳} - zt^{۲} - yt - x$$

a ، b ، c و d هستند. بنابراین

$$t^{۴} - wt^{۳} - zt^{۲} - yt - x = (t-a)(t-b)(t-c)(t-d)$$

اگر طرف راست برابری بالا را بسط دهیم، با مقایسهٔ ضرایب در می‌یابیم که

$$w = a + b + c + d$$

$$z = -(ab + bc + cd + da + ac + bd)$$

$$y = abc + abd + acd + bcd$$

$$x = -abcd$$

تبصره. اگر a ، b ، c و d متمایز نباشند چه می‌توان گفت؟

مسألهٔ ۲۴۲. راه‌حل اول. چون a و b باید به‌شکل $۲mn$ و $m^{۲} - n^{۲}$ (و نه لزوماً به‌همین ترتیب) باشند، باید ثابت کنیم

$$P = mn(m-n)(m+n)(m^{۲} - ۲mn - n^{۲})(m^{۲} + ۲mn - n^{۲})$$

بر $۷ \times ۳ \times ۲$ بخش‌پذیر است. کافی است حالتی را در نظر بگیریم که m و n نسبت به‌هم اول‌اند. با همنهشتیهای به‌پیمانهٔ ۲ و ۳ می‌بینیم که $mn(m-n)(m+n)$ بر ۲ و ۳ بخشپذیر است. همنهشتیهای به‌پیمانهٔ ۷ را در نظر بگیرید. اگر

$$m \equiv ۰,\ n \equiv ۰,\ m \equiv n,\ m \equiv -n \text{ (به‌پیمانهٔ ۷)}$$

آنگاه $P \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۷). حالتهای دیگر عبارت‌اند از

$$(m,n) \equiv (۱,۲), (۱,۳), (۱,۴), (۱,۵), (۲,۳), (۲,۴),$$
$$(۲,۶), (۳,۵), (۳,۶), (۴,۵), (۴,۶), (۵,۶) \text{ (به‌پیمانهٔ ۷)}$$

در هر یک از این حالتها،

$$(m^۲ - ۲mn - n^۲)(m^۲ + ۲mn - n^۲) \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

راه‌حل دوم. کافی است ثابت کنیم در حالتی که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a، b و c برابر ۱ باشد نتیجه برقرار است. چون c و یکی از a و b، مثلاً a، فرد است، $b^۲ = c^۲ - a^۲$ بر ۸ بخش‌پذیر است. پس $b \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۴) و درنتیجه $ab \equiv ۰$ (به پیمانهٔ ۴).

چون $a^۲ + b^۲ = c^۲ \not\equiv ۲$ (به‌پیمانهٔ ۳)، از a و b یکی بر ۳ بخش‌پذیر است و درنتیجه $ab \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۳).

چون به‌پیمانهٔ ۷ هر مربع کامل همنهشت با ۰، ۱، ۲ و یا ۴ است، می‌توان تحقیق کرد که $a^۲ + b^۲$ فقط وقتی همنهشت با مربع عددی صحیح است که یا $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ ۷)، یا $a \equiv -b$ (به‌پیمانهٔ ۷) و یا $ab \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۷). نتیجه از این حکمها حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۲۴۳. راه‌حل اول. مقدار ثابتی برای A، کمتر از $\frac{\pi}{۲}$، در نظر بگیرید. در این صورت $\cos A > ۰$ و $\cos(B+C)$ مقداری ثابت است. چون

$$\sin B \sin C = \frac{۱}{۲}(\cos(B-C) - \cos(B+C))$$

مقدار $\sin^۲ A + \sin B \sin C \cos A$ وقتی ماکسیمم می‌شود که $B = C$. در این حالت، $A = \pi - ۲B$، $\sin A = \sin ۲B$ و $\cos A = -\cos ۲B$ و

$$\begin{aligned}\sin^۲ A + \sin B \sin C \cos A &= \sin^۲ ۲B - \sin^۲ B \cos ۲B \\ &= \sin^۲ B(۴\cos^۲ B - ۲\cos^۲ B + ۱) \\ &= \sin^۲ B(۲\cos^۲ B + ۱) \\ &= \sin^۲ B(۳ - ۲\sin^۲ B)\end{aligned}$$

تابع $u(۳ - ۲u) = \frac{۹}{۸} - ۲(u - \frac{۳}{۴})^۲$ به‌ازای $u = \frac{۳}{۴}$ ماکسیمم می‌شود. بنابراین $\sin^۲ B(۳ - \sin^۲ B)$ به‌ازای $B = \frac{\pi}{۳}$ ماکسیمم می‌شود.

بنابراین وقتی $A < \pi/۲$، عبارت

$$\sin^۲ A + \sin B \sin C \cos A$$

به‌ازای $A = B = C = \frac{\pi}{۳}$ مقدار ماکسیمم خود را که $\frac{۹}{۸}$ است می‌گیرد. اگر $A > \frac{\pi}{۲}$، $\cos A$ منفی و $\sin B$ و $\sin C$ مثبت‌اند. در این صورت، عبارت $\sin^۲ A + \sin B \sin C \cos A$ از ۱ بیشتر نیست.

اگر $A = \frac{\pi}{۲}$، $\sin^۲ A + \sin B \sin C \cos A = ۱$.

راه‌حل دوم. فرض کنید شعاع دایرهٔ محیطی مثلث R باشد و a، b و c طول ضلعهای روبه‌رو به زاویه‌های A، B و C باشند. با استفاده از دستورهای $۲bc\cos A = b^۲ + c^۲ - a^۲$ و $a = ۲R\sin A$،

$b = ۲R\sin B$ و $c = ۲R\sin C$، می‌توانیم عبارت مورد نظر را به $\dfrac{a^۲+b^۲+c^۲}{۸R^۲}$ تبدیل کنیم.

بنابراین، مسأله‌ای هم‌ارز با این مسأله ماکسیمم کردن مجموع مربعهای طول ضلعهای مثلثی محاط در دایره‌ای به شعاع R است. فرض کنید $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ مختصات رأسهای مثلثی محاط در دایره‌ای به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = R^۲$ باشند. در این صورت، چون $x_i^۲ + y_i^۲ = R^۲$ $(i = ۱, ۲, ۳)$، پس

$$\begin{aligned} a^۲ + b^۲ + c^۲ &= (x_۱ - x_۲)^۲ + (x_۲ - x_۳)^۲ + (x_۳ - x_۱)^۲ \\ &\quad + (y_۱ - y_۲)^۲ + (y_۲ - y_۳)^۲ + (y_۳ - y_۱)^۲ \\ &= ۳(x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲) - (x_۱ + x_۲ + x_۳)^۲ + ۳(y_۱^۲ + y_۲^۲ + y_۳^۲) \\ &\quad - (y_۱ + y_۲ + y_۳)^۲ \\ &= ۹R^۲ - (x_۱ + x_۲ + x_۳)^۲ - (y_۱ + y_۲ + y_۳)^۲ \end{aligned}$$

بنابراین، $a^۲ + b^۲ + c^۲ \leqslant ۹R^۲$ و برابری برقرار است اگر و فقط اگر

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ = y_۱ + y_۲ + y_۳$$

و یا اگر مرکزثقل مثلث بر مرکز دایرهٔ محیطی آن منطبق باشد.

بنابراین

$$\max \frac{a^۲ + b^۲ + c^۲}{۸R^۲} = \frac{۹}{۸}$$

تبصرهٔ ۱. به‌طور کلیتر ثابت کنید که اگر x، y و z عددهای حقیقی دلخواهی باشند،

$$yza^۲ + zxb^۲ + xyc^۲ \leqslant (x + y + z)^۲R^۲$$

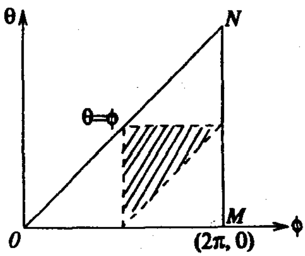
تبصرهٔ ۲. حتی کلیتر از قبلی، ثابت کنید که اگر x، y و z عددهایی حقیقی و دلخواه و $R_۱$، $R_۲$ و $R_۳$ فاصله‌های نقطهٔ اختیاری P به‌ترتیب از A، B و C باشند، آنگاه

$$(x + y + z)(xR_۱^۲ + yR_۲^۲ + zR_۳^۲) \geqslant yza^۲ + zxb^۲ + xyc^۲$$

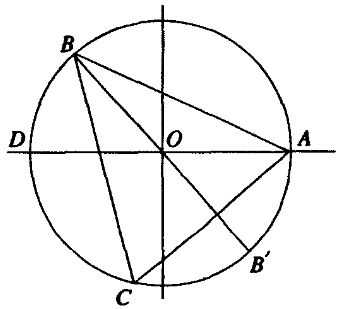
مسألهٔ ۲۴۴. راه‌حل اول. سه نقطه‌ای که روی دایره انتخاب می‌شوند A، B و C می‌نامیم. بدون کاستن از کلیت استدلال، می‌توانیم یکی از این سه نقطه، مثلاً A، را روی محور xها ثابت بگیریم (شکل ۱۵۵ را ببینید). فرض کنید $\angle AOB = \theta$ و $\angle AOC = \phi$، و اندازه‌گیری زاویه‌ها در جهت پادساعتگرد از AO انجام شده باشد؛ در این صورت θ و ϕ هر دو در فاصلهٔ $[۰, ۲\pi]$ قرار دارند. احتمال اینکه $\theta = \phi$ صفر است، و حالتهای $\phi < \theta$ و $\theta < \phi$ هم‌احتمال‌اند. درنتیجه، فرض می‌کنیم $\theta < \phi$. با این فرض فضای احتمال یکنواخت چنین است

$$\{(\phi, \theta) | ۰ < \phi < ۲\pi, \theta < \phi\}$$

برای اینکه مثلث ABC حاده باشد، باید $\theta < \pi$ و C روی کمان DB' واقع باشد، که در اینجا B'

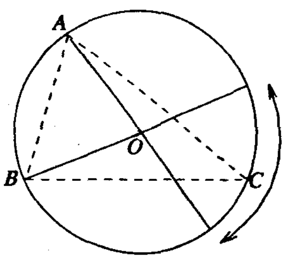


شکل ۱۵۶



شکل ۱۵۵

قرینهٔ B نسبت به مرکز دایره است. درنتیجه $\pi < \phi < \theta + \pi$ (اگر C بین B و D واقع باشد، $\angle CBA$ منفرجه می‌شود؛ اگر C بین B' و A واقع باشد، $\angle BAC$ منفرجه می‌شود.) با این شرایط نقطهٔ (ϕ,θ) لزوماً باید روی مثلثی واقع باشد که رأسهایش نقاط وسط ON، NM و MO هستند؛ مساحت این مثلث ربع مساحت $\triangle OMN$ است (شکل ۱۵۶ را ببینید). بنابراین احتمال مطلوب $\frac{1}{4}$ است.



شکل ۱۵۷

راه‌حل دوم (با استفاده از حسابان). فرض کنید که محیط دایره ۱ باشد. فرض کنید t طول کمان کوتاهتر بین دو نقطهٔ A و B باشد؛ t به‌طور یکنواخت از فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ انتخاب می‌شود. اگر $\triangle ABC$ حاده باشد، C باید روی کمانی به طول t واقع باشد (شکل ۱۵۷ را ببینید). احتمال وقوع این امر t است. بنابراین، احتمال اینکه $\angle ABC$ حاده باشد چنین است

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\int_0^{\frac{1}{2}} t\,dt = \frac{1}{4}$$

مسألهٔ ۲۴۵. این‌گونه رنگ‌آمیزی ممکن است. نقطه‌ای مانند (x,y) را اگر $x+y$ زوج باشد رنگ قرمز، اگر x فرد و y زوج باشد رنگ سفید، و اگر x زوج و y فرد باشد رنگ آبی بزنید. روشن است که شرط (الف) برقرار است. اکنون فرض کنید (x_1,y_1) قرمز، (x_2,y_2) سفید و (x_3,y_3) آبی باشد. در این صورت از $x_2 - x_1$ و $y_2 - y_1$ یکی زوج و دیگری فرد است؛ $x_3 - x_2$ و $y_3 - y_2$ هر دو فردند. بنابراین

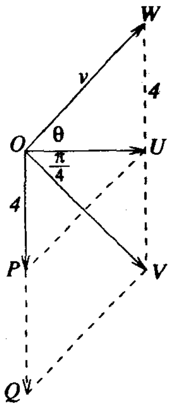
$$(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \neq (y_3 - y_2)(x_2 - x_1)$$

درنتیجه

$$\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \neq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یعنی سه نقطه‌ای که انتخاب کرده‌ایم همخط نیستند.

مسألهٔ ۲۴۶. موقعیت را از دیدگاه مردی که در حال راه رفتن است بررسی کنید. فرض کنید باد با تندی v در جهتی با زاویهٔ θ نسبت به جهت شرق بوزد. تندی نسبی باد دو مؤلفه دارد، مؤلفه‌ای مانند $\overrightarrow{OW}$ ناشی از وزش باد و مؤلفه‌ای (در جهت جنوب) ناشی از حرکت مرد که ابتدا $\overrightarrow{OP}$ و بعد $\overrightarrow{OQ}$ است. با مراجعه به‌شکل ۱۵۸ و توجه به اینکه



شکل ۱۵۸

$$\overline{WV} = \overline{OQ} = ۸, \quad \overline{OU} = \overline{UV} = \overline{WV} - \overline{WU} = ۴$$

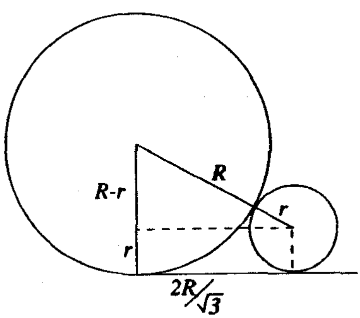
معلوم می‌شود که $\theta = \frac{\pi}{۴}$ و $v = ۴\sqrt{۲}$. بنابراین باد در جهت شمال‌شرقی و با سرعت $۴\sqrt{۲}$ کیلومتر بر ساعت می‌وزد.

مسألهٔ ۲۴۷. سه کره هر یک به شعاع R طوری روی میز قرار دارند که هر یک از آنها بر دو کرهٔ دیگر مماس است و کرهٔ کوچکتر چهارمی به شعاع r بین سه کرهٔ دیگر و میز قرار دارد. چون نقطهٔ تماس کرهٔ چهارم با میز مرکز دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $۲R$ است که رأسهایش نقاط تماس کره‌های بزرگتر با میزند، فاصلهٔ این نقطه تا هر یک از سه نقطهٔ تماس کره‌های بزرگتر با میز $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ است.

راه‌حل اول. $R + r$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با قاعده‌ای به‌طول $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ و ارتفاعی به طول $R - r$ است (شکل ۱۵۹ را ببینید). بنابراین

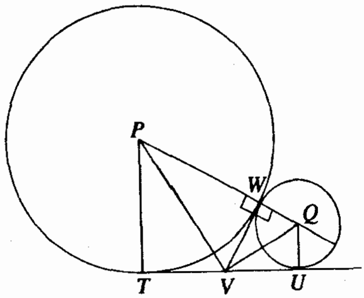
$$(R+r)^۲ = (R-r)^۲ + \frac{۴}{۳}R^۲$$

و درنتیجه $r = \frac{R}{۳}$.



شکل۱۵۹

راه‌حل دوم. در شکل ۱۶۰، نقطهٔ P مرکز یکی از کره‌های بزرگتر و Q مرکز کوچکتر است و نقطهٔ تماس این کره‌ها با میز T و U است. $VW \perp PQ$، $PV \perp VQ$ و $\overline{VU} = \frac{R}{\sqrt{۳}} = \overline{TV} = \overline{VW}$. چون $\overline{VW}^۲ = \overline{PW} \cdot \overline{QW}$، $\frac{R^۲}{۳} = Rr$ و درنتیجه $r = \frac{R}{۳}$.



شکل ۱۶۰

مسألهٔ ۲۴۸. فرض کنید (a, b, c, d) جوابی از معادله باشد و $d \geqslant c \geqslant b \geqslant a \geqslant$ ۱. در این صورت a ریشه‌ای از چندجمله‌ای درجهٔ دوم

$$x^۲ - bcdx + (b^۲ + c^۲ + a^۲)$$

است. بنابر قضیهٔ عاملها، این چندجمله‌ای بر $x - a$ بخش‌پذیر است. در واقع

$$x^۲ - bcdx + (b^۲ + c^۲ + d^۲) = (x - a)(x - (bcd - a))$$

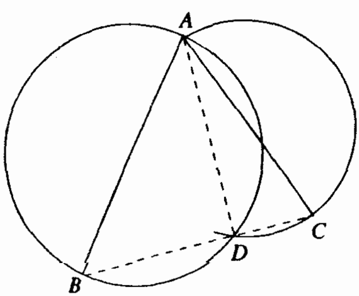
بنابراین $(bcd - a, b, c, d)$ جواب دیگری برای معادله است.

اگر $d \geqslant c \geqslant b \geqslant a \geqslant$ ۲، آنگاه $bcd - a \geqslant ۲a^۲ - a > a$. درنتیجه

$$(bcd - a) + b + c + d > a + b + c + d$$

اگر این کار را تکرار کنیم و a را کوچکترین مقدار در میان عددهای a، b، c و d بگیریم، زنجیره‌ای از جوابهای متمایز به‌دست می‌آید. اگر کار را با جواب (۲, ۲, ۲, ۲) شروع کنیم، جوابهای (۲, ۲, ۲, ۶)، (۲, ۲, ۶, ۲۲)، (۲, ۶, ۲۲, ۲۶۲)، (۶, ۲۲, ۲۶۲, ۳۴۵۸۲)، ...، را به‌دست می‌آوریم.

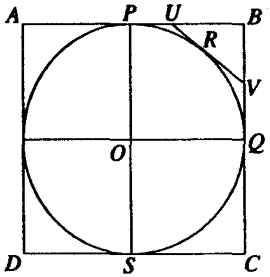
مسألهٔ ۲۴۹. فرض کنید $\angle BAC = ۶۰^\circ$ و BA ده فوت بلندتر از CA باشد. فرض کنید D نقطهٔ تقاطع دیگر دو دایره باشد (شکل ۱۶۱ را ببینید). چون AC قطر دایرهٔ ADC است، $CD \perp AD$. چون AB قطر دایرهٔ ADB است، $BD \perp AD$. پس B و C هر دو روی خطی عمود بر AD واقع‌اند. بنابراین فاصلهٔ D از امتداد BC برابر صفر است.



شکل ۱۶۱

مسألهٔ ۲۵۰. راه‌حل اول. یکی از دو ضلع برابر مثلث را قاعده بگیرید و فرض کنید ضلع دیگر در نیمدایره‌ای تاب بخورد. چون طول قاعدهٔ مثلث ثابت است، مساحت آن وقتی ماکسیمم می‌شود که طول ارتفاع ماکسیمم باشد، یعنی وقتی‌که دو ضلع برابر مثلث بر یکدیگر عمود باشند. بنابراین، مساحت مثلث وقتی ماکسیمم است که طول ضلع سوم $\sqrt{۲}$ برابر طول دو ضلع دیگر باشد.

راه‌حل دوم. طول دو ضلع برابر را a بگیرید و فرض کنید θ زاویهٔ بین این دو ضلع باشد. مساحت مثلث $\frac{1}{2}a^2\sin\theta$ است. این مقدار وقتی ماکسیمم می‌شود که $\theta = \frac{\pi}{2}$ و در این صورت طول ضلع سوم $a\sqrt{2}$ است.



شکل ۱۶۲

مسألهٔ ۲۵۱. راه‌حل اول. راه‌حل اول ما ملهم از این قضیه است که طول مماسهای رسم شده از نقطه‌ای خارج از دایره بر آن برابرند. در شکل ۱۶۲، $\overline{UP} = \overline{UR}$ و $\overline{VR} = \overline{VQ}$. بنابراین $\overline{UV} = \overline{PU} + \overline{VQ}$. اکنون عکس این مطلب را بیان و آن را اثبات می‌کنیم.

قضیه. فرض کنید $ABCD$ مربع باشد و P و Q به‌ترتیب نقطه‌های وسط AB و BC باشند. فرض کنید U و V نقطه‌هایی از پاره‌خطهای PB و BQ باشند به‌طوری‌که $\overline{UV} = \overline{PU} + \overline{VQ}$. در این صورت UV بر دایرهٔ محاطی مربع مماس است.

برهان. سه امکان برای پاره‌خط UV وجود دارد:

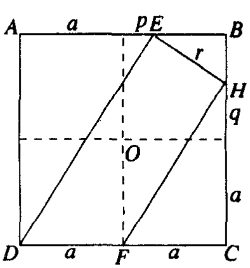
۱) دایرهٔ محاطی را قطع نکند؛

۲) بر دایرهٔ محاطی مماس باشد؛

۳) دایرهٔ محاطی را در دو نقطه قطع کند.

ثابت می‌کنیم حالتهای (۱) و (۳) پیش نمی‌آیند. فرض کنید یکی از این دو حالت برقرار باشد و پاره‌خط $U'V'$ را موازی با UV و مماس بر دایره رسم کنید. در این صورت، همان‌طور که قبلاً متذکر شدیم، $\overline{U'V'} = \overline{PU'} + \overline{V'Q}$. در حالت (۱)، $\overline{UV} < \overline{U'V'}$، $\overline{PU} > \overline{PU'}$، $\overline{QV} > \overline{QV'}$ که با فرضمان تناقض دارد. به‌همین ترتیب، در حالت (۳)، $\overline{UV} > \overline{U'V'}$، $\overline{PU} < \overline{PU'}$، $\overline{QV} < \overline{QV'}$ که باز هم با فرضمان تناقض دارد. بنابراین حالت (۲) باید صحیح باشد.

(برای ارائهٔ برهانی مستقیم می‌توان R را روی UV چنان انتخاب کرد که $\overline{PU} = \overline{UR}$ و $\overline{RV} = \overline{VQ}$، و سپس ثابت کرد که $\angle BUV = 2\angle URP$، $\angle BVU = 2\angle VRQ$، و در نتیجه $\angle PRQ = 135^\circ$ و، اگر S نقطهٔ وسط CD باشد، $PQRS$ چهارضلعیی محاطی است.)



شکل ۱۶۳

اکنون به مسألهٔ خودمان توجه می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\overline{DF} = a$، $\overline{AE} = a + p$، $\overline{CH} = a + q$ و $\overline{EH} = r$ (شکل ۱۶۳ را ببینید). چون $\triangle EAD$ با $\triangle FCH$ متشابه است، $\frac{\overline{CH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}$ و درنتیجه

$$\frac{2a}{a+p} = \frac{q+a}{a}$$

و بنابراین

$$q = \frac{a^2 - ap}{a+p}$$

اگر از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BEH استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$r^{۲} = (a-p)^{۲} + (a-q)^{۲} = (a-p)^{۲} + \left(\frac{۲ap}{a+p}\right)^{۲}$$
$$= \frac{(a^{۲}-p^{۲})^{۲} + ۴a^{۲}p^{۲}}{(a+p)^{۲}} = \frac{(a^{۲}+p^{۲})^{۲}}{(a+p)^{۲}}$$

بنابراین

$$r = \frac{a^{۲}+p^{۲}}{a+p} = p + \frac{a^{۲}-ap}{a+p} = p+q$$

اکنون از قضیهٔ ثابت شده استفاده کنید.

راه‌حل دوم. دایرهٔ محاطی مربع بر EH مماس است اگر و فقط اگر فاصلهٔ O (مرکز مربع) از EH برابر با a، یعنی شعاع دایره، باشد. این فاصله را می‌توان با تقسیم کردن دو برابر مساحت مثلث OEH بر طول EH به‌دست آورد. دستگاه مختصاتی در نظر بگیرید که مبدأ آن در نقطهٔ O باشد و محورهایش با ضلعهای مربع موازی باشند. در این صورت $E=(p,a)$، $H=(a,q)$ و مساحت $\triangle OEH$ برابر است با $\frac{a^{۲}-pq}{۲}$.

مانند راه‌حل اول، طول EH برابر $p+q$ است و $pq = a^{۲}-a(p+q)$. پس $a^{۲}-pq = a(p+q)$.
بنابراین فاصلهٔ O از EH برابر است با $\frac{a^{۲}-pq}{p+q}$ و حکم مسأله ثابت شده است.

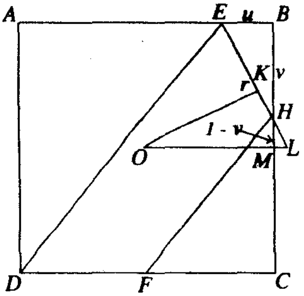
راه‌حل سوم. دستگاه مختصاتی را در نظر بگیرید که مانند راه‌حل دوم مبدأ آن نقطهٔ O باشد. معادلهٔ خطی که از E و H می‌گذرد چنین است

$$(a-q)x + (a-p)y = a^{۲} - pq$$

و فاصلهٔ مبدأ از این خط برابر است با (محاسبات مشابه راه‌حل اول است)

$$\frac{a^{۲}-pq}{\sqrt{(a-q)^{۲}+(a-p)^{۲}}} = \frac{a(p+q)}{p+q} = a$$

بنابراین فاصلهٔ O از EH با شعاع دایرهٔ محاطی برابر است.



شکل ۱۶۴

راه‌حل چهارم. (ا. مایکل تیرین) فرض کنید طول ضلع مربع ۲ باشد. فرض کنید $\overline{EB}=u$ و $\overline{BH}=v$. در این صورت $\overline{AE}=۲-u$ و $\overline{CH}=۲-v$. فرض کنید OK و OM عمودهایی باشند که از مرکز مربع، یعنی نقطهٔ O، به‌ترتیب بر EH و BC رسم شده‌اند. فرض کنید امتداد EH امتداد OM را در L قطع کند. (شکل ۱۶۴ را ببینید.) چون $\triangle AED \sim \triangle CFH$، پس

$$\overline{AE}\cdot\overline{CH} = \overline{AD}\cdot\overline{FC}$$

یعنی

$$(۲-u)(۲-v)=۲$$

و یا

$$uv-۲u-۲v+۲=۰$$

چون مثلثهای EBH و LKO متشابه‌اند، پس

$$\overline{EH}\cdot\overline{KO} \;=\; \overline{BH}\cdot\overline{LO}$$

چون $\overline{LO}=۱+\frac{u(۱-v)}{v}=\frac{u+v-uv}{v}$، پس

$$\overline{KO}^۲=\frac{v^۲\left(\frac{u+v-uv}{v}\right)^۲}{u^۲+v^۲}=\frac{(u+v-uv)^۲}{u^۲+v^۲}$$

$$=\frac{u^۲+v^۲+uv(uv-۲u-۲v+۲)}{u^۲+v^۲}=۱$$

بنابراین فاصلهٔ O از EH با فاصلهٔ O از ضلعی از مربع برابر است و نتیجه حاصل می‌شود.

ملاحظه. اگر تصویر متعامد کلِّ شکل را پیدا کنیم، معلوم می‌شود که نتیجهٔ زیر هم‌ارز حکم مسأله است. فرض کنید $ABCD$ متوازی‌الاضلاعی محیط بر بیضی باشد به‌طوری‌که نقاط تماس بیضی با متوازی‌الاضلاع نقاط وسط ضلعهای متوازی‌الاضلاع باشند. اگر F نقطهٔ وسط DC، H نقطه‌ای روی BC و E نقطه‌ای روی AB باشد به‌طوری‌که $DE \parallel FH$، آنگاه EH بر بیضی مماس است.

مسألهٔ ۲۵۲. راه‌حل اول. چون $a\log a=\log b$ و $b\log b=\log a$، پس

$$ab\log b=a\log a=\log b$$

بنابراین

$$(\log b)(ab-۱)=۰$$

در این صورت یا $\log b=۰$ و درنتیجه $b=۱$ و $a=b^b=۱^۱=۱$، و یا $a^{a+۱}=۱$. در حالت دوم a باید برابر با ۱ باشد (چون اگر a مثبت و مخالف ۱ باشد، گرفتن لگاریتم در مبنای a به برابری $a+۱=۰$ منجر می‌شود که درست نیست). بنابراین در هر دو حالت $a=b=۱$.

راه‌حل دوم. چون $a=b^b=a^{ab}$، یا $a=۱$ و $b=۱$، و یا $ab=۱$. اگر $a\neq ۱$ و $b\neq ۱$، می‌توانیم مثلاً فرض کنیم $a<۱$ و $b>۱$؛ در این صورت $b=a^a<۱$ که با شرط $b>۱$ تناقض دارد.

مسألهٔ ۲۵۳. فرض کنید عدد مطلوب x باشد. در این صورت به‌ازای عدد صحیحی مانند y،

$$x^۲=۱۰۰۰۰y+۹۰۰۹$$

به‌این ترتیب x باید به‌شکل $۱۰a\pm ۳$ باشد. بنابراین

$$۱۰۰a^۲\pm ۶۰a+۹=۱۰۰۰۰y+۹۰۰۹$$

درنتیجه

$$۲a(۵a \pm ۳) = ۱۰۰(۱۰y + ۹) \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲۵)$$

چون $۵a \pm ۳$ مضرب ۵ نیست، a باید مضرب ۲۵ باشد، و مثلاً $a = ۲۵b$؛ در این صورت،

$$b(۱۲۵b \pm ۳) = ۲۰y + ۱۸$$

در حالتی که $b(۱۲۵b + ۳) = ۲۰y + ۱۸$، b فقط در صورتی جواب معادله است که آخرین رقم سمت چپ این معادله ۸ باشد. کوچکترین مقدار ممکن b که به‌ازای آن y عددی صحیح باشد ۶ است:

$$۶ \times ۷۵۳ = ۲۰ \times ۲۲۵ + ۱۸$$

در حالتی که $b(۱۲۵b - ۳) = ۲۰y + ۱۸$، معلوم می‌شود که آخرین رقم b باید یا ۴ باشد یا ۹. اما اگر $b = ۴$ مقدار صحیحی برای y به‌دست نمی‌آید، در حالی که اگر $b = ۹$ آن‌وقت $y = ۵۰۴$.

بنابراین، $b = ۶$، $x = ۲۵۰b + ۳ = ۱۵۰۳$ و $x^۲ = ۲۲۵۹۰۰۹$.

ملاحظات. روشی منظمتر برای حل کردن این مسأله استفاده از همنهشتی است. اگر x همان ویژگی قبلی را داشته باشد،

$$x^۲ \equiv ۲۵۹ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۶۲۵)$$

بخصوص

$$x^۲ \equiv ۲۵۹ \equiv ۴ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$$

درنتیجه یا $x \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$ و یا $x \equiv ۳ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$. در حالت اول فرض کنید $x = ۵a + ۲$؛ درنتیجه

$$۲۵a^۲ + ۲۰a \equiv ۲۵۵ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۶۲۵)$$

و یا

$$۵a^۲ + ۴a \equiv ۵۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۲۵)$$

از حل معادلهٔ

$$۵a^۲ + ۴a \equiv ۵۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$$

معلوم می‌شود که به‌ازای bای $a = ۵b + ۱$. اگر کار را به همین طریق ادامه دهیم معلوم می‌شود که

$$x \equiv \pm ۲۵۳ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۶۲۵)$$

چون $x^۲ \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۶)$، باید $x \equiv \pm ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۸)$. بنابراین

$$x = ۶۲۵u + p = ۸v + r$$

$$= ۵۰۰۰w - ۶۲۴p + ۶۲۵r$$

که در آن $p = \pm ۲۵۳$ و $r = \pm ۱$. درنتیجه باید $x \equiv \pm ۲۲۴۷$ یا $\pm ۱۵۰۳ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵۰۰۰)$، و بنابراین می‌توانیم جواب مناسب را انتخاب کنیم.

(ثابت کنید کوچکترین مربعی که به ۰۰۹۰۰۹ ختم می‌شود این است $۱۲۶۵۰۳^۲ = ۱۶۰۰۳۰۰۹۰۰۹$.)

مسألهٔ ۲۵۴. فرض کنید $\overline{AB}=a$ و $\overline{FD}=b$. به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$\overline{AE}=\frac{x}{\sin\alpha},\qquad \overline{EF}=\frac{x}{\sin\beta}$$

و بنابراین

$$\overline{EB}=\frac{a\sin\alpha-x}{\sin\alpha},\qquad \overline{ED}=\frac{b\sin\beta-x}{\sin\beta}$$

از $\overline{EB}\cos\alpha=\overline{ED}\cos\beta$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{a\sin\alpha-x}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{b\sin\beta-x}{\sin\beta\cos\alpha}$$

از حل این معادله نسبت به x به‌دست می‌آوریم

$$x=\frac{a\cos\alpha-b\cos\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

مسألهٔ ۲۵۵. یکی از قانونهای کلی این است

$$\prod_{k=۲}^{n}\frac{۱-\frac{۱}{k^۳}}{۱+\frac{۱}{k^۳}}=\frac{۲}{۳}\left(۱+\frac{۱}{n(n+۱)}\right),\qquad n=۲,۳,۴,\cdots$$

برهان اول (به‌استقرا). به‌ازای $n=۲$ این برابری آشکارا برقرار است. فرض کنید به‌ازای $n=m$ برقرار باشد. در این صورت، وقتی‌که $n=m+۱$،

$$\prod_{k=۲}^{m+۱}\left(\frac{۱-\frac{۱}{k^۳}}{۱+\frac{۱}{k^۳}}\right)=\frac{۲}{۳}\left(۱+\frac{۱}{m(m+۱)}\right)\left(\frac{۱-\frac{۱}{(m+۱)^۳}}{۱+\frac{۱}{(m+۱)^۳}}\right)$$

$$=\frac{۲}{۳}\left(\frac{m^۲+m+۱}{m^۲+m}\right)\left(\frac{m^۳+۳m^۲+۳m}{(m+۲)(m^۲+m+۱)}\right)$$

$$=\frac{۲}{۳}\left(\frac{m^۲+۳m+۳}{(m+۱)(m+۲)}\right)$$

$$=\frac{۲}{۳}\left(۱+\frac{۱}{(m+۱)(m+۲)}\right)$$

و نتیجه به‌استقرا حاصل می‌شود.

برهان دوم (مستقیم). می‌توان نوشت

$$\prod_{k=۲}^{n}\left(\frac{۱-\frac{۱}{k^۳}}{۱+\frac{۱}{k^۳}}\right)=\prod_{k=۲}^{n}\left(\frac{k^۳-۱}{k^۳+۱}\right)=\left(\prod_{k=۲}^{n}\frac{k-۱}{k+۱}\right)\left(\prod_{k=۲}^{n}\frac{k^۲+k+۱}{k^۲-k+۱}\right)$$

$$=\frac{۲}{n(n+۱)}\left(\prod_{k=۲}^{n}(k^۲+k+۱)\right)\left(\prod_{k=۲}^{n}\frac{۱}{k^۲-k+۱}\right)$$

چون

$$\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2-k+1}\right)=\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(j+1)^2-(j+1)+1}\right)$$
$$=\prod_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{j^2+j+1}\right)$$

حاصل‌ضرب مورد نظر برابر است با

$$\frac{2}{n(n+1)}\left(\prod_{k=2}^{n}(k^2+k+1)\right)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)\right)$$
$$=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

(اگر درک حاصل‌ضربهای بالا برایتان مشکل است، آنها را به‌ازای مقادیر کوچکی از n مانند ۴ یا ۵ به‌طور کامل بنویسید تا محتوای این نمادگذاریها را بفهمید.)

مسألهٔ ۲۵۶. روشن است که

$$x^n-n(x-1)-1=x^n-1-n(x-1)$$
$$=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-n(x-1)$$
$$=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1-n)$$

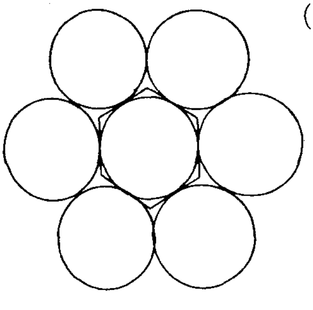
عامل دوم به‌ازای $x=1$ برابر ۰ و بنابراین بر $x-1$ بخش‌پذیر است. به این ترتیب حکم را ثابت کرده‌ایم.

در واقع با انجام «تقسیم طولانی» عامل دوم بر $x-1$ به‌دست می‌آوریم

$$x^n-n(x-1)-1=(x-1)^2(x^{n-2}+2x^{n-3}+\cdots+(n-2)x+n-1)$$

مسألهٔ ۲۵۷. چون هر درایهٔ جدول مجموع اعداد صحیحی است که بالای ستون آن درایه و سمت چپ سطر مربوط به‌آن درایه نوشته شده‌اند، مجموع هر شش درایه (که هیچ دو تایی از آنها در یک سطر یا یک ستون نباشند) برابر است با مجموع اعدادی که در بالای ستونها و سمت چپ سطرها نوشته شده‌اند، یعنی برابر است با

$$(1+9+3+2+4+8)+(2+7+3+5+8+7)=59$$



شکل ۱۶۵

مسألهٔ ۲۵۸. اگر شش‌ضلعی منتظم محیطی هر یک از دایره‌ها را رسم کنیم، دایره‌ها و شش‌ضلعیها الگوی یکنواختی دارند و سطح شش‌ضلعیها کلِّ صفحه را می‌پوشاند (شکل ۱۶۵ را ببینید). بنابراین، درصد مطلوب برابر است با نسبت مساحت هر یک از دایره‌ها به مساحت شش‌ضلعی منتظم محیطی آن دایره، یعنی $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}=\frac{\pi}{6/\sqrt{3}}$ یا حدود ٪۹۱.

مسألهٔ ۲۵۹. از $a + b\sqrt{2} = -c\sqrt{3}$ نتیجه می‌شود $a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 3c^2$ و درنتیجه

$$2\sqrt{2}ab = 3c^2 - a^2 - 2b^2$$

چون $\sqrt{2}$ گنگ است، باید $ab = 0$ و $3c^2 - a^2 - 2b^2 = 0$. اگر $a = 0$، آنگاه $2b^2 = 3c^2$، و درنتیجه، چون $\sqrt{\frac{3}{2}}$ گنگ است، $b = c = 0$. اگر $b = 0$، آنگاه $3c^2 = a^2$ و درنتیجه $a = c = 0$.

تبصره. الف) ثابت کنید تنها عددهای صحیح مانند a، b، c و d که به‌ازای آنها

$$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{5} = 0$$

عبارت‌اند از $a = b = c = d = 0$.

ب) آیا از $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$ نیز نتیجهٔ مشابهی حاصل می‌شود؟

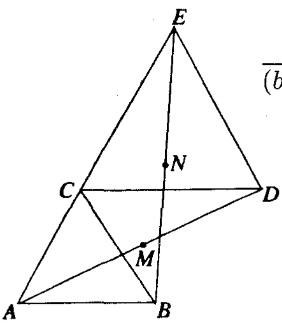
مسألهٔ ۲۶۰. توجه کنید که اگر $xyz \neq 0$، آنگاه $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2$ هم‌ارز است با $yz + zx + xy = 0$ که خود هم‌ارز است با $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. چون آخرین شرط بیان شده به‌ازای

$$x = \frac{1}{b-c}, \qquad y = \frac{1}{c-a}, \qquad z = \frac{1}{a-b}$$

برقرار است، نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2} = \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right)^2$$

و البته عدد درون پرانتز عددی گویاست.



شکل ۱۶۶

مسألهٔ ۲۶۱. دوران 60° در جهت پادساعتگرد حول C، نقطهٔ A را به B و نقطهٔ D را به E، و بنابراین پاره‌خط AD را به پاره‌خط BE و نقطهٔ M را به نقطهٔ N می‌برد. بنابراین $\angle MNC = 60^\circ$ و $CM = CN$ و نتیجه حاصل می‌شود (شکل ۱۶۶ را ببینید).

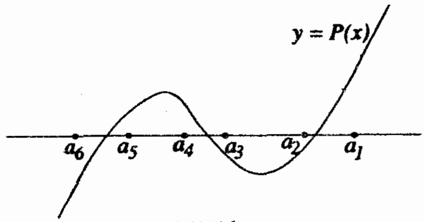
مسألهٔ ۲۶۲. چندجمله‌ای مفروض را به $P(x)$ نشان می‌دهیم. در این صورت

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_3)(x - a_5) + (x - a_2)(x - a_4)(x - a_6)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} P(x) &> 0, & x &> a_1 \\ P(x) &< 0, & a_3 < x &< a_2 \\ P(x) &> 0, & a_5 < x &< a_4 \\ P(x) &< 0, & x &< a_6 \end{aligned}$$

چون $P(x)$ پیوسته است، سه ریشه حقیقی متمایز دارد. (شکل ۱۶۷ را ببینید.)



شکل۱۶۷

مسألهٔ ۲۶۳. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} 4n^3+6n^2+4n+1 &= (n+1)^4-n^4 \\ &= \{(n+1)^2-n^2\}\{(n+1)^2+n^2\} \\ &= (2n+1)\{(n+1)^2+n^2\} \end{aligned}$$

مسألهٔ ۲۶۴. حاصل‌ضرب درایه‌های هر سطر، ستون و یا قطر برابر با k است؛ بخصوص،

$$aei = beh = ceg = k$$

درنتیجه $a=\frac{k}{ei}$، $b=\frac{k}{eh}$ و $c=\frac{k}{eg}$. بنابراین

$$k = abc = \frac{k}{ei}\cdot\frac{k}{eh}\cdot\frac{k}{eg} = \frac{k^3}{e^3ghi} = \frac{k^3}{e^2k}$$

یعنی $k=e^3$، و k مکعب کامل است.

مسألهٔ ۲۶۵. در جدول زیر نشان داده شده است که اگر یکی از چهار نفر مجرم باشد، جمله‌های بیان شده راست‌اند یا دروغ.

جملهٔ بیان شده توسط

مجرم	اکبر	بهرام	پدرام	تیمور
اکبر	دروغ	راست	دروغ	راست
بهرام	دروغ	دروغ	دروغ	راست
پدرام	راست	راست	دروغ	راست
تیمور	دروغ	راست	راست	دروغ

بنابراین، در حالت (الف) بهرام مجرم است و در حالت (ب) پدرام.

مسألهٔ ۲۶۶. فرض کنید بتوان تاسها را به‌گونهٔ بیان شده دستکاری کرد. هر یک از ۱۱ پیشامد بیان شده با احتمال $p=\frac{1}{11}$ روی می‌دهد. ۲ در صورتی به‌دست می‌آید که هر دو تاس ۱ بنشینند؛ به‌همین ترتیب، ۱۲ در صورتی به‌دست می‌آید که هر دو تاس ۶ بنشینند.

فرض کنید احتمال اینکه تاسها ۱ بنشینند u و v احتمال اینکه ۶ بنشینند به‌ترتیب x و y باشد. در این صورت $p = uv = xy$. برای اینکه ۷ به‌دست آید باید یکی از تاسها ۱ و دیگری شش بنشیند. بنابراین احتمال به‌دست آوردن ۷ برابر است با

$$p \geqslant uy + vx = u\left(\frac{p}{x}\right) + \left(\frac{p}{u}\right)x = p\left(\frac{u}{x} + \frac{x}{u}\right) \geqslant ۲p$$

(برقراری نابرابری آخر به‌این دلیل است که به‌ازای $a > ۰$، $a + \frac{۱}{a} \geqslant ۲$.)

از این تناقض معلوم می‌شود که نمی‌توان تاسها را طوری دستکاری کرد که همهٔ پیشامدها هم‌احتمال باشند.

تبصره. آیا می‌توانید تاسها را طوری دستکاری کنید که همهٔ پیشامدها غیر از یکی از آنها هم‌احتمال باشند؟

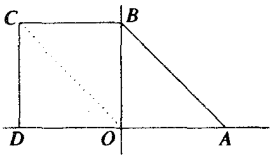
مسألهٔ ۲۶۷. الف) به‌خاطر آورید که اگر $u \geqslant ۰$، $|u| = u$ و اگر $u \leqslant ۰$، $|u| = -u$، و بنابراین $|u| = |-u|$. پس ناحیهٔ R که با رابطهٔ

$$|x| + |y| + |x + y| \leqslant ۲ \qquad (۱)$$

مشخص می‌شود نسبت به مبدأ متقارن است، یعنی اگر (a, b) در R باشد، $(-a, -b)$ نیز در R است؛ بنابراین، کافی است رابطهٔ (۱) را به‌ازای $y \geqslant ۰$ بررسی کنیم.

در ربع $x \geqslant ۰$ و $y \geqslant ۰$، $x + y \geqslant ۰$ و رابطهٔ (۱) به

$$x + y + (x + y) \leqslant ۲$$


شکل ۱۶۸

تبدیل می‌شود؛ بخشی از ناحیهٔ R که در این ربع قرار دارد با رابطه‌های زیر مشخص می‌شود:

$$x \geqslant ۰, \quad y \geqslant ۰, \quad x + y \leqslant ۱$$

این ناحیه همان مثلث AOB در شکل ۱۶۸ است.

در ربع $x \leqslant ۰$ و $y \geqslant ۰$، یا (۱) $x + y \geqslant ۰$، و یا (۲) $x + y \leqslant ۰$. در حالت (۱)، $-x + y + x + y \leqslant ۲$، یعنی $y \leqslant ۱$ و درنتیجه

$$x \leqslant ۰, \quad ۰ \leqslant y \leqslant ۱, \quad x + y \geqslant ۰$$

(و در واقع $x \geqslant -۱$) و این رابطه‌ها مثلث BOC را مشخص می‌کنند. در حالت (۲)، $-x + y - (x + y) \leqslant ۲$، یعنی $x \geqslant -۱$ و درنتیجه

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۰, \quad y \geqslant ۰, \quad x + y \leqslant ۰$$

(و در واقع $y \leqslant ۱$) که مثلث COD را مشخص می‌کنند.

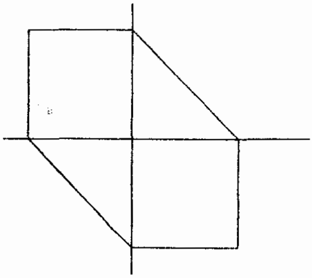
(در واقع، از ارزیابی دقیقتر نابرابریها معلوم می‌شود که

$$x \leqslant ۰, \quad y \geqslant ۰, \quad |x| + |y| + |x + y| \leqslant ۲$$

هم‌ارزند با

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۰\ , \quad ۰ \leqslant y \leqslant ۱$$

که مربع $OBCD$ را مشخص می‌کنند.)



شکل ۱۶۹

نیمهٔ پایینی R از انعکاس نیمهٔ بالایی آن (شکل ۱۶۸) نسبت به مبدأ (یعنی دوران ناحیهٔ شکل ۱۶۸ حول O) به‌دست می‌آید. R ناحیهٔ محدود به شش‌ضلعی شکل ۱۶۹ و مساحتش ۳ است.

ب) بررسی حالتها مانند قسمت قبل است، ولی حالتهای بیشتری را باید در نظر گرفت. مانند قسمت قبل، ناحیهٔ R که با

$$|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \leqslant ۲ \qquad (۲)$$

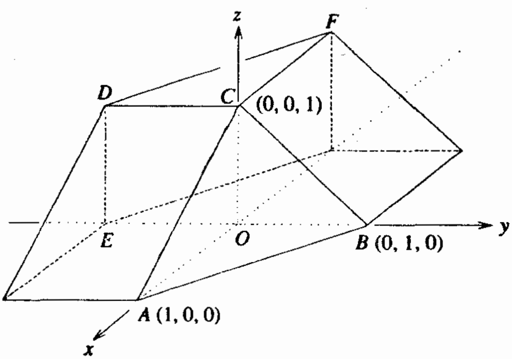
مشخص می‌شود نسبت به O متقارن است، یعنی اگر (a, b, c) در ناحیهٔ R باشد، نقطهٔ $(-a, -b, -c)$ نیز در R است و می‌توانیم توجه خود را بر چهار یک‌هشتم بالایی، که در آنها $z \geqslant ۰$، متمرکز کنیم.

در اینجا نیم‌نگاهی به چهار یک‌هشتم بالایی می‌اندازیم؛ جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

$x \geqslant ۰$، $y \geqslant ۰$، $z \geqslant ۰$. این رابطه‌ها همراه با (۲) هم‌ارزند با

$$x \geqslant ۰, \quad y \geqslant ۰, \quad z \geqslant ۰, \quad x + y + z \leqslant ۱$$

و این رابطه‌ها چهاروجهی $OABC$ را (شکل ۱۷۰)، به حجم $\frac{۱}{۶}$، مشخص می‌کنند.



شکل ۱۷۰

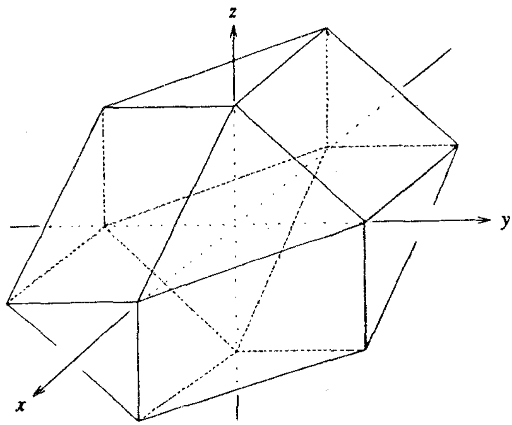
$x \geqslant ۰$، $y \leqslant ۰$، $z \geqslant ۰$. اینها همراه با (۲) هم‌ارزند با

$$۰ \leqslant x \leqslant ۱, \quad -۱ \leqslant y \leqslant ۰, \quad z \geqslant ۰, \quad x + z \leqslant ۱$$

که گوه‌ای را (یعنی نصف مکعبی که AD قطر آن است) به حجم $\frac{۱}{۲}$ مشخص می‌کنند.

$x \leqslant ۰$، $y \leqslant ۰$، $z \geqslant ۰$. اینها همراه با (۲) هم‌ارزند با

$$-۱ \leqslant x \leqslant ۰, \quad -۱ \leqslant y \leqslant ۰, \quad ۰ \leqslant z \leqslant ۱, \quad x + y \geqslant -۱$$



شکل۱۷۱

که گوه‌ای را (یعنی نصف مکعبی که EF قطر آن است) به حجم $\frac{۱}{۲}$ مشخص می‌کنند.

نیمهٔ پایینی R از انعکاس نیمهٔ بالایی آن نسبت به O به‌دست می‌آید. ناحیهٔ فضایی R در شکل ۱۷۱ نشان داده شده است. حجم این ناحیه برابر است با

$$۲\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱۰}{۳}$$

مسألهٔ ۲۶۸. راه‌حل اول. (با استفاده از اصل شمول و عدم شمول) با فرض اینکه جای قرار دادن گوشواره‌ها در جعبه یکسان و یکی ازگوشواره‌ها «نشان» باشد، ۱۲۰ = !۵ راه برای قرار دادن ۵ گوشوارهٔ دیگر در جعبه بدون هیچ محدودیتی وجود دارد. اگر بخواهیم یک جفت گوشوارهٔ مشخص مجاور هم باشند، برای قرار دادن ۴ گوشوارهٔ دیگر !۴ راه وجود دارد. اما در هر یک از این راهها، می‌توانیم جای دو گوشوارهٔ هر جفت را با هم عوض کنیم. بنابراین، تعداد کلِّ راههای قرار دادن گوشواره‌ها در جعبه با این شرط که یک جفت گوشوارهٔ مشخص مجاور هم باشند ۴۸ = !۴ × ۲ است.

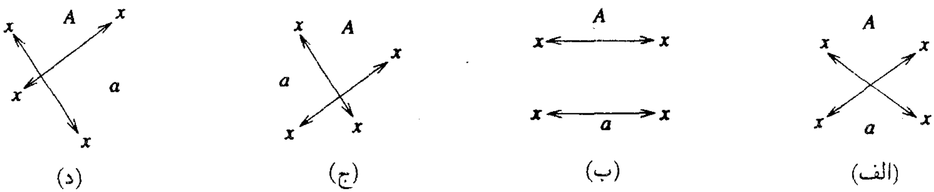
برای اینکه دو جفت مشخص کنار هم باشند ۲۴ = !۳ × ۲^{۲} راه وجود دارد، چون اگر یکی از این جفتها را نشان بگذاریم، !۳ راه برای آرایش ۳ واحد مرکب از جفت دیگر و دو گوشوارهٔ تکی دیگر وجود دارد. (عامل ۲^{۲} به‌این دلیل آمده است که می‌توانیم در هر یک از دو جفت مشخص شده جای گوشواره‌ها را با یکدیگر عوض کنیم.)

سرانجام برای قرار دادن گوشواره‌ها به‌طوری که هرگوشواره‌ای کنار جفت خود باشد ۱۶ = !۲ × ۲^{۳} راه وجود دارد.

بنابراین اصل شمول و عدم شمول، تعداد آرایشهایی که در آنها هیچ گوشواره‌ای کنار جفت خود نباشد برابر است با

$$۱۲۰-۳\times ۴۸+۳\times ۲۴-۱۶=۳۲$$

راه‌حل دوم. فرض کنید سه جفت گوشواره (A,a)، (B,b) و (C,c) باشند. A را نشان می‌گذاریم.



شکل ۱۷۲

نمودار ۱۷۲ انواع گوناگون آرایشها را نشان می‌دهد؛ پیکانهای دوگانه دو لنگهٔ هر جفت گوشواره را به‌هم مرتبط می‌کنند.

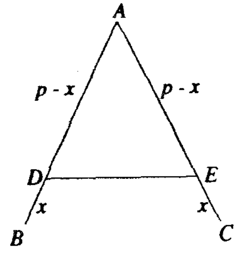
۴ راه برای آرایش گوشواره‌ها به‌طوری که B یا b سمت چپ A باشد، و ۴ راه برای آرایش گوشواره‌ها به‌طوری که B یا b سمت راست A باشد وجود دارد. این نوع آرایش را به ۸ راه می‌توان ترتیب داد (شکل ۱۷۲ ـ الف را ببینید).

۴ راه برای آرایش گوشواره‌ها به‌طوری که A بین B و b باشد، و ۴ راه برای آرایش گوشواره‌ها به‌طوری که A بین C و c باشد وجود دارد. بازهم این نوع آرایش را به ۸ راه می‌توان ترتیب داد (شکل ۱۷۲ ـ ب را ببینید).

به‌طور مشابه، هریک از انواع آرایشهای شکلهای ۱۷۲ (ج) و ۱۷۲ (د) را به ۸ راه می‌توان ترتیب داد. بنابراین، روی هم‌رفته ۳۲ نوع آرایش وجود دارد که در آنها دو لنگهٔ هیچ جفت گوشواره‌ای کنار هم نیستند.

تبصره. همین مسأله را در حالتی که به‌جای ۳ جفت گوشواره n جفت بگذاریم حل کنید.

مسألهٔ ۲۶۹. در ازای هر مسیر، مسیر دیگری وجود دارد که نسبت به نیمساز $\angle BAC$ قرینهٔ مسیر اول است و پیمودن آن دست‌کم در همان مدت زمانی که مسیر اول پیموده می‌شود ممکن است. (به‌این دلیل که هر مسیر مانند μ باید دست‌کم یک بار این نیمساز را در نقطه‌ای مانند G قطع کند. فرض کنید بخشی از μ را که بین B و C واقع است بتوان دست‌کم در همان مدت زمانی که می‌توان بخش بین G و C از آن را طی کرد پیمود. در این صورت، اگر به‌جای بخش بین G و C از μ، تصویر آینه‌ای بخش بین B و G از آن را قرار دهیم، مسیری مانند γ حاصل می‌شود که بهتر از مسیر μ است. اگر برای پیمودن بخش دوم μ مدت زمان کوتاهتری لازم باشد، بازهم می‌توان رویهٔ مشابهی را برگزید.)



شکل ۱۷۳

بنابراین، فقط لازم است مسیرهای متقارن نسبت به نیمساز $\angle BAC$ را در نظر بگیریم. چون کوتاهترین مسیر بین دو نقطه خط مستقیم بین آنهاست، مناسبترین مسیر از نوع مسیری است که در شکل ۱۷۳ نشان داده شده است، و در آن $AD = AE$ و $BD = CE$. فرض کنید $\overline{BD} = x$. چون $\overline{AB} = p$ و $\overline{BC} = q$، و مثلثهای ADE و ABC متشابه‌اند، پس

$$\overline{DE} = \frac{(p-x)q}{p}$$

$t(x)$، زمانی که برای پیمودن مسیر $BDEC$ لازم است، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$t(x) = \frac{۲x}{v} + \frac{(p-x)q}{pw} = \left(\frac{۲}{v} - \frac{q}{pw}\right)x + \frac{q}{w}$$

وقتی‌که $\frac{۲}{v} - \frac{q}{pw} \geqslant ۰$، t تابعی صعودی از x است، و درنتیجه کمترین زمان به‌ازای $x = ۰$ حاصل می‌شود.

وقتی‌که $\frac{۲}{v} - \frac{q}{pw} \leqslant ۰$، t تابعی نزولی از x است، و درنتیجه کمترین زمان به‌ازای $x = p$ حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۲۷۰. راه‌حل اول. فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ با این ویژگی وجود داشته باشد. با توجه به اینکه $\log x$ تابعی صعودی است (یعنی اگر $۰ < u < v$، $\log u < \log v$) و $\log x < x$ (بنابر تعریف تابع لگاریتم)،

$$p(n) < n \log n < n^۲$$

درنتیجه درجهٔ چندجمله‌ای $p(x)$ حداکثر ۲ است (استدلالی برای این حکم در انتهای این راه‌حل درون کروشه داده شده است).

روشن است که $p(x)$ نه ثابت است نه خطی. فقط بررسی حالتی که $p(x)$ چندجمله‌ایی درجهٔ دوم باشد باقی می‌ماند. در این حالت از $p(۱) = \log ۱ = ۰$ نتیجه می‌گیریم که

$$p(x) = (x-۱)(ax+b)$$

از محاسبهٔ این چندجمله‌ای در $x = ۲$ و $x = ۴$ به‌دست می‌آوریم

$$\log ۲ = p(۲) = ۲a + b$$

$$\log ۲۴ = p(۴) = ۳(۴a + b)$$

با حل این دستگاه دو معادله به‌دست می‌آوریم

$$a = \frac{۱}{۶}\log ۳, \qquad b = \log ۲ - \frac{۱}{۳}\log ۳$$

بنابراین

$$p(x) = (x-۱)\left(\frac{x\log ۳}{۶} + \log ۲ - \frac{۱}{۳}\log ۳\right)$$

و درنتیجه

$$\log ۲ + \log ۳ = p(۳) = ۲\left(\frac{۳\log ۳}{۶} + \log ۲ - \frac{۱}{۳}\log ۳\right)$$

یعنی $۲\log ۳ = ۲\log ۲$، و یا $۳^۲ = ۲^۳$، که تناقض است.

[در اینجا ثابت می‌کنیم که چرا چندجمله‌ای

$$p(x) = a_۰ x^m + a_۱ x^{m-۱} + \cdots + a_m$$

از درجهٔ m، $m \geqslant ۱$، این ویژگی را دارد که به‌ازای xهای به اندازهٔ کافی بزرگ،

$$|p(x)| > x^{m-۱}$$

ابتدا $p(x)$ را به‌شکل زیر بنویسید

$$p(x) = a_{۰} x^m \left(۱ + \frac{b_۱}{x} + \frac{b_۲}{x^۲} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}\right)$$

اگر x را به‌اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم، مطمئن خواهیم بود که عبارت درون پرانتز بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ است، و در این صورت

$$|p(x)| > \frac{۱}{۲}|a_{۰}|x^m$$

اکنون x را به‌قدری بزرگ انتخاب کنید که $۱ < \frac{x|a_{۰}|}{۲}$؛ در این صورت،

$$|p(x)| > x^{m-۱}$$

درنتیجه اگر به‌ازای xهای بزرگ $p(x) < x^۲$، آنگاه $m \leqslant ۲$.]

راه‌حل دوم. فرض کنید

$$\log n! = p(n) = \sum_{r=۰}^{m} a_r n^r, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

(که در آن $a_m \neq ۰$) در این صورت

$$\log(n+۱)! = \sum_{r=۰}^{m} a_r (n+۱)^r$$

درنتیجه

$$\log(n+۱) = \sum_{r=۰}^{m} a_r (n+۱)^r - \sum_{r=۰}^{m} a_r n^r$$

و درجهٔ چندجمله‌ای سمت راست این برابری از $m - ۱$ بیشتر نیست. بنابر مسألهٔ ۱۲۳، $\log x$ را نمی‌توان به‌شکل چندجمله‌ای نوشت. بنابراین به تناقض رسیده‌ایم و نتیجه حاصل می‌شود.

ملاحظه. در اینجا به‌طور خلاصه استدلال دیگری برای اینکه $\log n$ را نمی‌توان به‌شکل چندجمله‌ایی از n نوشت بیان می‌کنیم. اگر $\log n = b_r n^r + b_{r-۱} n^{r-۱} + \cdots + b_۱ n + b_۰$ و $n = e^p$ آنگاه

$$p = b_r e^{pr} + b_{r-۱} e^{p(r-۱)} + \cdots + b_۰$$

و بنابراین

$$\frac{p}{e^{pr}} = b_r + b_{r-۱} e^{-p} + \cdots$$

وقتی $p \to \infty$، طرف چپ این برابری به صفر و طرف راستش به b_r میل می‌کند و این تناقض است.

مسألهٔ ۲۷۱. ابتدا ببینیم که با بررسی مقادیر $f(n)$ به‌ازای nهای کوچک به نکتهٔ سودمندی پی می‌بریم یا نه (جدول ۳ را ببینید).

جدول ۳

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f(n)$	۱	۳	۸	۲۲	۶۵	۲۰۹	۷۳۲
$\frac{f(n+۱)}{f(n)}$	۳	$\frac{۸}{۳} \doteq ۲٫۶۶$	$\frac{۲۲}{۸} \doteq ۲٫۷۵$	$\frac{۶۵}{۲۲} \doteq ۲٫۹۵$	$\frac{۲۰۹}{۶۵} \doteq ۳٫۲۲$	$\frac{۷۳۲}{۲۰۹} \doteq ۳٫۵۰$	

به نظر می‌رسد که $\frac{f(۳)}{f(۲)} = \frac{۸}{۳}$ مینیمم مورد نظر است. راهی برای اثبات این حدس این است که ثابت کنیم $\frac{f(n+۱)}{f(n)} > ۳$، $n = ۵, ۶, ۷, \cdots$. در واقع، به‌ازای $n \geqslant ۶$،

$$\begin{aligned}
f(n+۱) &= ۱^{n+۱} + ۲^{n} + ۳^{n-۱} + \cdots + n^{۲} + (n+۱) \\
&> ۱^{n+۱} + ۲^{n} + ۳^{n-۱} + ۴^{n-۲} + ۵^{n-۳} + ۶^{n-۴} + \cdots + (n-۱)^{۳} + n^{۲} \\
&> ۱^{n+۱} + ۲^{n} + ۳^{n-۱} + ۴^{n-۲} + ۵^{n-۳} \\
&\qquad + ۳(۶^{n-۵} + ۷^{n-۶} + \cdots + (n-۱)^{۲} + n) \\
&= ۱^{n+۱} + ۲^{n} + ۳^{n-۱} + ۴^{n-۲} + ۵^{n-۳} \\
&\qquad + ۳(f(n) - ۱^{n} - ۲^{n-۱} - ۳^{n-۲} - ۴^{n-۳} - ۵^{n-۴}) \\
&= ۳f(n) + ۲(۵^{n-۴} - ۱) + ۲^{n-۱}(۲^{n-۵} - ۱) > ۳f(n)
\end{aligned}$$

مسألهٔ ۲۷۲. پنج راه برای تعبیر $a^{b^{c^d}}$ وجود دارد که در هر یک از آنها a به توانی رسیده است:

$$a^{(b^{(c^d)})};\quad a^{((b^c)^d)} = a^{(b^{cd})};\quad (a^b)^{(c^d)} = a^{(bc^d)};$$

$$\left((a^b)^c\right)^d = a^{bcd};\quad \left(a^{(b^c)}\right)^d = a^{(b^c d)}$$

چون وقتی a، x و y بزرگتر از ۱ هستند، $a^x \leqslant a^y$ اگر و فقط اگر $x \leqslant y$، باید bcd، $b^c d$، bc^d، b^{cd} و $b^{(c^d)}$ را با یکدیگر مقایسه کنیم.

توجه کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n \geqslant ۲$، $b^{n-۱} \geqslant ۲^{n-۱} \geqslant n$. می‌توان از این مطلب استفاده و ثابت کرد

$$bcd \leqslant b^c d \leqslant b^{cd} \leqslant b^{(c^d)},\quad bcd \leqslant bc^d$$

فقط بررسی جفتهای $(b^c d, bc^d)$، (bc^d, b^{cd}) و $(bc^d, b^{(c^d)})$ باقی می‌ماند. $b^c d$ و bc^d در نابرابری کلی صدق نمی‌کنند؛ مثالهای $۲^۲ \times ۳ > ۲ \times ۳^۲$ و $۲^۳ \times ۲ < ۳ \times ۲^۲$ دلیل درستی این ادعا هستند. مانند قبل، $bc^d \leqslant b^{c^d}$.

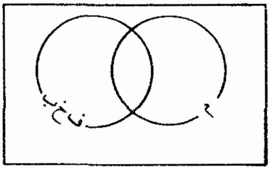
باقی می‌ماند که ثابت کنیم $bc^d \leqslant b^{cd}$. از استقرا روی d استفاده می‌کنیم. به‌ازای $d = ۱$ درستی

نابرابری روشن است. اگر $bc^d \leqslant b^{cd}$، آنگاه

$$bc^{d+۱} = cbc^d \leqslant cb^{cd} \leqslant b^c b^{cd} = b^{c(d+۱)}$$

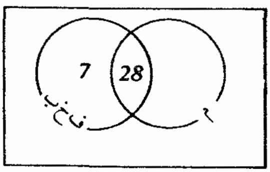
تبصره. چه موقع بین جفتهای مختلف برابری برقرار است؟

مسألهٔ ۲۷۳. اطلاعات بیان شده را به‌خوبی می‌توان با نمودار وِن نمایش داد. در شکل ۱۷۴ فرض کنید کلِّ جمعیت درون مستطیل ۱۰۰۰ نفر باشد.



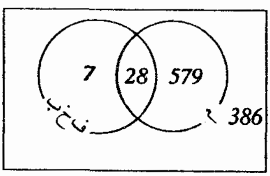
شکل ۱۷۴

در شکل ۱۷۴، دایرهٔ سمت چپ که با «ف‌خ‌ب» مشخص شده است شامل افرادی است که فشار خون بالا دارند و دایرهٔ سمت راست که با «م» مشخص شده است شامل افرادی است که مشروبات الکلی می‌نوشند. از ۳۵ نفری که فشار خون بالا دارند، $۲۸ = ۳۵ \times ۰/۸$ نفر مشروبات الکلی می‌نوشند و $۷ = ۳۵ - ۲۸$ نفر مشروبات الکلی نمی‌نوشند. بنابراین مانند شکل ۱۷۵، عددهای ۲۸ و ۷ را درون دایره‌ها می‌نویسیم.



شکل ۱۷۵

$۹۶۵ = ۱۰۰۰ - ۳۵$ نفر باقی‌مانده که فشار خون عادی دارند به دو دسته تقسیم می‌شوند: کسانی که مشروبات الکلی می‌نوشند ـ $۵۷۹ = ۹۶۵ \times ۰/۶$ نفر ـ و کسانی که مشروبات الکلی نمی‌نوشند ـ $۳۸۶ = ۹۶۵ - ۵۷۹$ نفر. نمودار کامل شده در شکل ۱۷۶ نشان داده شده است. اکنون درصد افرادی را که مشروبات الکلی می‌نوشند و فشار خون بالا دارند حساب می‌کنیم:



شکل ۱۷۶

$$۱۰۰ \times \frac{۲۸}{۲۸ + ۵۷۹} = \%۴/۶$$

مسألهٔ ۲۷۴. ابتدا آخرین عدد، یعنی s_n را انتخاب کنید. سه امکان وجود دارد: n، $n-۱$ و $n-۲$. پس از انتخاب s_n، سه راه برای انتخاب $s_{n-۱}$ از بین عددهایی از n، $n-۱$، $n-۲$ و $n-۳$ که به‌عنوان s_n انتخاب نشده‌اند وجود دارد. به‌همین ترتیب، پس از انتخاب s_n و $s_{n-۱}$، سه راه برای انتخاب $s_{n-۲}$ وجود دارد. می‌توانیم کار را به‌همین ترتیب ادامه دهیم و هر s_i را از بین سه عدد ممکن انتخاب کنیم تا $s_۳$ انتخاب شود؛ اکنون فقط $s_۲$ و $s_۱$ باید تعیین شوند. فقط دو امکان برای $s_۲$ وجود دارد و با تعیین $s_۲$ لزوماً $s_۱$ نیز تعیین می‌شود. بنابراین، تعداد آرایشهایی که در شرایط مورد نظر صدق می‌کنند برابر است با

$$\underbrace{۳ \times ۳ \times ۳ \times \cdots \times ۳}_{n-۲\ \text{تا}} \times ۲ \times ۱ = ۳^{n-۲} \times ۲!$$

تبصره. اگر بخواهیم شرط $s_k \geqslant k-m$ $(k=۱,۲,\cdots,n)$، که در آن m عددی ثابت است، برقرار باشد جواب چیست؟

مسألهٔ ۲۷۵. راه‌حل اول. چون $(b-c)^۲+(c-a)^۲+(a-b)^۲ \geqslant ۰$ و $a+b+c>d$، پس

$$\begin{aligned} ۳(a^۲+b^۲+c^۲) &= (a^۲+b^۲+c^۲)+۲(a^۲+b^۲+c^۲) \\ &\geqslant (a^۲+b^۲+c^۲)+۲(bc+ca+ab) \\ &= (a+b+c)^۲ > d^۲ \end{aligned}$$

راه‌حل دوم. $(n+۱)$ضلعی دلخواهی را که لزوماً مسطح نیست و ممکن است خودش را نیز قطع کند و طول ضلعهایش $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و $a_{n+۱}$ هستند در نظر بگیرید. بنابر نابرابری هولدر، به‌ازای هر m، $m>۱$،

$$(a_۱^m+a_۲^m+\cdots+a_n^m)^{\frac{۱}{m}}(۱+۱+\cdots+۱)^{۱-\frac{۱}{m}} \geqslant a_۱+a_۲+\cdots+a_n$$

که در آن برابری برقرار است اگر و فقط اگر $a_۱=a_۲=\cdots=a_n$. چون بنابر نابرابری مثلثی بسط یافته،

$$a_۱+a_۲+\cdots+a_n \geqslant a_{n+۱}$$

پس

$$a_۱^m+a_۲^m+\cdots+a_n^m \geqslant \frac{a_{n+۱}^m}{n^{m-۱}}$$

و برابری فقط وقتی برقرار است که $a_۱=a_۲=\cdots=a_n=\frac{a_{n+۱}}{n}$، که در این حالت چندضلعی تباهیده است.

اگر $m=۲$ و $n=۳$، به همان چیزی می‌رسیم که حکم مسأله است. (مسألهٔ ۴۶۶ را هم ببینید.)

مسألهٔ ۲۷۶. فرض کنید عددهای انتخاب شده را به‌ترتیب صعودی نامگذاری کرده باشیم، یعنی

$$a_۱<a_۲<a_۳<\cdots<a_۸$$

اگر هیچ سه عددی از هفت عدد صحیح

$$a_۲-a_۱,\ \ a_۳-a_۲,\ \ a_۴-a_۳,\ \ \cdots,\ a_۸-a_۷$$

برابر نباشند، حداکثر دو تا از آنها برابر ۱ هستند، حداکثر دو تا از آنها برابر ۲ هستند، و غیره. بنابراین، چون

$$a_۸-a_۱=(a_۲-a_۱)+(a_۳-a_۲)+(a_۴-a_۳)+\cdots+(a_۸-a_۷)$$

$a_۸-a_۱$ نباید از $۱۶ = ۴+۳+۳+۲+۲+۱+۱$ کوچکتر باشد. از طرف دیگر، چون $۱ \leqslant a_۱ < a_۸ \leqslant ۱۶$، پس

$$a_۸-a_۱ \leqslant ۱۵$$

که با حکم قبلی تناقض دارد.

به‌این ترتیب، در واقع نتیجهٔ قویتر زیر برقرار است. عددی مانند k وجود دارد که به‌ازای آن، معادلهٔ

$$a_i - a_{i-1} = k$$

در صورتی که a_iها به‌ترتیب صعودی انتخاب شده باشند، سه جواب دارد.

مسألهٔ ۲۷۷. پاسخ هر دو پرسش (الف) و (ب) منفی است. کافی است این ادعا را در حالت (ب) ثابت کنیم. برهانی که در پی می‌آید بر این واقعیت متکی است که باقیماندهٔ تقسیم هر مربع کامل بر ۴ یا برابر با ۰ است یا برابر با ۱. بنابراین، حالتهای مختلف همنهشتی به‌پیمانهٔ ۴ را بررسی می‌کنیم. مزیت این کار این است که فقط سه حالت را باید بررسی کنیم:

یک) $k \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۴)؛

دو) $k \equiv ۲$ (به‌پیمانهٔ ۴)؛

سه) k فرد است.

در حالت (یک)، به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند x و y،

$$x^۲ + kxy + y^۲ \equiv x^۲ + y^۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

این به معنی آن است که $x^۲ + kxy + y^۲$ به اندازهٔ مضربی از ۴ با مجموع دو مربع کامل اختلاف دارد. اما باقیماندهٔ تقسیم مجموع دو مربع کامل بر ۴ برابر با ۳ نیست. بنابراین $x^۲ + kxy + y^۲$ هیچ‌گاه مقادیر ۳، ۷، ۱۱، ⋯، را نمی‌گیرد.

در حالت (دو)، به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند x، y،

$$x^۲ + kxy + y^۲ \equiv x^۲ + ۲xy + y^۲ \equiv (x + y)^۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

بنابراین، باقیماندهٔ تقسیم $x^۲ + kxy + y^۲$ بر ۴ باید یا ۰ باشد یا ۱، و بنابراین هیچ‌گاه مقادیر ۲، ۳، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ⋯، را نمی‌گیرد.

اکنون فرض کنید حالت (سه) برقرار و k فرد باشد. در این صورت (به‌پیمانهٔ ۴) $k \equiv \pm ۱$؛ پس به‌ازای هر دو عدد صحیح مانند x، y،

$$x^۲ + kxy + y^۲ \equiv x^۲ \pm xy + y^۲ \equiv x(x \pm y) + y^۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

وقتی‌که y فرد باشد، $y^۲$ هم فرد است و $x(x \pm y)$ باید زوج باشد؛ پس $x^۲ + kxy + y^۲$ فرد است. از طرف دیگر، وقتی‌که y زوج است، $x(x \pm y)$ یا فرد است یا بر ۴ بخش‌پذیر است، و $y^۲$ نیز بر ۴ بخش‌پذیر است؛ پس $x^۲ + kxy + y^۲$ یا فرد است یا بر ۴ بخش‌پذیر است.

به‌این ترتیب، چه $y^۲$ فرد باشد چه زوج، باقیماندهٔ تقسیم $x^۲ + kxy + y^۲$ بر ۴ برابر با ۲ نیست، و بنابراین مقادیر ۲، ۶، ۱۰، ۱۴، ⋯، را نمی‌گیرد.

بنابراین، هر مقدار خاصی که برای k انتخاب شود، عددی طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری‌که

$$x^۲ + kxy + y^۲ \neq n$$

مسألهٔ ۲۷۸. ریشهٔ گویا را می‌توان به‌شکل $\frac{p}{q}$ نوشت به‌طوری که p و q عددهایی صحیح باشند و بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ باشد. بنابراین p و q هر دو همزمان زوج نیستند و

$$ap^{۲} + bpq + cq^{۲} = ۰$$

فرض کنید در صورت امکان a، b و c هر سه عددهایی فرد باشند. چون سمت چپ برابری بالا عددی زوج است، یا هیچ‌یک از جمله‌های آن فرد نیست و یا دقیقاً دو تا از آنها فردند.

اگر p و q هر دو فرد باشند، هر سه جملهٔ سمت چپ برابری بالا باید فرد باشند که ناممکن است.

اگر از p و q یکی، مثلاً p، زوج باشد، $ap^{۲}$ و bpq هر دو زوج‌اند و $cq^{۲}$ فرد خواهد بود که ناممکن است.

بنابراین، ممکن نیست a، b و c هر سه فرد باشند.

مسألهٔ ۲۷۹. فرض کنید از باربو، کلامکین و موزر، که وزن آنها را به‌ترتیب با B، K و M نشان می‌دهیم، هیچ دو نفری هم‌وزن نباشند. در این صورت گفته‌های آنها را می‌توان چنین نوشت

باربو: $B > K$ و $K > M$.

کلامکین: $M > K$ و $M > B$.

موزر: $K > M$ و $M = B$.

چون هر یک از سه نفر دو جمله گفته‌اند، باید هر دو جملهٔ لاغرترین فرد راست، هر دو جملهٔ چاقترین فرد دروغ و دقیقاً یک جملهٔ فرد سوم راست باشد.

یکی از جمله‌های موزر $(M = B)$ راست نیست؛ پس موزر لاغرترین فرد نیست. باربو نیز لاغرترین فرد نیست، چون در غیر این صورت $B > K$ راست نیست. باربو چاقترین فرد نیز نیست، چون در غیر این صورت $B > K$ راست خواهد بود. بنابراین، باربو از نظر وزن نفر وسط است. به‌این ترتیب، $M > B > K$.

ممکن است دست‌کم دو نفر هم‌وزن باشند، چون اطلاعاتی دربارهٔ راستی نسبی جمله‌های دو نفری که هم‌وزن‌اند نداریم. در این حالت، از هفت امکان $K = M = B$، $K > M = B$، $M = B > K$، $B > K = M$، $K = M > B$، $M > K = B$ و $K = B > M$، دو تای اول ($K = M = B$ و $K > M = B$) ترتیبهای درست ممکن هستند.

مسألهٔ ۲۸۰. به‌ازای هر x و y،

$$f(x,y) = kf(y,x) = k \cdot kf(x,y) = k^{۲}f(x,y)$$

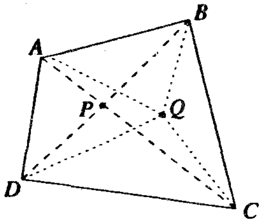
چون مقادیری برای x و y وجود دارد که $f(x,y) \neq ۰$، پس $k^{۲}$ باید برابر ۱ باشد. بنابراین، یا $k = ۱$ و یا $k = -۱$.

$f(x,y) = x + y$ مثالی برای حالتی است که $k = ۱$؛ $f(x,y) = x - y$ مثالی برای حالتی است که $k = -۱$.

تبصره. همین مسأله را در مورد چندجمله‌ای $f(x,y,z)$ از سه متغیر که در شرط

$$f(x,y,z) = kf(y,z,x)$$

صدق می‌کند حل کنید.



شکل ۱۷۷

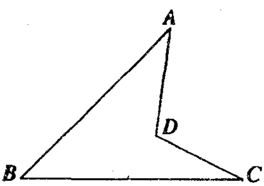
مسألهٔ ۲۸۱. کلید حل مسأله این است که کار را با مینیمم کردن فاصله‌های نقاط صفحه از دو رأس روبه‌رو شروع کنیم. اگر A و C دو رأس مورد نظر باشند، P نقطه‌ای روی پاره‌خط AC و Q نقطهٔ دلخواهی باشد که روی پاره‌خط AC واقع نیست (شکل ۱۷۷ را ببینید)، آنگاه بنابر نابرابری مثلثی

$$\overline{AP} + \overline{PC} = \overline{AC} < \overline{AQ} + \overline{QC}$$

بنابراین به نظر می‌رسد که نقطهٔ مطلوب باید نقطهٔ تقاطع دو قطر باشد. در واقع، اگر A، B، C و D چهار رأس چهارضلعی باشند و AC و BD یکدیگر را در P قطع کنند، آن‌وقت به‌ازای هر نقطه از صفحه مانند Q،

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP} &= \overline{AC} + \overline{BD}\\ &\leqslant \overline{AQ} + \overline{CQ} + \overline{BQ} + \overline{DQ}\end{aligned}$$

و برابری فقط در صورتی برقرار است که $P = Q$.

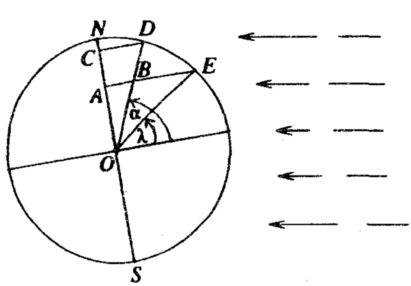


شکل ۱۷۸

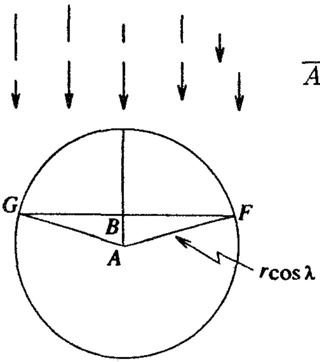
تبصره. همین مسأله را در صورتی که چهارضلعی محدب نباشد (مانند چهارضلعی $ABCD$ در شکل ۱۷۸) حل کنید.

مسألهٔ ۲۸۲. به‌طور کلیتر، فرض کنید عرض جغرافیایی محل λ و عرض جغرافیایی دایرهٔ قطبی α باشد. فرض کنید $\lambda \leqslant \alpha$. (α برابر $63^\circ 22'$ است.) در شکل ۱۷۹، O مرکز زمین است. اگر r شعاع زمین باشد، آنگاه

$$\overline{OA} = r\sin\lambda,\quad \overline{AE} = r\cos\lambda,\quad \overline{OC} = r\sin\alpha,\quad \overline{CD} = r\cos\alpha$$



شکل ۱۷۹



شکل ۱۸۰

بنابراین

$$\overline{AB} = \frac{r\sin\lambda}{r\sin\alpha} r\cos\alpha = \frac{r\sin\lambda}{\tan\alpha}$$

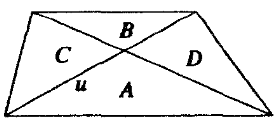
نقطه‌ای در سطح زمین در عرض جغرافیایی λ چه بخشی از روز در برابر نور خورشید قرار دارد؟ چنین نقطه‌ای از زمانی که در نقطهٔ F قرار دارد (شکل ۱۸۰ را ببینید) تا وقتی‌که به نقطهٔ G می‌رسد در برابر نور خورشید است. در صورتی که دوران یکنواخت باشد، نسبت مورد نظر با نسبت کمان کوتاهتر $\widehat{FG}$ به محیط سطح مقطع، و یا نسبت $\angle GAF$ به 2π، برابر است.

چون $\angle GAF = 2\arccos \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$، تعداد ساعتهایی که نقطه‌ای در عرض جغرافیایی شمالی λ در برابر نور خورشید قرار دارد برابر است با

$$\frac{24}{2\pi}\left(2\arccos\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}\right) = \frac{24}{\pi}\left(\arccos\frac{\tan\lambda}{\tan\alpha}\right)$$

وقتی‌که $\alpha = 66^\circ 33'$ و $\lambda = 43^\circ 45'$، این مقدار حدوداً ۸ ساعت و ۴۵ دقیقه است.

مسألهٔ ۲۸۳. مساحت مثلثهایی را که از تقاطع دو قطر ذوزنقه حاصل شده‌اند A، B، C و D بنامید (شکل ۱۸۱ را ببینید). اگر یکی از قطرها قطر دیگر را به نسبت $\frac{u}{v}$ قطع کند (همان‌طور که در شکل نشان داده شده است)، آنگاه



شکل ۱۸۱

$$\frac{C}{B} = \frac{A}{D} = \frac{u}{v}$$

درنتیجه $A \cdot B = C \cdot D$. چون دو مثلث که قاعدهٔ یکسان داشته باشند و هر دو بین دو خط موازی واقع باشند مساحت برابر دارند، $A + C = B + D$، و بنابراین $C = D = \sqrt{AB}$. به‌این ترتیب، مساحت ذوزنقه برابر است با

$$A + B + C + D = A + B + 2\sqrt{AB} = \left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right)^2$$

تبصره. اگر چهارضلعیی مانند شکل ۱۸۱ به مثلثهایی با مساحتهای A، B، C و D تقسیم شده و مساحتش $(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2$ باشد، آیا لزوماً ذوزنقه است؟

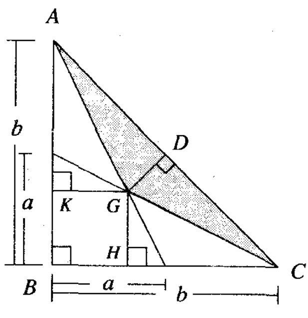
مسألهٔ ۲۸۴. برای اینکه طرحی از روش حل مسأله به‌دست آوریم ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که $n = 2$. در این حالت، باید مجموع رقمهای عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۹۶، ۹۷، ۹۸ و ۹۹ را به‌دست آوریم. عددها را از بزرگ به کوچک در نظر بگیرید. مجموع رقمهای ۹۹ برابر ۱۸ است؛ مجموع رقمهای ۹۸ برابر ۱۷ است که با اضافه کردن ۱ به‌آن می‌شود ۱۸؛ مجموع رقمهای ۹۷ برابر ۱۶ است که با اضافه کردن ۲ به‌آن می‌شود ۱۸. اگر به‌همین ترتیب ادامه دهیم، مثلاً به ۸۷ می‌رسیم که اختلاف مجموع

رقمهایش با ۱۸، ۲ + ۱ است و ۲ + ۱ مجموع رقمهای ۸۷ − ۹۹ = ۱۲ است. به نظر می‌رسد که اگر ۰ را هم به عددهای صحیح مورد نظر اضافه کنیم می‌توانیم این عددها را دو تا دو تا با هم جفت کنیم به‌طوری که مجموع عددهای هر جفت برابر ۹۹ باشد: (۹۹, ۰)، (۱, ۹۸)، (۲, ۹۷)، ⋯، (۱۲, ۸۷)، ⋯، (۳۲, ۶۷)، ⋯، (۴۸, ۵۱) و (۴۹, ۵۰). بنابراین، ۵۰ جفت عدد داریم که مجموع رقمهای دو عضو هر جفت ۱۸ است. پس در حالتی که $n = ۲$ پاسخ این است

$$۹ \times ۲ \times ۵۰ = ۹۰۰$$

در حالت کلی، k و $۱۰^n - ۱ - k$ را با هم جفت کنید $(k = ۰, ۱, ۲, \cdots, ۵ \times ۱۰^{n-۱} - ۱)$. در این صورت، مجموع رقمهای یکان دو عضو هر جفت برابر ۹ است. همین‌طور مجموع رقمهای دهگانشان، و غیره. چون هر عضو هر یک از جفتها حداکثر n رقم دارد، مجموع رقمهای دو عضو هر جفت برابر $۹n$ است. چون تعداد جفتها $\frac{۱}{۲} \times ۱۰^n$ است، مجموع رقمهای مورد نظر برابر است با

$$\frac{۹n \times ۱۰^n}{۲} = ۵ \times ۹ \times n \times ۱۰^{n-۱}$$



شکل ۱۸۲

مسألهٔ ۲۸۵. راه‌حل اول. باید ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین AGC را که در شکل ۱۸۲ سایه خورده است بیابیم. این کار را می‌توان با نصف کردن $\angle ABC$ انجام داد. نیمساز این زاویه از نقطهٔ G می‌گذرد و بر AC عمود است. بنابراین باید طول GD را بیابیم.

فرض کنید همان‌طور که در شکل ۱۸۲ نشان داده شده است $GH \perp BC$ و $\overline{GH}$ را x بنامید. چون $\frac{\overline{GH}}{\overline{HC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{BC}}$، پس

$$\frac{x}{b-x} = \frac{a}{b}$$

و بنابراین

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

در این صورت

$$\overline{GD} = \overline{BD} - \overline{BG} = \frac{b}{\sqrt{۲}} - \sqrt{۲}x$$

و درنتیجه مساحت مثلث AGC برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}\overline{AC} \cdot \overline{GD} &= \frac{۱}{۲}(\sqrt{۲}b)\left(\frac{b}{\sqrt{۲}} - \sqrt{۲}x\right)\\ &= \frac{b}{۲}(b - ۲x) = \frac{b^۲}{۲}\left(۱ - \frac{۲a}{a+b}\right)\\ &= \frac{b^۲}{۲}\left(\frac{b-a}{b+c}\right)\end{aligned}$$

راه‌حل دوم. با استفاده از نمادگذاری و نمودار راه‌حل اول می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}(\text{مساحت}AGC) &= (\text{مساحت}ABC) - ۲(\text{مساحت}GBC)\\ &= \frac{b^۲}{۲} - xb = \frac{b^۲}{۲}\left(۱ - \frac{۲a}{a+b}\right)\end{aligned}$$

مسألهٔ ۲۸۶. هر ۹ نقطه‌ای درون پنج‌ضلعی این ویژگی را دارند! (نموداری رسم کنید.)

مسألهٔ ۲۸۷. **راه‌حل اول.** اگر قرار دهیم $x = ۰$، $y = ۰$، یا $x = -y$ عبارت مورد نظر صفر می‌شود. درنتیجه بنابر قضیهٔ عاملها x، y و $x + y$ عاملهای این عبارت‌اند. این مطلب را مستقیماً نیز می‌توان تحقیق کرد؛چون $x^۷ + y^۷$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است،

$$\begin{aligned}(x+y)^۷ - (x^۷+y^۷) &= (x+y)\{(x+y)^۶ - x^۶ - x^۵y + x^۴y^۲ - x^۳y^۳ + x^۲y^۴\\ &\qquad - xy^۵ + y^۶\}\\ &= (x+y)(۷x^۵y + ۱۴x^۴y^۲ + ۲۱x^۳y^۳ + ۱۴x^۲y^۴ + ۷xy^۵)\\ &= ۷xy(x+y)(x^۴ + ۲x^۳y + ۳x^۲y^۲ + ۲xy^۳ + y^۴)\\ &= ۷xy(x+y)(x^۲+xy+y^۲)^۲\end{aligned}$$

راه‌حل دوم. مانند راه‌حل قبل معلوم می‌شود که x، y و $x + y$ عاملهای عبارت موردنظرند. فرض کنید $x = wy$ که در آن w ریشهٔ سوم واحد موهومی است ($w = \frac{۱}{۲}(-۱ + i\sqrt{۳})$)، $w^۳ = ۱$ و $w^۲ + w + ۱ = ۰$). در این صورت

$$\begin{aligned}(x+y)^۷ - (x^۷+y^۷) &= y^۷(w+۱)^۷ - y^۷(w^۷+۱)\\ &= y^۷(-w^۲)^۷ - y^۷(w+۱)\\ &= -y^۷(w^{۱۴}+w+۱)\\ &= -y^۷(w^۲+w+۱) = ۰\end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر بر $x - wy$ بخش‌پذیر است. در واقع، بیش از این می‌توانیم بگوییم. فرض کنید

$$g(x) = (x+y)^۷ - x^۷ - y^۷$$

در این صورت

$$g'(x) = ۷\{(x+y)^۶ - x^۶\}$$

و

$$g'(wy) = ۷y^۶\{(w+۱)^۶ - w^۶\} = ۷y^۶\{(-w^۲)^۶ - w^۶\} = ۰$$

بنابراین $x - wy$ عاملی از $g(x)$ است. پس $(x+y)^۷ - (x^۷+y^۷)$ بر $(x - wy)^۲$ بخش‌پذیر است. چون ضریبها حقیقی‌اند، $(x+y)^۷ - (x^۷+y^۷)$ بر مزدوج مختلط مقسوم‌علیه به‌دست آمده، یعنی

$(x-w^2y)^2$، نیز بخش‌پذیر است. بنابراین عبارت مورد نظر بر

$$(x-wy)^2(x-w^2y)^2=(x^2+xy+y^2)^2$$

بخش‌پذیر است. به‌این ترتیب نتیجه حاصل می‌شود.

تبصره. عبارت $(x+y)^n-(x^n+y^n)$ را به‌ازای مقدارهای دیگری از n تجزیه کنید.

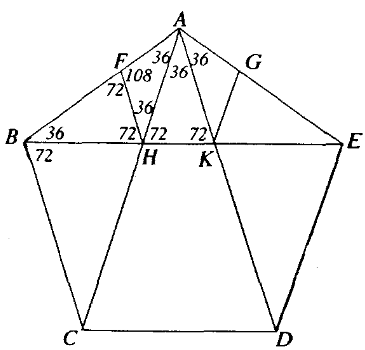
مسألهٔ ۲۸۸. راه‌حل اول. چون

$$BC \parallel FH,\ \ CD \parallel HK,\ \ DE \parallel KG$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AK}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AG}}$$

درنتیجه $AFHKG$ تصویر $ABCDE$ تحت اثر تبدیلی تجانسی با نقطهٔ ثابت A است. بنابراین $AFHKG$ و $ABCDE$ متشابه‌اند و درنتیجه پنج‌ضلعی $AFHKG$ منتظم است.



شکل ۱۸۳

راه‌حل دوم. چون $\angle BAE=108^\circ$ و $\overline{AB}=\overline{AE}$، پس $\angle ABE=\angle AEB=36^\circ$ (شکل ۱۸۳ را ببینید). به‌همین ترتیب، $\angle BAC=\angle EAD=36^\circ$ و درنتیجه $\angle CAD=36^\circ$.

چون $FH \parallel AD$، $\angle FHA=\angle CAD=36^\circ$. چون $\angle ABE=\angle BAC=36^\circ$، $\angle BHA=108^\circ$. بنابراین $\angle FHB=\angle HFB=72^\circ$ و درنتیجه $\angle AHK=72^\circ$.

به‌همین ترتیب، $\angle AHK=72^\circ$. با استفاده از ویژگی مثلثهای متساوی‌الساقین معلوم می‌شود که

$$\overline{BF}=\overline{BH}=\overline{AH}=\overline{AK}$$

و درنتیجه $\triangle BFH \cong \triangle AHK$. بنابراین $\overline{FH}=\overline{HK}$. روشن است که $\overline{AF}=\overline{FH}$. به‌همین ترتیب $\overline{AG}=\overline{GK}=\overline{HK}$.

بنابراین، همهٔ ضلعها و همهٔ زاویه‌های پنج‌ضلعی $AFHKG$ با هم برابرند و این پنج‌ضلعی منتظم است.

مسألهٔ ۲۸۹. فرض کنید بتوان رقمهای متمایزی را به حرفهای مختلف نسبت داد به‌طوری که

$$\begin{array}{r} T\ H\ R\ E\ E \\ +\quad F\ I\ V\ E \\ \hline E\ I\ G\ H\ T \end{array}$$

درست باشد. چون T و E متمایزند، باید به آخرین ستون سمت چپ نقلی ۱ داشته باشیم. بنابراین $E = T + ۱$. اکنون به ستون سمت راست توجه کنید. چون $E > T$، $E + E$ باید بزرگتر از ۱۰ باشد؛ درنتیجه،

$$E + E = ۱۰ + T = ۹ + E$$

پس $E = ۹$ و $T = ۸$. اکنون چون نقلی ۱ از ستون سمت راست به ستون بعدی منتقل می‌شود، پس

$$۱ + ۹ + V = ۱۰ + H$$

درنتیجه $V = H$ که با فرض $V \neq H$ تناقض دارد.

مسألهٔ ۲۹۰. فرض کنید d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a، b و c، و g بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک x، y و z باشد. چون d، b و c را می‌شمارد، باید x را بشمارد. به‌همین ترتیب، d باید y و z را بشمارد. بنابراین d مقسوم‌علیه مشترکی از x، y و z است و از g بزرگتر نیست. از طرف دیگر، چون x بر g بخش‌پذیر است، g باید b و c را بشمارد. چون y بر g بخش‌پذیر است، g باید a و c را بشمارد. بنابراین، g باید a، b و c را بشمارد. پس $d \leqslant g$. بنابراین $g = d$.

مسألهٔ ۲۹۱. $۱۳\frac{۱}{۲}$ روز.

تبصره. در چنین وضعیتی، رشد جمعیتهای انبوهتر مسائل حادّی ایجاد می‌کند و طبیعی‌تر است که عامل محدود کننده‌ای برای رشد وجود داشته باشد. مثلاً می‌توانیم فرض کنیم که اگر جمعیت در زمان مفروضی N باشد، ۱۲ ساعت بعد جمعیت $N\left(۲ - \frac{N}{K}\right)$ است که در آن K عددی ثابت است.

آیا مقداری از K وجود دارد که به‌ازای آن جمعیت ۱۰۰۰۰۰۰ هیچ‌گاه به ۲۰۰۰۰۰۰ نرسد؟ اگر چنین است، بزرگترین مقدار ممکن K چیست؟ به‌ازای چه مقداری از K قانون رشد مستلزم آن است که کشت ۱۰۰۰۰۰۰ باکتری بعد از ۲۴ ساعت به ۲۰۰۰۰۰۰ برسد؟

مسألهٔ ۲۹۲. شرط اعمال شده بر f را می‌توان به‌این صورت بیان کرد: اگر $a \neq b$، آنگاه

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant ۰$$

ابتدا می‌کوشیم جوابی برای معادلهٔ مورد نظر بیابیم. با توجه به‌شکل این معادله جوابی به‌صورت $x = c - f(u)$ را که در آن u مقداری نامعلوم است امتحان می‌کنیم. اگر معادله چنین جوابی داشته باشد،

$$f(u) = f(c - f(u) + f(c))$$

و از این رابطه معلوم می‌شود که $u = c$ به‌کار می‌آید. بنابراین

$$x = c - f(c)$$

جوابی از معادلهٔ مورد نظر است.

آیا جواب دیگری وجود دارد؟ فرض کنید $x = v \neq c - f(c)$ جواب دیگری برای معادله باشد. اگر به شرط اعمال شده بر f و این واقعیت که $f(c) \neq c$ توجه کنیم، نتیجه می‌گیریم

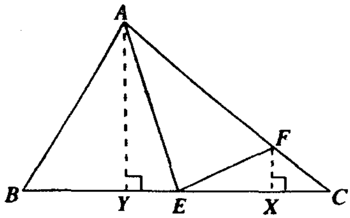
$$\frac{f(v+f(c))-f(c)}{v+f(c)-c} \geqslant ۰ \qquad (۱)$$

اما چون v جوابی از معادله است، $f(v+f(c)) = c - v$ و درنتیجه

$$f(v+f(c))-f(c) = -(v+f(c)-c)$$

بنابراین از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود $۰ \geqslant ۱-$. به‌این ترتیب $x = c - f(c)$ تنها جواب معادله است.

مسألهٔ ۲۹۳. راه‌حل اول. پاره‌خط AE را رسم کنید (شکل ۱۸۴ را ببینید). چون $\overline{AF} = ۲\overline{CF}$، پس $[AEF] = ۲[FEC]$ (نماد $[ABC\cdots]$ نشانهٔ مساحت چندضلعی $ABC\cdots$ است). همچنین



شکل ۱۸۴

$$[ABE] = [AEC] = [AEF] + [FEC] = ۳[FEC]$$

بنابراین

$$[ABEF] = [ABE] + [AEF] = ۵[FEC]$$

راه‌حل دوم. فرض کنید X و Y پای عمودهایی باشند که به‌ترتیب از F و A بر BC رسم شده‌اند (شکل ۱۸۴ را ببینید). چون $\triangle AYC$ با $\triangle FXC$ متشابه است، $\overline{AY} = ۳\overline{FX}$. بنابراین

$$[ABC] = ۲[AEC] = ۲ \times ۳[FEC] = ۶[FEC]$$

و درنتیجه $[ABEF] = ۵[FEC]$.

مسألهٔ ۲۹۴. می‌توان نوشت

$$\left(\log_{۳} ۱۶۹\right) \times \left(\log_{۱۳} ۲۴۳\right) = \left(۲\log_{۳} ۱۳\right) \times \left(۵\log_{۱۳} ۳\right)$$
$$= ۱۰ \left(\log_{۳} ۱۳\right)\left(\log_{۱۳} ۳\right) = ۱۰$$

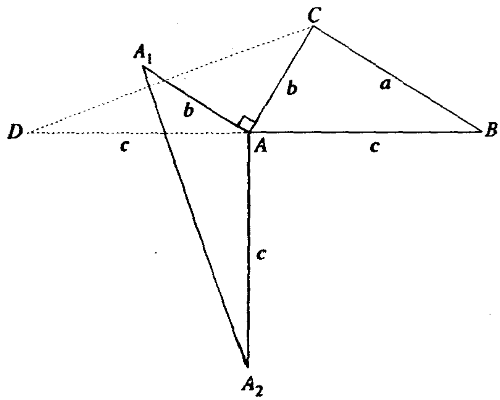
تبصره. «برهان» زیر را تحلیل کنید: اگر $a = \log_{۳} ۱۶۹$ و $b = \log_{۱۳} ۲۴۳$، آنگاه $۳^a = ۱۶۹$ و $۱۳^b = ۲۴۳$. بنابراین $۱۶۹ - ۱۳^b + ۲۴۳ - ۳^a = ۰$. به‌این ترتیب

$$۱۳^۲ - ۱۳^b + ۳^۵ - ۳^a = ۰$$

پس $b = ۲$، $a = ۵$ و $ab = ۱۰$.

مسألهٔ ۲۹۵. راه‌حل اول. BA را تا D طوری امتداد دهید که $\overline{AD} = c$ (شکل ۱۸۵ را ببینید). روشن است که $\triangle AA_۱A_۲ \cong \triangle ACD$ و

$$[AA_۱A_۲] = [ACD] = [ACB] = \frac{۱}{۲}ab$$



شکل ۱۸۵

به‌همین ترتیب $[BB_{۲}B_{۱}] = \frac{۱}{۲}ab$ و $[CC_{۱}C_{۲}] = \frac{۱}{۲}ab$. مساحت شش‌ضلعی مورد نظر برابر است با

$$a^{۲} + b^{۲} + c^{۲} + ۴\left(\frac{۱}{۲}ab\right) = ۲(a^{۲} + ab + b^{۲})$$

راه‌حل دوم. مساحت $\triangle AA_{۱}A_{۲}$ را به کمک مثلثات نیز می‌توان به‌دست آورد. چون

$$\angle A_{۱}AA_{۲} + \angle CAB = ۱۸۰^{\circ}$$

این مساحت برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\overline{AA_{۱}} \cdot \overline{AA_{۲}} \sin \angle A_{۱}AA_{۲} = \frac{۱}{۲}bc \sin \angle CAB = \frac{bc}{۲} \cdot \frac{a}{c} = \frac{۱}{۲}ab$$

به‌همین ترتیب مساحت مثلث $BB_{۱}B_{۲}$ برابر $\frac{۱}{۲}ab$ است. دیگر می‌توانیم جواب را مانند راه‌حل اول به‌دست آوریم.

تبصره. اگر $\triangle ABC$ قائم‌الزاویه نباشد، آیا مساحت مثلثهای $AA_{۱}A_{۲}$، $BB_{۱}B_{۲}$ و $CC_{۱}C_{۲}$ لزوماً با هم برابر است؟

مسألهٔ ۲۹۶. اگر سه عدد مورد نظر را با a، b و c نشان دهیم و عددها را طوری نامگذاری کرده باشیم که $a < b < c$، کافی است ثابت کنیم $c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$. فرض کنید

$$a = ۶ \times ۱۰^{n+۲}, \quad b = ۱۱۲۵ \times ۱۰^{۲n+۱} - ۸, \qquad c = ۱۱۲۵ \times ۱۰^{۲n+۱} + ۸$$

در این صورت

$$\begin{aligned} a^{۲} + b^{۲} &= ۳۶ \times ۱۰^{۲n+۴} + (۱۱۲۵ \times ۱۰^{۲n+۱})^{۲} - ۱۸۰۰۰ \times ۱۰^{۲n+۱} + ۶۴ \\ &= (۳۶۰۰۰ - ۱۸۰۰۰)۱۰^{۲n+۱} + (۱۱۲۵ \times ۱۰^{۲n+۱})^{۲} + ۶۴ \\ &= (۱۱۲۵ \times ۱۰^{۲n+۱})^{۲} + ۱۸۰۰۰ \times ۱۰^{۲n+۱} + ۶۴ = c^{۲} \end{aligned}$$

مسألهٔ ۲۹۷. چگونه ممکن است دو بازیکن، که آنها را A و B می‌نامیم، با هم بازی کنند؟ یا (الف) A و B در دور اول رقیب یکدیگرند، و یا (ب) در دور اول، هر یک از آنها با بازیکن دیگری مسابقه می‌دهد و برنده می‌شود و هر دو در میان نیمی از بازیکنان که به دور دوم راه یافته‌اند قرار می‌گیرند. این دو حالت پیشامدهای ناسازگارند.

حالت (الف) را از دیدگاه A بررسی کنید. اگر انتخاب رقبا کاملاً تصادفی باشد، احتمال اینکه A با B بازی کند همان‌قدر است که A با هر بازیکن دیگری بازی کند. پس اگر n بازیکن در این دوره مسابقات شرکت کرده باشند، احتمال اینکه A در دور اول با B بازی کند برابر $\frac{۱}{n-۱}$ است.

اگر حالت (ب) روی دهد، مسأله به بررسی همان وضعیت حالت (الف) در مورد نصف بازیکنان منجر می‌شود. بنابراین می‌توانیم مسأله را در مورد ۱۶ بازیکن، سپس ۸، ۴ و بالاخره ۲ بازیکن حل کنیم.

با در نظر داشتن این موضوع، فرض کنید p_k، $k = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$، احتمال این باشد که اگر A و B بین ۲^k بازیکنی باشند که در مسابقات حضور دارند، با هم بازی کنند.

اگر $k = ۱$، فقط دو بازیکن داریم، A و B، و این دو حتماً با هم مسابقه می‌دهند. پس $p_۱ = ۱$.

فرض کنید $k = ۲$. در این صورت ۴ بازیکن داریم و احتمال اینکه در دور اول A با B بازی کند ۱ به ۳ است. اگر A و B با هم بازی نکنند، هر یک از آنها در برابر بازیکن دیگری (که مهارتشان در بازی یکسان است) بازی می‌کند و احتمال برنده شدن در مورد همهٔ بازیکنان یکسان است. احتمال اینکه A و B هر دو به دور دوم راه بیابند $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$ است. در دور دوم، A و B تنها بازیکنانی هستند که باقی مانده‌اند و حتماً با هم بازی می‌کنند. بنابراین

$$p_۲ = \frac{۱}{۳} + \left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right)p_۱ = \frac{۱}{۲}$$

($\frac{۲}{۳}$ احتمال این است که A و B در دور اول با هم بازی نکنند.)

اکنون فرض کنید $k \geqslant ۲$. در این حالت ۲^k بازیکن داریم و A در دور اول با احتمال $\frac{۱}{۲^k-۱}$ در برابر B بازی می‌کند. بنابراین، احتمال اینکه در دور اول A و B با حریف دیگری بازی کنند برابر است با $\frac{۲(۲^{k-۱}-۱)}{۲^k-۱} = \frac{۲^k-۲}{۲^k-۱}$ و احتمال اینکه هر دو برنده شوند $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$ است. با این فرض که A و B هر دو بین $۲^{k-۱}$ بازیکنی باشند که دور اول را پشت سر می‌گذارند و به دور دوم راه می‌یابند، احتمال اینکه A و B در دور دوم برابر هم بازی کنند $p_{k-۱}$ است. بنابراین

$$p_k = \frac{۱}{۲^k-۱} + \frac{۲(۲^{k-۱}-۱)}{۲^k-۱} \times \frac{۱}{۴} \cdot p_{k-۱}$$

پس

$$۲(۲^k-۱)p_k = ۲ + (۲^{k-۱}-۱)p_{k-۱}$$

بنابراین

$$
\begin{aligned}
۲^k(۲^k - ۱)p_k &= ۲^k + ۲^{k-۱}(۲^{k-۱} - ۱)p_{k-۱} \\
&= ۲^k + ۲^{k-۱} + ۲^{k-۲}(۲^{k-۲} - ۱)p_{k-۲} \\
&= ۲^k + ۲^{k-۱} + ۲^{k-۲} + \cdots + ۲ \times ۱ \times p_۱ \quad (\text{با توجه به رابطهٔ بازگشتی روی } k) \\
&= ۲(۲^{k-۱} + ۲^{k-۲} + \cdots + ۱) = ۲(۲^k - ۱)
\end{aligned}
$$

درنتیجه

$$p_k = \frac{۱}{۲^k - ۱}$$

بخصوص احتمال اینکه A و B بین ۳۲ بازیکن با هم بازی کنند یک به شانزده است.

مسألهٔ ۲۹۸. راه‌حل اول. (از جان ایم) فرض کنید این روش تثلیث عملی باشد. فرض کنید $\angle POC = x^\circ$ و درنتیجه $\angle COQ = ۲x^\circ$. فرض کنید نقطهٔ D تصویر C تحت انعکاس نسبت به OP و M نقطه‌ای روی OQ باشد به‌طوری که $\overline{OM} = \overline{OC}$. به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$\triangle ACD \cong \triangle ABC, \qquad \triangle OCD \cong \triangle OMC$$

و درنتیجه

$$\overline{CB} = \overline{AC} = \overline{CD} = \overline{CM}$$

و

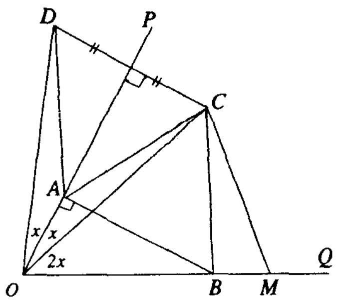
$$\angle CBM = \angle CMB$$

همچنین

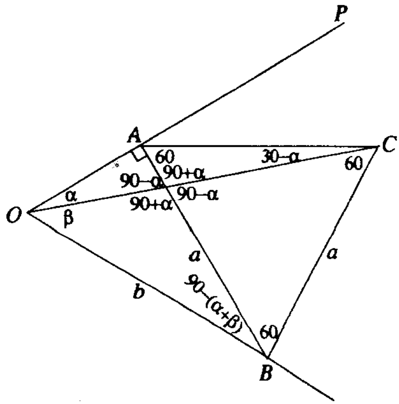
$$\angle CBM = ۲x + (۳۰^\circ + x) = ۳۰^\circ + ۳x$$

$$\angle CMB = \angle OCM = \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - ۲x) = ۹۰^\circ - x$$

بنابراین $۹۰^\circ - x = ۳۰^\circ + ۳x$، و درنتیجه $x = ۱۵^\circ$. بنابراین، باید $\angle POQ = ۴۵^\circ$. (نگاه کنید به *Crux Mathematicorum* 7(1981) 100 - 101.)



شکل ۱۸۶



شکل۱۸۷

راه‌حل دوم. فرض کنید $\alpha = \angle AOC$ و $\beta = \angle COB$. در این صورت $۰ < \alpha, \beta \leqslant ۹۰^\circ$ و $\alpha + \beta \leqslant ۹۰^\circ$. می‌توانیم زاویه‌های دیگر را مانند شکل ۱۸۷ نامگذاری کنیم. فرض کنید $\overline{BC} = \overline{AB} = \overline{AC} = a$، $\overline{OB} = b$ و $\overline{OC} = c$. با به‌کار بردن قانون سینوسها در مثلثهای OBC و AOB به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\sin\beta}{\sin(۳۰^\circ + \alpha)} = \frac{a}{b}, \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{a}{b}$$

درنتیجه

$$\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(۳۰^\circ+\alpha)$$
$$= \frac{۱}{۲}\{\cos(۳۰^\circ - \beta) - \cos(۳۰^\circ + ۲\alpha + \beta)\} \qquad (۱)$$

با به‌کار بردن قانون سینوسها در مثلثهای OBC و AOC به‌ترتیب به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\sin\beta}{\sin(۱۵۰^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{a}{c}, \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin ۱۵۰^\circ} = \frac{a}{c}$$

بنابراین

$$\frac{\sin\alpha}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{\sin\alpha}{\sin ۱۵۰^\circ} = \frac{\sin\beta}{\sin(۱۵۰^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(۳۰^\circ + \alpha + \beta)}$$

درنتیجه، چون $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$،

$$\sin\beta = ۲\sin\alpha\sin(۳۰^\circ + \alpha + \beta)$$
$$= \cos(۳۰^\circ + \beta) - \cos(۳۰^\circ + ۲\alpha + \beta) \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم

$$۲\cos(۳۰^\circ + \beta) - ۲\cos(۳۰^\circ + ۲\alpha + \beta) = \cos(۳۰^\circ - \beta) - \cos(۳۰^\circ + ۲\alpha + \beta)$$

و یا

$$\cos(۳۰^\circ + ۲\alpha + \beta) = ۲\cos(۳۰^\circ + \beta) - \cos(۳۰^\circ - \beta) \qquad (۳)$$

اکنون فرض کنید که روش بیان شده واقعاً روش تثلیث $\angle POQ$ باشد. در این صورت $\beta = ۲\alpha$ و معادلهٔ (۳) تبدیل می‌شود به

$$\cos(۳۰^\circ + ۲\beta) = ۲\cos(۳۰^\circ + \beta) - \cos(۳۰^\circ - \beta)$$

یا

$$\cos(۳۰^\circ + ۲\beta) - \cos(۳۰^\circ + \beta) = \cos(۳۰^\circ + \beta) - \cos(۳۰^\circ - \beta)$$

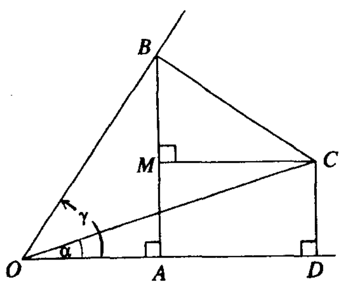
و یا

$$-۲\sin\left(۳۰ + \frac{۳\beta}{۲}\right)\sin\frac{\beta}{۲} = -۲\sin ۳۰^\circ \sin\beta = -۲\sin\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}$$

درنتیجه یا $\beta = ۰$ و یا $\cos\left(۹۰^\circ \pm \frac{\beta}{۲}\right) = \cos\frac{\beta}{۲} = \sin\left(۳۰^\circ + \frac{۳\beta}{۲}\right)$. بنابراین یا $\beta = ۰$، یا $\frac{\beta}{۲} + ۹۰^\circ = \frac{۳\beta}{۲} + ۳۰^\circ$ و یا $\frac{\beta}{۲} - ۹۰^\circ = \frac{۳\beta}{۲} + ۳۰^\circ$. پس سه امکان وجود دارد:

$$\alpha = \beta = ۰^\circ$$
$$\alpha = ۱۵^\circ,\quad \beta = ۳۰^\circ$$
$$\alpha = ۳۰^\circ,\quad \beta = ۶۰^\circ$$

برعکس، می‌توان ثابت کرد که معادلهٔ (۳) در هر یک از این حالتها برقرار است. پس تنها زاویهٔ حاده‌ای که با این روش تثلیث می‌شود زاویهٔ ۴۵° است ($\angle POQ = \alpha + \beta$).



شکل ۱۸۸

راه‌حل سوم. فرض کنید D پای عمودی باشد که از C بر امتداد OA و M پای عمودی باشد که از C بر AB رسم می‌شود (شکل ۱۸۸ را ببینید). فرض کنید $\overline{OA} = ۲c$، $\angle AOC = \alpha$ و $\angle BOA = \gamma$. در این صورت $\overline{AB} = ۲c\tan\gamma$. درنتیجه

$$\overline{CD} = \overline{AM} = \frac{۱}{۲}\overline{AB} = c\tan\gamma$$

بنابراین

$$\tan\alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{c\tan\gamma}{۲c + c\sqrt{۳}\tan\gamma} = \frac{\tan\gamma}{۲ + \sqrt{۳}\tan\gamma}$$

فرض کنید واقعاً OC یک سوم $\angle BOA$ را جدا کند، یعنی $\gamma = ۳\alpha$. در این صورت، چون

$$\tan ۳\alpha = \frac{۳\tan\alpha - \tan^۳\alpha}{۱ - ۳\tan^۲\alpha}$$

می‌توان نوشت

$$\tan\alpha = \frac{\tan ۳\alpha}{۲ + \sqrt{۳}\tan ۳\alpha} = \frac{۳\tan\alpha - \tan^۳\alpha}{۲ - ۶\tan^۲\alpha + ۳\sqrt{۳}\tan\alpha - \sqrt{۳}\tan^۳\alpha}$$

اگر فرض کنیم $x = \tan\alpha$ و x را از دو طرف معادله حذف کنیم، معادلهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$۱ + ۵x^۲ = \sqrt{۳}(۳x - x^۳)$$

اگر فرض کنیم $x = \sqrt{۳}y$، می‌توانیم رادیکال را حذف کنیم. درنتیجهٔ این کار به‌دست می‌آوریم

$$۱ + ۱۵y^{۲} = ۹y - ۹y^{۳}$$

و یا

$$۳y(۳y^{۲} + ۵y - ۳) + ۱ = ۰$$

اگر این معادله جوابی گویا داشته باشد، مطمئناً مخرج این جواب باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بنابراین اگر $y = \frac{z}{۳}$، آنگاه

$$z^{۳} + ۵z^{۲} - ۹z + ۳ = ۰$$

چون

$$z^{۳} + ۵z^{۲} - ۹z + ۳ = (z - ۱)(z^{۲} + ۶z - ۳)$$

به‌دست می‌آوریم $z = ۱$، $z = -۳ + ۲\sqrt{۳}$ و $z = -۳ - ۲\sqrt{۳}$، و بنابراین $x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$، $x = ۲ - \sqrt{۳}$ و $x = -۲ - \sqrt{۳}$. سومین مقدار x منفی و بنابراین جواب اضافی است. پس روش بیان شده فقط وقتی به‌کار می‌آید که

$$\tan\alpha = ۰, \ \ \frac{۱}{\sqrt{۳}}, \ \ ۲ - \sqrt{۳}$$

یعنی وقتی‌که $\alpha = ۰^\circ$، $\alpha = ۳۰^\circ$ و $\alpha = ۱۵^\circ$ و یا وقتی‌که $\gamma = ۰^\circ$، $\gamma = ۹۰^\circ$ و $\gamma = ۴۵^\circ$

مسألهٔ ۲۹۹. فرض کنید که عدد مفروض k تا رقم ۱ داشته باشد. در این صورت این عدد برابر است با

$$۱ + ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \cdots + ۲^{k-۱} = ۲^{k} - ۱$$

مربع این عدد برابر است با

$$\begin{aligned}(۲^{k} - ۱)^{۲} &= ۲^{۲k} - ۲^{k+۱} + ۱ = ۲^{k+۱}(۲^{k-۱} - ۱) + ۱\\ &= ۲^{k+۱}(۲^{k-۲} + ۲^{k-۳} + \cdots + ۱) + ۱\\ &= ۲^{۲k-۱} + ۲^{۲k-۲} + \cdots + ۲^{k+۱} + ۱\end{aligned}$$

و در مبنای ۲ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\underbrace{۱۱۱\cdots۱۱}_{k-۱}\underbrace{۰۰۰\cdots۰۰}_{k}۱$$

مسألهٔ ۳۰۰. پیش از شروع به حل مسأله در حالت کلی، می‌کوشیم با بررسی چندین حالت ساده درکی از خواستهٔ مسأله به‌دست آوریم. به‌ازای $k = ۱$، $k = ۲$ و $k = ۳$ برابریهای مورد نظر به‌ترتیب چنین‌اند

$$\sin\frac{\pi}{۲} = ۱, \ \ \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}, \ \ \sin\frac{\pi}{۶}\sin\frac{۳\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

که درستی آنها را به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد.

اکنون سعی می‌کنیم درستی حکم مسأله را در حالتی که $k = ۴$ ثابت کنیم. سمت چپ برابری مورد نظر $\sin \frac{۳\pi}{۸} \sin \frac{\pi}{۸}$ است. توجه کنید که

$$\sin \frac{۳\pi}{۸} = \cos \left(\frac{\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۸}\right) = \cos \frac{\pi}{۸}$$

و

$$\sin \frac{\pi}{۸} \cos \frac{\pi}{۸} = \frac{۱}{۲} \sin \frac{\pi}{۴} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

درنتیجه در حالتی که $k = ۴$ حکم مسأله درست است.

وقتی‌که $k = ۵$، سمت چپ برابری مورد نظر برابر است با

$$\sin \frac{\pi}{۱۰} \sin \frac{۳\pi}{۱۰} \sin \frac{۵\pi}{۱۰}$$

در این حالت به نظر می‌رسد که با قرار دادن $\cos \frac{۴\pi}{۱۰}$ به‌جای $\sin \frac{\pi}{۱۰}$ و $\cos \frac{۲\pi}{۱۰}$ به‌جای $\sin \frac{۳\pi}{۱۰}$ به حل مسأله کمک مؤثری نمی‌شود. اما می‌توانیم کاری کنیم که بتوان از اتحاد $\sin ۲\theta = ۲ \sin \theta \cos \theta$ استفاده کرد. توجه کنید که

$$\sin \frac{\pi}{۱۰} \sin \frac{۲\pi}{۱۰} \sin \frac{۳\pi}{۱۰} \sin \frac{۴\pi}{۱۰} \sin \frac{۵\pi}{۱۰} = \cos \frac{۴\pi}{۱۰} \cos \frac{۳\pi}{۱۰} \cos \frac{۲\pi}{۱۰} \cos \frac{\pi}{۱۰}$$

به‌این ترتیب (چون $\sin \frac{۵\pi}{۱۰} = ۱$)

$$\begin{aligned}
\sin^۲ \frac{\pi}{۱۰} \sin^۲ \frac{۲\pi}{۱۰} \sin^۲ \frac{۳\pi}{۱۰} \sin^۲ \frac{۴\pi}{۱۰} \\
&= (\sin \frac{\pi}{۱۰} \cos \frac{\pi}{۱۰})(\sin \frac{۲\pi}{۱۰} \cos \frac{۲\pi}{۱۰})(\sin \frac{۳\pi}{۱۰} \cos \frac{۳\pi}{۱۰})(\sin \frac{۴\pi}{۱۰} \cos \frac{۴\pi}{۱۰}) \\
&= \frac{۱}{۲^۴} \sin \frac{\pi}{۵} \sin \frac{۲\pi}{۵} \sin \frac{۳\pi}{۵} \sin \frac{۴\pi}{۵} \\
&= \frac{۱}{۲^۴} \sin \frac{\pi}{۵} \sin \frac{۲\pi}{۵} \sin \frac{۲\pi}{۵} \sin \frac{\pi}{۵} \\
&= \frac{۱}{۲^۴} \sin^۲ \frac{۲\pi}{۱۰} \sin^۲ \frac{۴\pi}{۱۰}
\end{aligned}$$

با ساده کردن این رابطه به‌دست می‌آوریم $\sin^۲ \frac{\pi}{۱۰} \sin^۲ \frac{۳\pi}{۱۰} = \frac{۱}{۲^۴}$، و درنتیجه در حالتی که $k = ۵$ حکم مسأله درست است.

حال به بررسی حالت کلی می‌پردازیم. فرض کنید

$$A = \sin \frac{\pi}{۲k} \sin \frac{۲\pi}{۲k} \sin \frac{۳\pi}{۲k} \cdots \sin \frac{(k-۱)\pi}{۲k}$$

چون $\sin \frac{\pi}{۲} = ۱$ و

$$\sin \frac{r\pi}{۲k} = \cos \left((k-r)\frac{\pi}{۲k}\right), \quad r = ۱, ۲, \cdots, k-۱$$

پس

$$A^۲ = \left(\sin\frac{\pi}{۲k}\cos\frac{\pi}{۲k}\right)\left(\sin\frac{۲\pi}{۲k}\cos\frac{۲\pi}{۲k}\right)\cdots\left(\sin\frac{(k-۱)\pi}{۲k}\cos\frac{(k-۱)\pi}{۲k}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲^{k-۱}}\sin\frac{\pi}{k}\sin\frac{۲\pi}{k}\sin\frac{۳\pi}{k}\cdots\sin\frac{(k-۱)\pi}{k}$$

$$= \frac{۱}{۲^{k-۱}}\sin^۲\frac{\pi}{k}\sin^۲\frac{۲\pi}{k}\cdots\sin^۲\left[\frac{k}{۲}\right]\frac{\pi}{k}$$

$$= \frac{۱}{۲^{k-۱}}\sin^۲\frac{۲\pi}{۲k}\sin^۲\frac{۴\pi}{۲k}\cdots\sin^۲\left[\frac{k}{۲}\right]\frac{۲\pi}{۲k}$$

(چون $\sin\frac{s\pi}{k} = \sin\frac{(k-s)\pi}{k}$، $s = ۱, ۲, \cdots, \left[\frac{k}{۲}\right]$.)

اگر دو عبارتی که برای $A^۲$ به‌دست آورده‌ایم برابر با هم قرار دهیم و $\left[\frac{k}{۲}\right]$ تا عامل $\sin^۲\frac{۲r\pi}{۲k}$ ($r = ۱, ۲, \cdots, \left[\frac{k}{۲}\right]$) را از دو طرف حذف کنیم، اگر k زوج باشد به‌دست می‌آوریم

$$\sin^۲\frac{\pi}{۲k}\sin^۲\frac{۳\pi}{۲k}\cdots\sin^۲\frac{(k-۱)\pi}{۲k} = \frac{۱}{۲^{k-۱}}$$

و اگر k فرد باشد به‌دست می‌آوریم

$$\sin^۲\frac{\pi}{۲k}\sin^۲\frac{۳\pi}{۲k}\cdots\sin^۲\frac{k\pi}{۲k} = \frac{۱}{۲^{k-۱}}$$

چون

$$۲\left[\frac{k+۱}{۲}\right] - ۱ = \begin{cases} k-۱ & \text{اگر } k \text{ زوج باشد} \\ k & \text{اگر } k \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۳۰۱. الف) چون $\frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۱}{۱۱۰} = \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۱۰}$ و $\frac{۱}{۴۰} = \frac{۴۱}{۱۶۴۰} = \frac{۱}{۱۶۴۰} + \frac{۱}{۴۱}$، سمت راست برابری مورد نظر برابر است با

$$\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}\right)+\left(\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۴۰}\right) = \frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}\right) = \frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۴} = ۱$$

ب) فرض کنید ۱ را به‌صورت مجموعی از معکوسهای k عدد طبیعی متمایز مانند $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$ و x_k نوشته باشیم، به‌طوری که (به‌پیمانهٔ ۳) $x_i \equiv ۲$، $i = ۱, ۲, \cdots, k$ (یعنی هر یک از x_iها یکی از عددهای ۲، ۵، ۸، ۱۱، $\cdots$، باشد).

چون

$$۱ = \frac{۱}{x_۱} + \frac{۱}{x_۲} + \cdots + \frac{۱}{x_k}$$

اگر دو طرف این برابری را در $x_۱x_۲\cdots x_k$ ضرب کنیم به‌دست می‌آوریم

$$x_۱x_۲x_۳\cdots x_k=\sum_{i=۱}^{k}X_i \qquad (*)$$

که در آن $X_i=\frac{۱}{x_i}(x_۱x_۲\cdots x_k)$، و X_i حاصلضرب $k-۱$ عدد از x_jهاست. از رابطهٔ $(*)$ نتیجه می‌شود

$$۲^k\equiv k۲^{k-۱} \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳)$$

و درنتیجه

$$k\equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳)$$

بنابراین k باید یکی از عددهای ۲ ، ۵، ۸، ۱۱، $\cdots$، باشد.

چون به‌ازای هر دو عدد صحیح متمایز بزرگتر از ۱ مانند $x_۱$ و $x_۲$،

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱$$

هیچ نمایشی از نوع مطلوب وجود ندارد که فقط دو جمله داشته باشد.

آیا می‌توان پنج عدد از مجموعهٔ $\{۲,۵,۸,۱۱,\cdots\}$ انتخاب کرد که مجموع معکوسهایشان ۱ باشد؟ فرض کنید پاسخ مثبت باشد و مثلاً

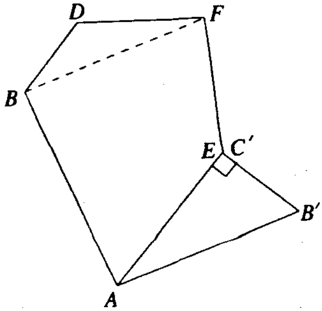
$$۱=\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\frac{۱}{x_۳}+\frac{۱}{x_۴}+\frac{۱}{x_۵}$$

که در آن $x_۵<x_۴<x_۳<x_۲<x_۱\geqslant ۲$. در این صورت باید $x_۱\geqslant ۲$، $x_۲\geqslant ۵$، $x_۳\geqslant ۸$، $x_۴\geqslant ۱۱$، $x_۵\geqslant ۱۴$، و درنتیجه

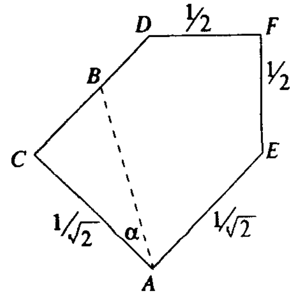
$$\begin{aligned}
۱&=\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\frac{۱}{x_۳}+\frac{۱}{x_۴}+\frac{۱}{x_۵}\\
&\leqslant \frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۱}+\frac{۱}{۱۴}\\
&=\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۸}\right)+\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۱}\right)+\frac{۱}{۱۴}\\
&<\frac{۵}{۸}+\left(\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۱۰}\right)+\frac{۳}{۴۲}\\
&<\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۴۰}
\end{aligned}$$

و این تناقض است.

بنابراین بیش از ۵ عدد برای نمایش مطلوب نیاز داریم. امکان بعدی برای تعداد جمله‌های نمایش ۸ است و از قسمت (الف) معلوم می‌شود که نمایشی ۸جمله‌ای وجود دارد.



شکل ۱۹۰



شکل ۱۸۹

مسألهٔ ۳۰۲. فرض کنید طول ضلع مربع مفروض ۱ باشد. در این صورت مساحت پنج‌ضلعی $ACDEF$ (شکل ۱۸۹ را ببینید) $\frac{۵}{۸}$ است، و درنتیجه طول ضلع مربعی که از کنار هم قرار دادن سه قطعهٔ حاصل از این پنج‌ضلعی به‌دست خواهیم آورد باید $\sqrt{\frac{۵}{۸}}$ باشد.

می‌کوشیم نقطهٔ B را روی CD طوری بیابیم که AB ضلع مربع مطلوب باشد. چون

$$\overline{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} < \sqrt{\frac{۵}{۸}} < ۱ = \overline{AD}$$

انجام این کار ممکن است.

چون $\overline{AB} = \sqrt{\frac{۵}{۸}}$، بنابر قضیهٔ فیثاغورس،

$$\overline{CB} = \sqrt{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲}\overline{CD}$$

بنابراین $\alpha = \angle CAB = ۳۰^\circ$.

سطح پنج‌ضلعی را در امتداد خط AB ببرید و مثلث ACB را طوری قرار دهید که AC روی AE و این مثلث روی مثلث $AC'B'$ قرار گیرد (شکل ۱۹۰ را ببینید)، که در آن C' همان نقطهٔ E است. درنتیجه

$$\angle FC'B' = ۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ - ۱۳۵^\circ = \angle BDF$$

$$\overline{BD} = \overline{B'C'}, \quad \overline{DF} = \overline{EF} = \overline{C'F}$$

بنابراین، بار دیگر سطح پنج‌ضلعی را در امتداد BF ببرید و مثلث BDF را طوری قرار دهید که نقاط B، D و F به‌ترتیب بر B'، C' و F منطبق شوند. در این صورت $ABFB'$ مربع مطلوب است.

مربع بودن $ABFB'$ را تحقیق می‌کنیم. روشن است که

$$\angle BAB' = \angle CAE = ۹۰^\circ$$

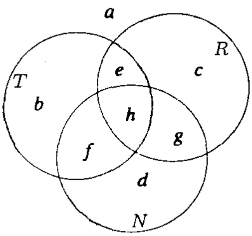
و

$$\angle BFB' = \angle DFE = ۹۰^\circ$$

و بنابر قانون کسینوسها،

$$\overline{B'F}^{۲} = \overline{BF}^{۲} = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right) = \frac{۵}{۸} = \overline{AB}^{۲} = \overline{AB'}^{۲}$$

مسألهٔ ۳۰۳. در نمودار وِن (شکل ۱۹۱)، دایره‌هایی که با T، R و N مشخص شده‌اند، به‌ترتیب مجموعهٔ افرادی را نشان می‌دهند که از تلویزیون، رادیو و روزنامه برای کسب اخبار استفاده می‌کنند و a، b، c، d، e، f، g و h تعداد اعضای زیرمجموعه‌هاست: a تعداد افرادی است که از هیچ‌یک از این رسانه‌ها برای کسب اخبار استفاده نمی‌کنند؛ b تعداد افرادی است که از تلویزیون برای کسب اخبار استفاده می‌کنند ولی از رادیو یا روزنامه استفاده نمی‌کنند؛ e تعداد افرادی است که از تلویزیون و رادیو استفاده می‌کنند ولی از روزنامه استفاده نمی‌کنند؛ و غیره.



شکل ۱۹۱

از نمودار وِن معلوم می‌شود که اطلاعات بیان شده را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$b + e + f + h = ۵۰ \quad (۱)$$

$$a + b + d + f = ۶۱ \quad (۲)$$

$$a + b + c + e = ۱۳ \quad (۳)$$

$$e + f + g + h = ۷۴ \quad (۴)$$

و

$$N = a + b + c + d + e + f + g + h$$

که در آنها a، b، c، d، e، f، g و h عددهایی صحیح و نامنفی‌اند.

کران بالای N. بنابر (۲)، $d \leqslant ۶۱$ و بنابر (۳) و (۴)،

$$a + b + c + e + f + g + h \leqslant ۱۳ + ۷۴ = ۸۷$$

بنابراین $N \leqslant ۶۱ + ۸۷ = ۱۴۸$. درضمن، اگر $a = b = f = e = ۰$، $d = ۶۱$، $h = ۵۰$، $c = ۱۳$ و $g = ۲۴$، $N = ۱۴۸$.

کران پایین N. چون

$$f \leqslant b + e + f + h = ۵۰$$

پس

$$a + b + d = ۶۱ - f \geqslant ۱۱$$

بنابراین

$$N = (a + b + d) + (e + f + g + h) + c$$
$$\geqslant ۱۱ + ۷۴ + ۰ = ۸۵$$

آیا ممکن است $N = ۸۵$؟ اگر چنین باشد، همهٔ نابرابریهای تخمینهای بالا باید به برابری تبدیل شوند، و درنتیجه

$$a+b+d=۱۱,\quad c=۰,\quad f=۵۰$$

اما در این صورت $b=e=h=۰$ (با توجه به (۱))، و درنتیجه

$$a+b+c+e=a\leqslant ۱۱$$

که با (۳) تناقض دارد. بنابراین N هیچ‌گاه ۸۵ نیست.

فرض کنید $N = ۸۶$. در این صورت یا $a+b+d=۱۱$ و $c=۱$، و یا $a+b+d=۱۲$ و $c=۰$.

در حالت اول، از $a+b+d=۱۱$ و $c=۱$ نتیجه می‌شود $f=۵۰$؛ $b=e=h=۰$؛ $a+b+c+e\leqslant ۱۲$ که با (۳) تناقض دارد.

در حالت دوم، از $a+b+d=۱۲$ و $c=۰$ نتیجه می‌شود $f=۴۹$ و $b+e+h=۱$. چون $a+b+d=۱۲$ و $a+b+e=۱۳$ (بنابر (۳))، $e=d+۱$، و درنتیجه $d=۰$، $e=۱$ و $b=h=۰$. بنابراین $a=۱۲$ و بنابر (۴)، $g=۲۴$. بنابراین وقتی $N=۸۶$ که

$$a=۱۲,\quad e=۱,\quad f=۴۹,\quad g=۲۴,\quad b=c=d=h=۰$$

تبصره. آیا برای N مقادیر ناممکنی بین ۸۶ و ۱۴۸ وجود دارد؟

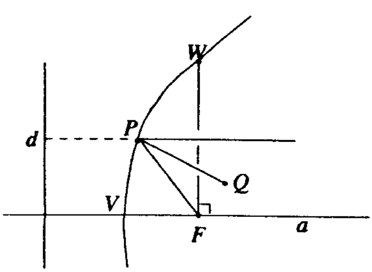
مسألهٔ ۳۰۴. فرض کنید W نقطه‌ای روی سهمی باشد به‌طوری که WF بر محور سهمی عمود باشد. فرض کنید d خط هادی، a محور سهمی و $\text{dist}(X,l)$ فاصلهٔ نقطهٔ X از خط l باشد. دو حالت وجود دارد.

حالت ۱. P بین V و W واقع است (شکل ۱۹۲ را ببینید).

بنابر ویژگی انعکاسی سهمی، PQ زاویهٔ میان PF و خطی را که از P با محور سهمی موازی رسم شده است نصف می‌کند. اگر PQ محور سهمی را قطع کند، آنگاه

$$\overline{PQ}>\overline{PF}=\text{dist}(P,d)>\text{dist}(V,d)=\overline{VF}$$

که تناقض است. بنابراین PQ محور سهمی را قطع نمی‌کند.

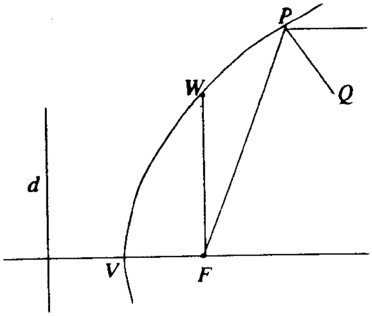


شکل۱۹۲

حالت ۲. W بین V و P واقع است (شکل ۱۹۳ را ببینید).
در این حالت، اگر PQ محور سهمی را قطع کند، آنگاه

$$\overline{PQ} > \text{dist}(P,a) \geqslant \overline{WF} = \text{dist}(W,d) = ۲\text{dist}(V,d) = ۲\overline{VF}$$

که باز هم تناقض است.



شکل۱۹۳

مسألهٔ ۳۰۵. راه‌حل اول. چون

$$(x+y)^۲ = (۵-z)^۲,\quad xy = ۳ - z(x+y) = ۳ - z(۵-z)$$

پس

$$\begin{aligned} ۰ &\leqslant (x-y)^۲ = (x+y)^۲ - ۴xy \\ &= ۲۵ - ۱۰z + z^۲ - ۱۲ + ۲۰z - ۴z^۲ \\ &= -۳z^۲ + ۱۰z + ۱۳ = -(z+۱)(۳z-۱۳) \end{aligned}$$

بنابراین $\frac{۱۳}{۳} \geqslant z \geqslant -۱$. بنابراین، بزرگترین مقدار ممکن z برابر $\frac{۱۳}{۳}$ است. این مقدار واقعاً وقتی‌که $x - y = ۰$ و $x + y = ۵ - \frac{۱۳}{۳} = \frac{۲}{۳}$، یعنی وقتی‌که $x = y = \frac{۱}{۳}$، به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. چون

$$x + y = ۵ - z,\quad xy = ۳ + z^۲ - ۵z$$

x و y ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ دوم زیرند

$$t^۲ + (z-۵)t + (z^۲ - ۵z + ۳)$$

برای اینکه ریشه‌های این عبارت درجهٔ دوم حقیقی باشند، باید

$$(z-۵)^۲ - ۴(z^۲ - ۵z + ۳) \geqslant ۰$$

و یا

$$۳z^۲ - ۱۰z - ۱۳ \geqslant ۰$$

این همان شرطی است که در راه‌حل اول برای z به‌دست آوردیم. بنابراین باز هم بزرگترین مقدار ممکن z برابر $\frac{۱۳}{۳}$ است.

تبصره. اگر $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$ و x_n عددهایی حقیقی باشند به‌طوری که

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n = a$$
$$\sum_{۱\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = b^۲$$

بزرگترین مقدار ممکن هر یک از x_iها را تعیین کنید.

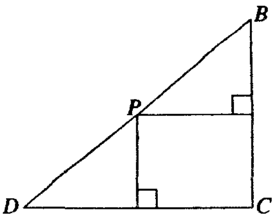
مسألهٔ ۳۰۶. **راه‌حل اول.** معمولاً در این گونه مسائل بخش‌پذیری، تجزیهٔ مقسوم‌علیه سودمند است. در این مسأله $۲۳۰۴ = ۳^۲ \times ۲^۸ = (۳ \times ۲^۴)^۲ = ۴۸^۲$. درنتیجه، عبارت حاوی n را باید طوری بازنویسی کنیم که جمله‌های آن شامل عامل ۴۸ باشند. بنابراین (با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای)

$$\begin{aligned}
۷^{۲n} - ۲۳۵۲n - ۱ &= (۷^۲)^n - ۲۳۰۴n - ۴۸n - ۱\\
&= (۱+۴۸)^n - ۴۸n - ۱ - ۲۳۰۴n\\
&= \binom{n}{۲}۴۸^۲ + \binom{n}{۳}۴۸^۳ + \cdots + ۴۸^n - ۲۳۰۴n\\
&= ۲۳۰۴\left\{\binom{n}{۲} + \binom{n}{۳}۴۸ + \cdots + ۴۸^{n-۲} - n\right\}
\end{aligned}$$

راه‌حل دوم. (به‌استقرا). وقتی $n = ۱$، چون $۷^۲ - ۲۳۵۲ - ۱ = -۲۳۰۴$، نتیجه برقرار است. فرض کنید نتیجه به‌ازای $n = k$ برقرار باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
&۷^{۲(k+۱)} - ۲۳۵۲(k+۱) - ۱\\
&= (۷^{۲k} - ۲۳۵۲k - ۱) + (۷^{۲k+۲} - ۷^{۲k}) - (۷^۲ - ۱ + ۲۳۰۴)\\
&= (۷^{۲k} - ۲۳۵۲k - ۱) + (۷^۲ - ۱)(۷^{۲k} - ۱) - ۲۳۰۴\\
&= (۷^{۲k} - ۲۳۵۲k - ۱) + (۷^۲ - ۱)^۲(۷^{۲(k-۱)} + ۷^{۲(k-۲)} + \cdots + ۱) - ۲۳۰۴
\end{aligned}$$

چون $۷^{۲k} - ۲۳۵۲k - ۱$ بر ۲۳۰۴ بخش‌پذیر است و $۲۳۰۴ = (۷^۲ - ۱)^۲$، سمت چپ آخرین برابری بر ۲۳۰۴ بخش‌پذیر است.

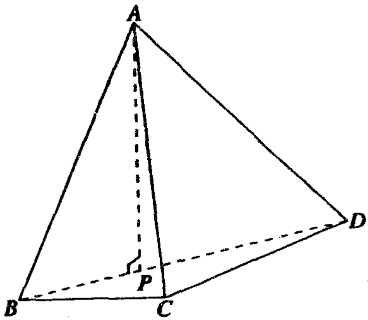


شکل ۱۹۴

مسألهٔ ۳۰۷. **راه‌حل اول.** فرض کنید BCD قاعدهٔ چهاروجهی باشد (شکل ۱۹۴ را ببینید)؛ BCD مثلثی قائم‌الزاویه با وتر DB است. چون مثلثهای ABC، ABD و ACD متساوی‌الساقین‌اند، نقطهٔ A باید روی هر سه صفحه‌ای که در نقطهٔ وسط پاره‌خطهای BC، BD و CD بر این خطها عمودند واقع باشد. چون هر یک از این صفحه‌ها BD را در

نقطهٔ وسط آن، یعنی P، قطع می‌کند، پس $AP\perp\triangle BCD$. بنابراین طول ارتفاع چهاروجهی برابر است با $\overline{AP}=\frac{۱}{۲}(۵\sqrt{۳})$. بنابراین، حجم چهاروجهی برابر است با

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\times۳\times۴\right)\left(\frac{۱}{۲}\times۵\sqrt{۳}\right)=۵\sqrt{۳}$$



شکل ۱۹۵

راه‌حل دوم. چون فاصلهٔ A از B، C و D یکسان است، فاصلهٔ تصویر قائم A روی صفحهٔ شامل B، C و D، یعنی نقطهٔ P، نیز از B، C و D یکسان است (شکل ۱۹۵ را ببینید). بنابراین P مرکز دایرهٔ محیطی $\triangle BCD$ است. فرض کنید $R=\overline{BP}=\overline{CP}=\overline{DP}$ و $h=\overline{AP}$. در این صورت $R^۲+h^۲=۵^۲$. حجم چهاروجهی، V، برابر است با

$$V=\frac{۱}{۳}h(\text{مساحت}\,\triangle BCD)$$

اما

$$۴R(\text{مساحت}\,\triangle BCD)=\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{CD}$$

یعنی $۴R=۳\times۴\times۵$. بنابراین $R=\frac{۵}{۲}$ و درنتیجه

$$h=\sqrt{۲۵-\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین $V=۵\sqrt{۳}$.

تبصره. فرض کنید $ABCD$ و $A'B'C'D'$ چهاروجهی‌اند و

$$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=a,\ \ \overline{BC}=b,\ \ \overline{CD}=c,\ \ \overline{BD}=d$$

$$\overline{B'C'}=\overline{C'D'}=\overline{D'B'}=a,\ \ \overline{A'B'}=b,\ \ \overline{A'C'}=c,\ \ \overline{A'D'}=d$$

به‌ازای چه مقدارهایی از a، b، c و d حجم $ABCD$ بزرگتر از حجم $A'B'C'D'$ است؟

تبصره. به‌طور کلیتر، ثابت کنید که حجم چهاروجهی $ABCD$ از دستور

$$V^۲=\frac{(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD})^۲}{۳۶}(۱-\cos^۲\alpha-\cos^۲\beta-\cos^۲\gamma+۲\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

به‌دست می‌آید که در آن $\alpha=\angle BAC$، $\beta=\angle CAD$ و $\gamma=\angle DAB$.

مسألهٔ ۳۰۸. راه‌حل اول. چون چندجمله‌ای مفروض همگن است، هر چندجمله‌ای که عاملی از آن باشد باید همگن باشد. اگر فرض کنیم $(x,y,z,w)=(۱,۱,۱,۱)$، معلوم می‌شود که چندجمله‌ای مورد نظر صفر می‌شود. پس به نظر می‌رسد که می‌توانیم عاملهایی خطی به‌صورت $x+y-z-w$ را امتحان کنیم به‌طوری که در آنها تعداد جمله‌های مثبت با تعداد جمله‌های منفی برابر باشد. برای این منظور به قضیهٔ عاملها نیاز داریم.

اگر فرض کنیم $x = z + w - y$، در می‌یابیم که همهٔ ضریبهای چندجمله‌ای مورد نظر، به‌عنوان چندجمله‌ایی از y (یا z یا w)، متحد با صفرند، و بنابراین خودش هم متحد با صفر است. بنابراین $x + w - z - y$ عاملی از چندجمله‌ای مورد نظر است. بنابر تقارن، دو عامل دیگر باید $x + y - z - w$ و $x + z - y - w$ باشند. عامل درجهٔ اول دیگری نیز باید وجود داشته باشد و این عامل باید متقارن باشد. پس این عامل باید $x + y + z + w$ باشد.

راه‌حل دوم. اگر چهار عامل خطی حقیقی وجود داشته باشد، بنابر تقارن و همگنی چندجمله‌ای مورد نظر، تجزیه باید به یکی از دو صورت زیر باشد:

الف) $a(x+y+z-bw)(y+z+w-bx)(z+w+x-by)(w+x+y-bz)$

ب) $c(x+y+z+w)(x+y+kz+kw)(x+z+kw+ky)(x+w+ky+kz)$

اگر عاملی خطی با دست‌کم سه ضریب متمایز وجود داشته باشد، بنابر تقارن متغیرها باید دست‌کم ۶ عامل از این نوع وجود داشته باشد که (با توجه به درجهٔ چندجمله‌ای) بیشتر از تعداد لازم است.

بکوشید تجزیه‌ای به‌صورت (الف) بیابید. با مقایسهٔ ضرایب $x^۴$ نتیجه می‌گیریم $-ab = ۱$. فرض‌کنید $x = y = z = w = ۱$؛ به‌دست می‌آوریم $a(۳-b)^۴ = ۰$، و درنتیجه $b = ۳$ و $a = -\frac{۱}{۳}$. اما در این صورت اگر فرض کنیم $z = w = ۰$، به‌دست می‌آوریم

$$x^۴ + y^۴ - ۲x^۲y^۲ = -\frac{۱}{۳}(x+y)^۲(y-۳x)(x-۳y)$$

که به‌ازای $x = y = ۱$ نادرست است. بنابراین تجزیه‌ای به‌صورت (الف) ممکن نیست.

اکنون تجزیه‌ای به‌صورت (ب) را بررسی می‌کنیم. با مقایسهٔ ضرایب $x^۴$ به‌دست می‌آوریم $c = ۱$. اگر فرض کنیم $x = y = z = w = ۱$، به‌دست می‌آوریم $۴ \times ۲^۳(۱+k)^۳ = ۰$، و درنتیجه $k = -۱$. اگر عاملها را در هم ضرب کنیم معلوم می‌شود که این تجزیه درست است.

در اینجا برهانی برای حکم بیان شده در ابتدای این راه‌حل می‌آوریم. (این برهان در مورد هر تعدادی از متغیرها درست است.) اگر مثلاً $P(x,y,z)$ چندجمله‌ایی سه متغیره باشد، P همگن از درجهٔ n است اگر و فقط اگر به‌ازای هر t،

$$P(tx,ty,tz) = t^n P(x,y,z) \qquad (*)$$

فرض کنید

$$P(x,y,z) = Q(x,y,z)R(x,y,z)$$

به‌جای x، y و z به‌ترتیب tx، ty و tz را قرار دهید و از رابطهٔ $(*)$ استفاده کنید. به‌دست می‌آوریم

$$t^n P(x,y,z) = Q(tx,ty,tz)R(tx,ty,tz)$$

x، y و z را ثابت در نظر بگیرید. در این صورت هر دو طرف برابری بالا چندجمله‌ایهایی از t هستند و این برابری تجزیه‌ای از مضربی از t^n به‌دست می‌دهد. چون هر تجزیهٔ t^n باید به‌صورت $t^m t^{n-m}$

باشد، باید

$$Q(tx, ty, tz) = t^m H(x, y, z)$$

$$R(tx, ty, tz) = t^{n-m} K(x, y, z)$$

که در آنها H و K چندجمله‌ای هستند. اکنون فرض کنید $t = ۱$ و ثابت کنید که Q و R باید همگن باشند.

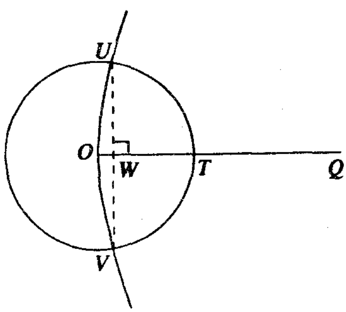
تبصره. ثابت کنید که چندجمله‌ای مورد نظر با دترمینان ماتریس

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{pmatrix}$$

برابر است و با استفاده از این موضوع چندجمله‌ای را تجزیه کنید.

مسألهٔ ۳۰۹. فرض کنید مکان‌هندسی مورد نظر پاره‌خطی راست باشد.

حالتی حدی را در نظر بگیرید که در آن R و S هر دو بر U منطبق باشند (شکل ۱۹۶ را ببینید)؛ در این صورت، P باید بر U منطبق باشد. بنابراین U نقطه‌ای از مکان‌هندسی است. به‌همین ترتیب V نیز نقطه‌ای از مکان‌هندسی است. بنابراین مکان‌هندسی باید پاره‌خط UV باشد. فرض کنید UV پاره‌خط OQ را در W قطع کند. چون W جزء مکان‌هندسی است، باید نقطهٔ وسط OT باشد. همچنین، بنابر تقارن (و یا چون ضلعهای متناظر مثلثهای همنهشت UWQ و VWQ با هم برابرند)، $UV \perp OT$.



شکل ۱۹۶

چون UV عمودمنصف OT است،

$$\overline{TU} = \overline{OU} = \overline{OT} = \overline{OV} = \overline{TV}$$

درنتیجه O، U و V روی دایره‌ای به مرکز T واقع‌اند. بنابراین دو دایره به مرکزهای Q و T داریم که سه نقطهٔ O، U و V بین آنها مشترک‌اند؛ پس این دو دایره بر هم منطبق‌اند. اما Q نقطه‌ای خارج از دایرهٔ به مرکز O است و باید متمایز از T باشد. بنابراین UV مکان‌هندسی مطلوب نیست.

مسألهٔ ۳۱۰. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, ۴$ می‌بینیم که در سطر nاُم مربع nاُمین عدد صحیح فرد (یعنی $(۲n - ۱)^۲$) در سمت راست برابری و مجموع $۲n - ۱$ عدد صحیح متوالی که از n شروع و به $n + (۲n - ۱ - ۱)۱ = ۳n - ۲$ ختم می‌شوند در سمت چپ برابری قرار دارد. می‌توان قانون کلی

زیر را پیشنهاد کرد:

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2,\qquad n=1,2,\cdots$$

اثبات این برابری با یافتن مجموع تصاعد حسابی طرف چپ آن آسان است.

مسألهٔ ۳۱۱. چون

$$b_0+b_1x+\cdots+b_{n+1}x^{n+1}+\cdots+b_{2n}x^{2n}=(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)^2$$

از مقایسهٔ ضریبهای x^{n+1} معلوم می‌شود

$$b_{n+1}=a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots+a_{n-1}a_2+a_na_1$$

و درنتیجه

$$b_{n+1}\leqslant a_1a_0+a_2a_0+\cdots+a_{n-1}a_0+a_na_0$$

بنابراین

$$\begin{aligned}2b_{n+1}&\leqslant a_1(a_0+a_n)+a_2(a_0+a_{n-1})+\cdots+a_{n-1}(a_0+a_2)+a_n(a_0+a_1)\\&\leqslant a_1(a_0+\cdots+a_n)+a_2(a_0+\cdots+a_n)+\cdots+a_n(a_0+\cdots+a_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_0+a_1+\cdots+a_n)\\&\leqslant(a_0+a_1+\cdots+a_n)^2=(f(1))^2\end{aligned}$$

مسألهٔ ۳۱۲. در این نوع مجموعیابیها می‌توان روش «جمع کردن با استفاده از تفاضلها» را به‌کار برد، یعنی می‌توان هر جمله را به‌صورت تفاضل دو مقدار نوشت به‌طوری که بتوان جمله‌هایی را حذف کرد. بنابراین، در مورد (الف) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

این محاسبه درست است ولی نیاز به کمی توضیح دارد. اگر به‌این شکل عمل کنیم، به همین آسانی می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}1+1+1+1+\cdots&=(2-1)+(3-2)+(4-3)+(5-4)+\cdots\\&=-1+2-2+3-3+4-4+5+\cdots=-1\end{aligned}$$

که عجیب به‌نظر می‌رسد. درنتیجه، باید منظورمان را از مجموع سریهای نامتناهی شرح دهیم. تعریفی که اختیار می‌کنیم این است که مجموع هر سری نامتناهی برابر است با حد مجموع جزئی اولین n جملهٔ سری وقتی‌که n بزرگ می‌شود. این تعریف را در همین مثال روشن می‌کنیم.

مجموعهای جزئی سری (الف) عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{۱\times ۳}=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)$$

$$\frac{۱}{۱\times ۳}+\frac{۱}{۳\times ۵}=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۵}\right)$$

$$\frac{۱}{۱\times ۳}+\frac{۱}{۳\times ۵}+\frac{۱}{۵\times ۷}=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}\right)=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۷}\right)$$

و به‌طور کلی، به‌ازای $n=۱,۲,۳,\cdots$،

$$\frac{۱}{۱\times ۳}+\frac{۱}{۳\times ۵}+\frac{۱}{۵\times ۷}+\cdots+\frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)}=\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲n+۱}\right)$$

(این همان قانون بنیادی مجموعیابی است: $\sum_{k=۱}^{n}\{F(k)-F(k-۱)\}=F(n)-F(۰)$.) به‌ازای $n=۱۰۰$، مجموع جزئی برابر است با $\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲۰۱}\right)=\frac{۱۰۰}{۲۰۰}$؛ اگر $n=۱۰۰۰۰۰۰$، این مجموع برابر است با $\frac{۱۰۰۰۰۰۰}{۲۰۰۰۰۰۱}$. بنابراین معلوم می‌شود که با بزرگتر کردن n می‌توان مجموع جزئی را به‌اندازهٔ دلخواه به $\frac{۱}{۲}$ نزدیک کرد. بر این مبناست که می‌توانیم $\frac{۱}{۲}$ را مجموع سری مفروض بدانیم.

در مورد (ب)، می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{۱\times ۲\times ۳}=\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}\right)$$

$$\frac{۱}{۲\times ۳\times ۴}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۲}\right)$$

و به‌طور کلی

$$\frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{n(n+۱)}-\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}\right)$$

مجموع جزئی اولین n جمله عبارت است از

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۱\times ۲\times ۳}+\frac{۱}{۲\times ۳\times ۴}+\frac{۱}{۳\times ۴\times ۵}+\cdots+\frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}\\ =\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۶}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۲}\right)+\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۲۰}\right)+\cdots+\\ +\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{n(n+۱)}-\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}\right)\\ =\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}\right)\\ =\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲(n+۱)(n+۲)}\end{aligned}$$

هر چه n بزرگتر می‌شود این عدد به $\frac{۱}{۴}$ نزدیکتر می‌شود. بنابراین، مجموع سری (ب)، با تعریفی که کردیم، برابر $\frac{۱}{۴}$ است.

مسألهٔ ۳۱۳. راه‌حل اول. هر عدد طبیعی مانند b را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه کرد

$$b = ۲^k a, \qquad k \in \{۰, ۱, ۲, \cdots\}, \qquad a \in \{۱, ۳, ۵, \cdots\}$$

یعنی هر عدد طبیعی را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب توانی از ۲ و عددی صحیح و فرد نوشت. $n + ۱$ عدد مفروض را $b_۱$، $b_۲$، $\cdots$ و $b_{n+۱}$ بنامید و آنها را به‌این ترتیب تجزیه کنید

$$b_i = ۲^{k_i} a_i, \qquad i = ۱, ۲, ۳, \cdots, n + ۱$$

اکنون a_iها $n + ۱$ عدد صحیح و فرد و عضو مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۵, \cdots, ۲n - ۱\}$ هستند (چون $۱ \leqslant b_i \leqslant ۲n$)، که فقط n عضو دارد. پس (بنابر اصل لانه کبوتری) دو تا از a_iها با هم برابرند، مثلاً فرض کنید $a_l = a_m = a$. در این صورت

$$b_l = ۲^{k_l} a, \qquad b_m = ۲^{k_m} a$$

اگر $k_m \geqslant k_l \geqslant ۰$، آنگاه b_m بر b_l بخش‌پذیر است؛ اگر $k_l \geqslant k_m$، آنگاه b_l بر b_m بخش‌پذیر است.

راه‌حل دوم. (به‌استقرا). اگر $n = ۱$، مجموعهٔ مفروض $\{۱, ۲\}$ است. پس نتیجه به‌ازای $n = ۱$ برقرار است.

فرض کنید نتیجه به‌ازای $n = k$ $(k \geqslant ۱)$ برقرار باشد. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از

$$\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۲k + ۲\}$$

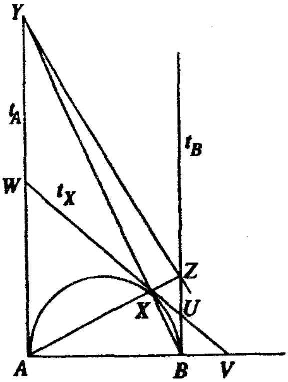
و $(k + ۱) + ۱$ عضوی باشد.

اگر $۲k + ۲ \notin S$، دست‌کم $k + ۱$ عضو از S باید از $\{۱, ۲, ۳, \cdots, ۲k\}$ انتخاب شده باشند. بنابر فرض استقرا یکی از این عضوها باید بر عضوی دیگر بخش‌پذیر باشد.

از طرف دیگر، فرض کنید $۲k + ۲ \in S$. اگر $k + ۱ \in S$، چون $۲k + ۲ = ۲(k + ۱)$، دو عضو از S یافته‌ایم که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است. اگر $k + ۱ \notin S$، مجموعهٔ T را با حذف کردن $۲k + ۲$ از S و قرار دادن $k + ۱$ به‌جای آن تشکیل دهید. در این صورت T، $k + ۲$ عضو دارد که $k + ۱$ عضو از آن عضو $\{۱, ۲, \cdots, ۲k\}$ هستند. بنابر فرض استقرا دو عدد مانند u و v در T وجود دارند که v مضربی از u است. اگر u و v هر دو متمایز از $k + ۱$ باشند، آنگاه $u, v \in S$. اگر از u و v یکی برابر $k + ۱$ باشد، این عدد باید عدد بزرگتر، یعنی v، و بر u بخش‌پذیر باشد. اما در این صورت $۲k + ۲ = ۲v$ و $۲v$ بر u بخش‌پذیر است، و درنتیجه u و $۲k + ۲$ دو عضو از S هستند که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است.

بنابراین، در هر حالت، S شامل دو عدد است که یکی بر دیگری بخش‌پذیر است، پس نتیجه به‌ازای $n = k + ۱$ برقرار است.

مسألهٔ ۳۱۴. اگر X طوری واقع شده باشد که $\overline{AX} = \overline{BX}$، آنگاه آشکارا t_X با AB موازی است.



شکل ۱۹۷

همچنین (چون $\overline{AX} = \overline{BX}$، $\angle YXA = \angle ZXB = ۹۰^\circ$ و $\angle YAX = \angle XBZ = ۴۵^\circ$)،

$$\triangle AXY \cong \triangle BXZ$$

درنتیجه $\overline{AY} = \overline{BZ}$ و YZ با AB موازی است.

از طرف دیگر، فرض کنید $\overline{AX} \neq \overline{XB}$. در این صورت t_X خطهای AB، BZ و AY را به‌ترتیب در نقطه‌های V، U و W قطع می‌کند (شکل ۱۹۷ را ببینید). چون $\angle AXB = ۹۰^\circ$، پس $\angle AXY = ۹۰^\circ$ و

$$\angle AYX + \angle YAX = ۹۰^\circ = \angle WXY + \angle WXA \quad (۱)$$

اما چون خطهای t_X و t_A هر دو از نقطهٔ W بر دایره مماس شده‌اند، $\overline{WA} = \overline{WX}$ و بنابراین

$$\angle YAX = \angle WAX = \angle WXA$$

اکنون بنابر (۱)، $\angle AYX = \angle WXY$، و درنتیجه $\overline{WY} = \overline{WX} = \overline{WA}$ و W نقطهٔ وسط AY است.

به‌طور مشابه معلوم می‌شود که U نقطهٔ وسط ZB است.

اکنون پاره‌خط VY را رسم و فرض کنید این پاره‌خط t_B را در Z' قطع کند. چون VW خط AY را نصف می‌کند و $AY \parallel BZ'$، خط VW باید BZ' را نصف کند. بنابراین $\overline{BZ'} = ۲\overline{BU} = \overline{BZ}$ و درنتیجه $Z = Z'$. به‌این ترتیب YZ، WU و AB یکدیگر را در V قطع می‌کنند.

ملاحظه. همین نتیجه را با استفاده از هندسهٔ تحلیلی نیز می‌توان به‌دست آورد. فرض کنید $A = (-r, ۰)$، $B = (r, ۰)$ و $X = (u, v)$ و $u^۲ + v^۲ = r^۲$. در این صورت

$$Y = \left(-r, \frac{۲rv}{r-u}\right), \qquad Z = \left(r, \frac{۲rv}{r+u}\right)$$

و بجز وقتی‌که $u = ۰$، خطهای YZ، WU و AB یکدیگر را در $\left(\frac{r^۲}{u}, ۰\right)$ قطع می‌کنند.

مسألهٔ ۳۱۵. فرض کنید مجموعهٔ T متشکل از ۶ عدد صحیح متوالی به دو زیرمجموعهٔ جدا از هم مانند U و V افراز شده باشد به‌طوری که کوچکترین مضرب مشترک عددهای هر یک از این دو زیرمجموعه برابر m باشد.

فرض کنید عدد اول p یکی از عددهای T، مثلاً عددی متعلق به U، را می‌شمارد. در این صورت m، که کوچکترین مضرب مشترک عددهای V است، بر p بخش‌پذیر است؛ پس p باید یکی از عددهای V را بشمارد. بنابراین، هر عدد اول که عددی متعلق به T را می‌شمارد باید دست‌کم دو عدد متعلق به T را بشمارد. پس $p \leqslant ۶$، و p فقط ممکن است ۲، ۳ و یا ۵ باشد.

اکنون توجه کنید که تفاضل دو عدد بخش‌پذیر بر ۵ دست‌کم برابر ۵ است. بنابراین، چهار عدد متوالی در T وجود دارند که هیچ‌یک از آنها بر ۵ بخش‌پذیر نیست. بین این چهار عدد دو عدد فرد وجود دارد که بر ۳ بخش‌پذیرند (و بر ۲ و ۵ بخش‌پذیر نیستند). اما در این صورت باید دو عدد فرد متوالی به‌شکل $\pm ۳^k$ $(k \geqslant ۱)$ داشته باشیم که ناممکن است.

بنابراین T را نمی‌توان به‌صورت بیان شده در بالا افراز کرد.

مسألهٔ ۳۱۶. دنبالهٔ ۱، ۲، ۳، $\cdots$، $f(n)$ را در نظر بگیرید. در این دنباله عددهای نامربع $f(۱)$، $f(۲)$، $f(۳)$، $\cdots$ و $f(n)$ و عددهای مربع $۱^۲$، $۲^۲$، $۳^۲$، $\cdots$ و $k^۲$ هستند، و

$$k^۲ < f(n) < (k+۱)^۲$$

بنابراین

$$f(n) = n + k, \qquad k^۲ < f(n) < (k+۱)^۲$$

اکنون ثابت می‌کنیم $k = \{\sqrt{n}\}$. می‌دانیم که

$$k^۲ < n + k < (k+۱)^۲$$

یعنی

$$k^۲ + ۱ \leqslant n + k \leqslant (k+۱)^۲ - ۱$$

بنابراین

$$\left(k - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۳}{۴} = k^۲ - k + ۱ \leqslant n \leqslant k^۲ + k = \left(k + \frac{۱}{۲}\right)^۲ - \frac{۱}{۴}$$

ازاین‌رو

$$k - \frac{۱}{۲} < \sqrt{n} < k + \frac{۱}{۲}$$

و درنتیجه $\{\sqrt{n}\} = k$.

مسألهٔ ۳۱۷. نباید بازی کنید. تعداد مهره‌هایی که به هیچ‌یک از ما تعلق نمی‌گیرند عددی زوج است. بنابراین، در انتهای بازی تعداد مهره‌های شما با تعداد مهره‌های من برابر است. به‌این ترتیب، هر بار که بازی کنید می‌بازید.

مسألهٔ ۳۱۸. راه‌حل اول. دوران ۹۰° در جهت پاد ساعتگرد حول O، A را به B و A' را به B' می‌برد.

چون دوران طولها را حفظ می‌کند، $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. چون دوران ۹۰° هر راستایی را به راستای عمود بر آن تبدیل می‌کند، $AA' \perp BB'$.

راه‌حل دوم. اگر $A'OA$ و $B'OB$ پاره‌خطهایی راست باشند، حکم به روشنی درست است. فرض کنید چنین نباشد. چون $\overline{A'O} = \overline{B'O}$، $\overline{OA} = \overline{OB}$ و $\angle A'OA = \angle B'OB = ۹۰^\circ \pm \angle A'OB$، مثلثهای $A'OA$ و $B'OB$ همنهشت‌اند. بنابراین $\overline{AA'} = \overline{BB'}$ و $\angle OAA' = \angle OBB'$. درنتیجه اگر

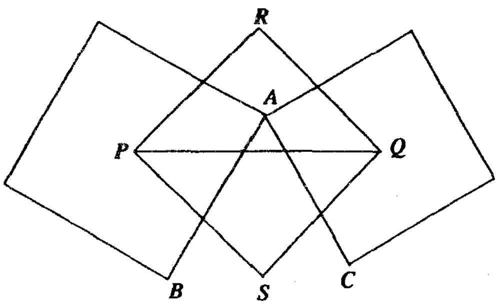
k نقطهٔ برخورد AA' و BB' (و یا در صورت لزوم امتداد آنها) باشد، آنگاه

$$\angle OAK = \angle OAA' = \angle OBB' = \angle OBK$$

پس O، K، A و B بر یک دایره واقع‌اند، و بنابراین $\angle AKB = \angle AOB = ۹۰^\circ$، که همان نتیجهٔ مطلوب است.

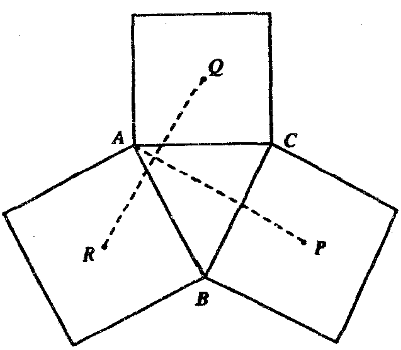
مسألهٔ ۳۱۹. برای اینکه روش حل مسأله را دریابید توجه کنید که اگر MPQ مثلثی قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد، M، P و Q سه رأس مربعی به قطر PQ خواهند بود.

مربع $PRQS$ را به قطر PQ رسم کنید (شکل ۱۹۸ را ببینید). ثابت می‌کنیم $S = M$. چون مثلثهای RPS و APB هر دو قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین‌اند، بنابر مسألهٔ ۳۱۸، $\overline{BS} = \overline{RA}$ و $BS \perp RA$. به‌همین ترتیب، مثلثهای RQS و AQS قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین‌اند و $\overline{RA} = \overline{SC}$ و $RA \perp SC$. بنابراین $\overline{BS} = \overline{SC}$ و $BS \parallel SC$. پس S نقطهٔ وسط BC، یعنی همان M است.



شکل ۱۹۸

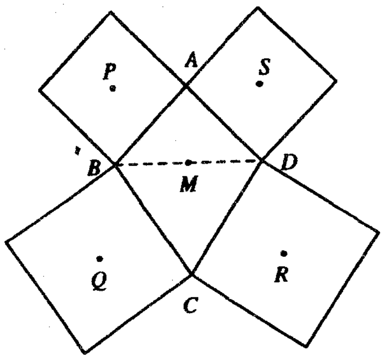
مسألهٔ ۳۲۰. الف) فرض کنید M نقطهٔ وسط AC باشد. بنابر مسألهٔ ۳۱۹، مثلث PMR متساوی‌الساقین و در رأس M قائم‌الزاویه است (شکل ۱۹۹ را ببینید). مثلث AMQ نیز متساوی‌الساقین و در رأس



شکل ۱۹۹

M قائم‌الزاویه است. بنابر مسألهٔ ۳۱۸، طول پاره‌خطهای AP و QR برابر است و بر خطهایی عمود برهم واقع‌اند.

ب) **راه‌حل اول.** فرض کنید M نقطهٔ وسط BD باشد (شکل ۲۰۰ را ببینید). بنابر مسألهٔ ۳۱۹ (که در مورد مثلث ABD به‌کار گرفته شود)، مثلث PMS متساوی‌الساقین و در رأس M قائم‌الزاویه است. به‌همین ترتیب مثلث QMR متساوی‌الساقین و در رأس M قائم‌الزاویه است. بنابر مسألهٔ ۳۱۸، طول پاره‌خطهای PR و QS برابر است و بر خطهایی عمود برهم واقع‌اند.



شکل ۲۰۰

راه‌حل دوم. فرض کنید رأسهای A، B، C و D به‌ترتیب متناظر با عددهای مختلط $۲Z_۱$، $۲Z_۲$، $۲Z_۳$ و $۲Z_۴$ باشند، یعنی اگر در دستگاه مختصات دکارتی، A نقطهٔ $(۲x_۱, ۲y_۱)$ باشد، آنگاه $Z_۱ = x_۱ + iy_۱$. در این‌صورت

$$P = Z_۱ + Z_۲ + i(Z_۱ - Z_۲)$$
$$Q = Z_۲ + Z_۳ + i(Z_۲ - Z_۳)$$
$$R = Z_۳ + Z_۴ + i(Z_۳ - Z_۴)$$
$$S = Z_۴ + Z_۱ + i(Z_۴ - Z_۱)$$

بنابراین

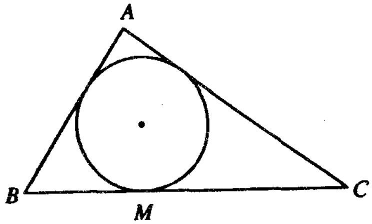
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (Z_۳ + Z_۴ - Z_۱ - Z_۲) + i(Z_۲ + Z_۳ - Z_۱ - Z_۴)$$

و

$$\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ} = (Z_۱ + Z_۴ - Z_۲ - Z_۳) + i(Z_۳ + Z_۴ - Z_۱ - Z_۲)$$

و درنتیجه $i\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$، یعنی وقتی‌که صفحه به‌اندازهٔ ۹۰° در جهت پادساعتگرد حول O دوران کند، تصویر پاره‌خط PR پاره‌خط QS است.

ملاحظه. مسأله‌های ۳۱۹ و ۳۲۰(الف) حالتهای خاص ۳۲۰(ب) هستند.



شکل ۲۰۱

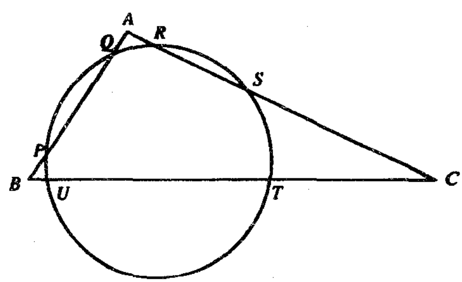
مسألهٔ ۳۲۱. الف) در شکل ۲۰۱ دایرهٔ محاطی $\triangle ABC$ را نشان داده‌ایم. اگر به‌همین مرکز دایره‌ای به شعاع بزرگتر رسم کنیم که شعاعش به‌مقدار دلخواه ما از شعاع دایرهٔ محاطی بزرگتر است، دایرهٔ بزرگتر هر ضلع مثلث را در دو نقطهٔ متمایز قطع می‌کند. پس کران پایین مورد نظر از شعاع دایرهٔ محاطی بزرگتر نیست. از طرف دیگر، دایره‌ای به شعاع کوچکتر از شعاع دایرهٔ محاطی در نظر بگیرید. اگر این دایره BC را در دو نقطه قطع کند به‌طوری‌که M بین این دو نقطه واقع باشد (یا بر یکی از آنها منطبق باشد)، AB و AC را قطع نمی‌کند. اگر این دایره BC را در دو نقطه بین M و C قطع کند، AB را قطع نمی‌کند. پس چنین دایره‌ای هیچ‌گاه هر سه ضلع مثلث را در دو نقطهٔ متمایز قطع نمی‌کند. بنابراین، کران پایین موردنظر شعاع دایرهٔ محاطی است.

ب) به‌آسانی معلوم می‌شود که کران بالای موردنظر باید بزرگتر از یا برابر با R باشد. برای اینکه متوجه شوید دایره‌ای از نوع بیان شده چقدر ممکن است بزرگ باشد، دایره‌ای مانند $PQRSTU$ (شکل ۲۰۲ را ببینید) در نظر بگیرید که شرایط بیان‌شده را داشته باشد. با انجام سه کار می‌توانیم دایره‌های قابل‌قبولی به‌اندازهٔ این دایره یا بزرگتر از آن به‌دست آوریم:

۱. ضمن اینکه $\overline{PQ}$ را ثابت نگاه می‌دارید، P و Q را به‌طرف B پایین بکشید تا دو نقطهٔ R و S به‌هم نزدیک شوند؛

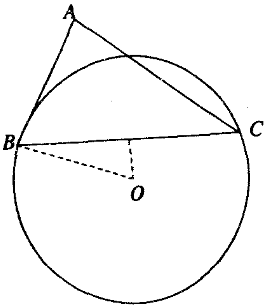
۲. دایره را در جهت ساعتگرد حول P دوران دهید تا دو نقطهٔ R و S به‌هم نزدیک شوند؛

۳. ضمن اینکه P و Q را ثابت نگاه می‌دارید، دایره را آنقدر بزرگ کنید که S و T در C به‌هم نزدیک شوند.



شکل ۲۰۲

با انجام این کارها می‌توانیم دایره‌ای بزرگتر از دایره‌ای که کار را با آن شروع می‌کنیم به‌دست آوریم، به‌طوری‌که در آن P و Q به‌اندازهٔ دلخواه به B نزدیک باشند و S و T به C بسیار نزدیک باشند. پس هر دایرهٔ قابل‌قبول کوچکتر از دایره‌ای است که در B بر AB مماس است و از C می‌گذرد، و می‌توانیم



شکل ۲۰۳

دایره‌های قابل‌قبولی بیابیم که شعاعشان به‌اندازهٔ دلخواه به‌شعاع این دایره نزدیک باشد.

اگر a طول BC باشد، شعاع دایرهٔ مذکور (OB در شکل ۲۰۳) برابر $\frac{a}{۲}\csc B$ است. اما $a = ۲R\sin A$ (R شعاع دایرهٔ محیطی است). بنابراین کران بالای شعاع دایره‌های قابل‌قبول $\frac{R\sin A}{\sin B}$ است که مگر در حالتی‌که $A = B$ از R بزرگتر است (چون $A > B$ و $\pi - A > B$).

مسألهٔ ۳۲۲. الف) $(۰,۰)$ تنها جواب $x + ۲y = ۰$ است؛ پس $f(۰) = ۱$. همچنین، $(۱,۰)$ تنها جواب $x + ۲y = ۱$ است؛ پس $f(۱) = ۱$.

اکنون فرض کنید $n \geqslant ۲$. معلوم است که $(n,۰)$ جوابی از $x + ۲y = n$ است. نظیر هر جواب دیگری مانند (a,b)، $b \geqslant ۱$، جوابی از $x + ۲y = n - ۲$، یعنی $(a, b - ۱)$، وجود دارد. بنابراین

$$f(n) = ۱ + f(n - ۲), \qquad n \geqslant ۱$$

با استفادهٔ مکرر از این رابطهٔ بازگشتی نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} f(n) &= ۱ + f(n-۲) = ۲ + f(n-۴) \\ &= ۳ + f(n-۶) = \cdots \\ &= \begin{cases} \frac{n}{۲} + f\left(n - ۲\left(\frac{n}{۲}\right)\right) = \frac{n}{۲} + f(۰) = \frac{n}{۲} + ۱ & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \frac{n-۱}{۲} + f\left(n - ۲\left(\frac{n-۱}{۲}\right)\right) = \frac{n-۱}{۲} + f(۱) = \frac{n-۱}{۲} + ۱ & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases} \\ &= \left[\frac{n}{۲}\right] + ۱ \end{aligned}$$

این دستور را از راه دیگری نیز می‌توانیم به‌دست آوریم. توجه کنید که به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی مانند b، $۰ \leqslant b \leqslant \frac{n}{۲}$، جوابی مانند (a,b) برای $x + ۲y = n$ وجود دارد.

ب) به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $g(۰) = g(۱) = ۱$ و $g(۲) = ۲$. وقتی‌که $n \geqslant ۳$، جوابهایی مانند (a,b,c) برای $x + ۲y + ۳z = n$، که در آنها $c = ۰$، در $x + ۲y = n$ صدق می‌کنند و تعداد این جوابها $f(n) = \left[\frac{n}{۲}\right] + ۱$ است. هر جواب $x + ۲y + ۳z = n$ مانند (a,b,c)، که در آن $c \geqslant ۱$، نظیر جواب $(a,b,c - ۱)$ برای $x + ۲y + ۳z = n - ۳$ است. بنابراین

$$g(n) = g(n-۳) + \left[\frac{n}{۲}\right] + ۱, \qquad n \geqslant ۳$$

مسألهٔ ۳۲۳. معادلهٔ مفروض هم‌ارز است با

$$(x - y)^۲ + (x - z)^۲ + x^۲ = ۰$$

درنتیجه $x = y = z = ۰$ تنها جواب معادله است.

مسألهٔ ۳۲۴. فرض کنید P، E و N به‌ترتیب قیمت یک مداد، یک پاک‌کن و یک دفتر برحسب تومان باشند. P، E و N عددهایی طبیعی‌اند به‌طوری‌که

$$P+E+N=۱۰۰$$

$$N>۲P$$

$$۳P>۴E$$

$$۳E>N$$

می‌دانیم که $P<\frac{N}{۲}<\frac{۳E}{۲}$؛ درنتیجه،

$$۱۰۰=P+E+N<\frac{۳E}{۲}+E+۳E=\frac{۱۱}{۲}E$$

یعنی

$$E>\frac{۲۰۰}{۱۱}>۱۸$$

همچنین $N>۲P>\frac{۸}{۳}E$؛ درنتیجه،

$$۱۰۰=P+E+N>\frac{۴E}{۳}+E+\frac{۸E}{۳}=۵E$$

یعنی $E<۲۰$ و بنابراین $۱۸<E<۲۰$؛ پس $E=۱۹$. اکنون می‌توان نوشت

$$۸۱=N+P>۲P+P=۳P>۴E=۴(۱۹)=۷۶$$

یعنی $۷۶<۳P<۸۱$؛ پس $P=۲۶$. سرانجام

$$N=۱۰۰-P-E=۱۰۰-۱۹-۲۶=۵۵$$

مسألهٔ ۳۲۵. اگر مجموع درایه‌های هر سطر برابر s باشد، مجموع درایه‌های هر ستون نیز باید برابر s باشد (دلیل این امر را بیان کنید) و نیازی به تعویض درایه‌ها نیست. اگر مجموع درایه‌های سطری کوچکتر از s باشد، ستونی نیز وجود دارد که مجموع درایه‌هایش کوچکتر از s است؛ درایهٔ مشترک میان این سطر و ستون را آنقدر بزرگ کنید که عدد بزرگتر میان مجموع درایه‌های سطر و مجموع درایه‌های ستون موردبحث برابر s شود. کار را به‌همین ترتیب ادامه دهید.

در مثال بیان‌شده در مسأله، اگر $s=۱$، آنچه در بالا گفتیم چنین انجام می‌شود

$$\begin{pmatrix} ۳ & -۵ & ۲ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۱۴ & -۵ & ۲ \\ -۶ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} ۱۴ & -۵ & ۲ \\ -۴ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۱۴ & -۵ & ۲ \\ -۴ & ۱۴ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} ۱۴ & -۵ & ۲ \\ -۴ & ۱۴ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۸ \end{pmatrix}$$

مسألهٔ ۳۲۶. مسأله تعیین الگوی دنباله‌ای است که این‌طور آغاز می‌شود ۱۴، ۳۸، ۷۴، ۱۲۲، ...

فرض کنید $g(n)$ جملهٔ nاُم این دنباله باشد. توجه کنید که تفاضلهای جمله‌های پی‌درپی عبارت‌اند از

$$g(۲) - g(۱) = ۲۴$$
$$g(۳) - g(۲) = ۳۶$$
$$g(۴) - g(۳) = ۴۸$$

بنابراین به‌نظر می‌رسد که

$$g(n) - g(n-۱) = ۱۲n, \qquad n = ۲, ۳, ۴, \cdots$$

اگر این برابریها را باهم جمع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$g(n) - g(۱) = ۱۲(۲ + ۳ + \cdots + n), \qquad n \geqslant ۲$$

و یا

$$\begin{aligned} g(n) &= ۱۴ + ۱۲(۲ + ۳ + \cdots + n) \\ &= ۱۴ + ۱۲\left\{\frac{n(n+۱)}{۲} - ۱\right\} \\ &= ۲ + ۶n(n+۱) = ۶n^۲ + ۶n + ۲ \end{aligned}$$

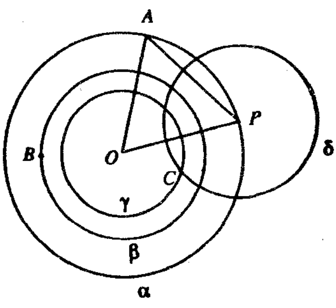
از این رابطه قانون کلی زیر به ذهن می‌رسد

$$(۲n)^۲ + (۲n+۱)^۲ + (۲n+۲)^۲ + (۶n^۲ + ۶n + ۲)^۲ = (۶n^۲ + ۶n + ۳)^۲$$

تحقیق درستی این قانون آسان است.

مسألهٔ ۳۲۷. برای اینکه بفهمید کار را ازکجا باید شروع کرد فرض کنید ترسیم انجام شده است. فرض کنید دایره‌ها به‌ترتیب ازکوچک به بزرگ α، β و γ باشند، ABC مثلث مطلوب و A روی α، B روی β و C روی γ باشد. دوران ۶۰° به مرکز A و درجهت مناسب باید B را به C تبدیل کند. بنابراین C باید نقطهٔ تقاطع γ و تصویر β تحت اثر این دوران باشد.

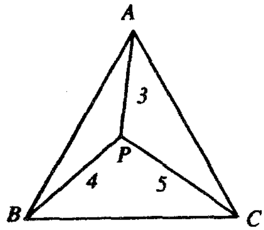
ترسیم. فرض کنید O مرکز مشترک α، β و γ، و A نقطهٔ دلخواهی روی α باشد (شکل ۲۰۴ را ببینید). مثلث متساوی‌الاضلاع AOP را رسم کنید (P روی α است). فرض کنید δ دایره‌ای به مرکز P و شعاعی برابر با شعاع β باشد. چون $\overline{OP}$ برابر با شعاع α است، با توجه به اندازهٔ شعاعها، دایره‌های δ و γ باید یکدیگر را قطع کنند. فرض کنید C یکی از نقاط تقاطع این دو دایره باشد. کمانی به مرکز A و شعاع $\overline{AC}$ رسم کنید که β را در B قطع کند به‌طوری‌که جهت مثلثهای AOP و ABC یکی باشد. در این‌صورت ABC مثلث مطلوب است.



شکل ۲۰۴

برهان. دورانی به مرکز A درنظر بگیرید که P را به O ببرد. این دوران دایرهٔ δ را به دایرهٔ β، و بنابراین

نقطهٔ C را به نقطه‌ای مانند B' روی β تبدیل می‌کند. بنابراین $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AB'}$ و جهت مثلثهای AOP و $AB'C$ یکی است. بنابراین $B = B'$ و درنتیجه $\angle BAC = ۶۰^\circ$. درنتیجه مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.



شکل ۲۰۵

تبصره. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و نقطهٔ P درون آن مفروض‌اند به‌طوری‌که $\overline{PA} = ۳$، $\overline{PB} = ۴$ و $\overline{PC} = ۵$. $\overline{AB}$ را بیابید. (شکل ۲۰۵ را ببینید.)

راهنمایی. شکل را ۶۰° حول A دوران دهید تا اینکه C روی B، B روی B'، و P روی P' قرار گیرد. ثابت کنید $\angle BPP' = ۹۰^\circ$ و $\angle APB = ۱۵۰^\circ$.

مسألهٔ ۳۲۸. مسأله یافتن بزرگترین توان ۱۰ است که !۱۰۰۰۰ را می‌شمارد. چون تعداد مضربهایی از ۲ که !۱۰۰۰۰ را می‌شمارند بیشتر از تعداد مضربهایی از ۵ است که !۱۰۰۰۰ را می‌شمارند، نمای بزرگترین توان ۱۰ که !۱۰۰۰۰ را می‌شمارد برابر است با نمای بزرگترین توان ۵ که !۱۰۰۰۰ را می‌شمارد. به‌ازای هر مضرب ۵ که بزرگتر از ۱۰۰۰۰ نباشد یک عامل ۵ داریم (تعداد این مضربها ۲۰۰۰ است)؛ به‌ازای هر مضرب ۲۵ یک عامل ۵ دیگر نیز داریم (۴۰۰ عامل)؛ به‌ازای هر مضرب ۱۲۵ یک عامل ۵ دیگر نیز داریم (۸۰ عامل)؛ به‌ازای هر مضرب ۶۲۵ یک عامل ۵ دیگر نیز داریم (۱۶ عامل)؛ به‌ازای هر مضرب ۳۱۲۵ یک عامل ۵ دیگر نیز داریم (۳ عامل). بنابراین، تعداد صفرها برابر است با

$$۲۰۰۰ + ۴۰۰ + ۸۰ + ۱۶ + ۳ = ۲۴۹۹$$

در حالت‌کلی، تعداد صفرهایی که در انتهای $n!$ قرار دارند برابر است با

$$\left[\frac{n}{۵}\right] + \left[\frac{n}{۵^۲}\right] + \left[\frac{n}{۵^۳}\right] + \cdots = \sum_{k=۱}^{\infty} \left[\frac{n}{۵^k}\right]$$

مسألهٔ ۳۲۹. این مرد $\frac{۳}{۸}$ طول پل را در مدتی که طول می‌کشد تا قطار به A برسد می‌دود. اگر به‌طرف B بدود، وقتی قطار به A می‌رسد $\frac{۳}{۴}$ فاصلهٔ A تا B را پیموده است. به‌این‌ترتیب یک‌چهارم فاصلهٔ A تا B را در مدتی که طول می‌کشد تا قطار کلِّ این فاصله را بپیماید می‌دود. بنابراین، سرعت مرد $\frac{۱}{۴}$ سرعت قطار، یعنی ۲۰ کیلومتر بر ساعت است.

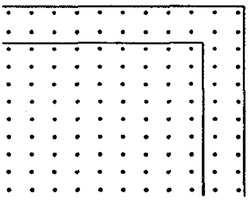
مسألهٔ ۳۳۰. راه‌حل اول. روشن است که به‌ازای $n \geqslant ۲$،

$$\begin{aligned} u_n &= ۸(n-۱) + u_{n-۱} \\ &= ۸(n-۱) + ۸(n-۲) + u_{n-۲} \\ &\vdots \\ &= ۸[(n-۱) + (n-۲) + \cdots + ۱] + u_۱ \\ &= ۴n(n-۱) + ۱ = (۲n-۱)^۲ \end{aligned}$$

راه‌حل دوم (به‌استقرا). نتیجه به‌ازای $n = 1$ برقرار است. فرض کنید $u_n = (2n-1)^2$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 8n = (2n-1)^2 + 8n \\ &= (2n+1)^2 = (2(n+1)-1)^2 \end{aligned}$$

راه‌حل سوم (از روی شکل ۲۰۶). مربعی که در گوشهٔ پایین شکل ۲۰۶ قرار دارد حاوی $(2n-1)^2$ نقطه است. در گونیای کنار این مربع $2(2n-1)+2$ جفت نقطه، یعنی $8n$ نقطه وجود دارد. بنابراین (چون $u_1 = 1$) می‌توانیم یک نقطه انتخاب کنیم و با اضافه کردن گونیاهایی به‌صورت نشان داده شده، مربعهایی بسازیم که هریک از آنها حاوی تعدادی فرد از نقاط است.



شکل ۲۰۶

مسألهٔ ۳۳۱. الف) بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی به‌ازای هر مقداری از x، y، z و w،

$$xyzw \leqslant \frac{1}{4}(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + w^4)$$

فرض کنید

$$\begin{aligned} &x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + w^4 - 4xyzw \\ &\qquad = g_1(x,y,z,w)^2 + g_2(x,y,z,w)^2 + \cdots + g_k(x,y,z,w)^2 \end{aligned}$$

که در آن g_1، g_2، $\cdots$ و g_k چندجمله‌ای‌اند. چون طرف چپ همگن از درجهٔ ۴ است، هریک از g_iها باید همگن از درجهٔ ۲ باشد. (در ملاحظهٔ انتهای این راه‌حل استدلالی برای این حکم آورده‌ایم.)

هیچ‌یک از g_iها شامل جمله‌ای از نوع ax^2 نیست، چون در این‌صورت g_j^2 شامل جمله‌ای از نوع a^2x^4 خواهد بود که با جملهٔ مشابهی از یکی از g_j^2ها یا یکی از جمله‌های طرف چپ حذف نمی‌شود. به‌دلیلی مشابه هیچ‌یک از g_iها شامل جمله‌ای نابدیهی از y^2 یا z^2 نیست.

آیا ممکن است یکی از چندجمله‌ایها، مثلاً g_i، شامل جمله‌ای از نوع bwx باشد؟ اگر چنین باشد، g_i^2 شامل جمله‌ای به‌شکل $b^2x^2w^2$ خواهد بود. چون در سمت چپ جمله‌ای از این نوع وجود ندارد، این جمله باید با جمله‌های مشابهی که ضریبشان منفی است حذف شود. چنین جمله‌هایی فقط ممکن است از ضرب x^2 و w^2 حاصل شوند و ما این امکان را که یکی از چندجمله‌ایها شامل جمله‌ای از x^2 باشد کنارگذاشته‌ایم. پس هیچ‌یک از g_iها شامل جمله‌ای از xw، و همچنین yw و zw، نیست. اما در این‌صورت هریک از g_iها به‌شکل زیر خواهد بود

$$axy + bxz + cyz + dw^2$$

پس هیچ g_i^2ای شامل جمله‌ای از $xyzw$ نخواهد بود، و بنابراین از مجموع این چندجمله‌ایها جملهٔ $-4xyzw$ که در سمت چپ وجود دارد به‌دست نمی‌آید.

ب) بازهم نابرابری مطلوب نتیجهٔ نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی است. فرض کنید

$$x^۴y^۲ + y^۴z^۲ + z^۴x^۲ - ۳x^۲y^۲z^۲ = \sum_{i=۱}^{m} h_i(x,y,z)^۲$$

هریک از h_iها باید همگن از درجهٔ ۳ باشد و هیچ‌یک از آنها شامل جمله‌ای از $x^۳$، $y^۳$ و یا $z^۳$ نیست. در واقع، در آنها جملهٔ $xy^۲$ وجود ندارد. اگر چنین جمله‌ای داشته باشیم یکی از $h_i^۲$ها شامل جملهٔ $ax^۲y^۴$، $a > ۰$، خواهد بود که فقط با جمله‌ای که از حاصل‌ضرب $(x^۲y)y^۳$ ایجاد شود قابل حذف شدن است، و این ناممکن است. به‌همین‌ترتیب، جمله‌های $yz^۲$ و $zx^۲$ در هیچ‌یک از h_iها وجود ندارند.

طرف چپ شامل جملهٔ $-۳x^۲y^۲z^۲$ است و این به معنی آن است که دست‌کم یکی از h_iها شامل جمله‌هایی از $x^۲y$ و $yz^۲$، یا از $y^۲z$ و $zx^۲$، و یا از $z^۲x$ و $xy^۲$ است. اما این نتیجه با آنچه قبلاً به‌دست آوردیم تناقض دارد.

بنابراین هیچ‌یک از چندجمله‌ایهای (الف) و (ب) با مجموع مربعهای چندجمله‌ایهایی حقیقی برابر نیست.

ملاحظه. در بخشی از هریک از استدلالهای (الف) و (ب) احتیاج به استفاده از حکم زیر است:

فرض کنید $f(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ چندجمله‌ایی همگن از درجهٔ $۲r$ باشد که بتوان آن‌را به‌صورت مجموع مربعهای چندجمله‌ایهای $f_i(x_۱, x_۲, \cdots, x_n)$ نوشت. در این‌صورت، هریک از f_iها باید همگن از درجهٔ r باشد.

به بیان دیگر، باید ثابت کنیم که اگر $f = f_۱^۲ + f_۲^۲ + \cdots + f_k^۲$، هر جملهٔ هریک از f_iها تک‌جمله‌ایی از درجهٔ r به‌شکل $cx_۱^{a_۱}x_۲^{a_۲}\cdots x_n^{a_n}$ $(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = r)$ است.

فرض کنید p کمترین درجه در میان درجهٔ جمله‌های همهٔ f_iها باشد. فرض کنید $u(x_۱, \cdots, x_n)$ تک‌جمله‌ایی به‌شکل حاصل‌ضرب توانهای x_iها باشد که درجهٔ آنها p است و دست‌کم در یکی از f_iها با ضریب ناصفر ظاهر شده‌اند. در این‌صورت، به‌ازای هر i،

$$f_i = c_i u + v_i$$

که در آن c_i مقدار ثابتی است (دست‌کم یکی از c_iها برابر صفر نیست) و v_i مجموع جمله‌هایی است که درجهٔ آنها دست‌کم p است (و هیچ‌یک از آنها در u نیست). در این‌صورت

$$\sum_{i=۱}^{k} f_i^۲ = \left(\sum_{i=۱}^{k} c_i^۲\right)u^۲ + \sum_{i=۱}^{k}(۲c_i uv_i + v_i^۲)$$

چون هیچ‌یک از چندجمله‌ایهای uv_i و v_i شامل جمله‌ای از $u^۲$ نیست، ضریب $u^۲$ در $f = \sum f_i^۲$ باید مثبت باشد. بنابراین $u^۲$ باید از درجهٔ $۲r$ و u باید از درجهٔ r باشد.

از همین نحوهٔ استدلال معلوم می‌شود که هیچ‌یک از f_iها شامل جمله‌ای از درجهٔ بزرگتر از r نیست.

مسألهٔ ۳۳۲. الف) فرض کنید ریشه‌ها $n - ۱$، n، و $n + ۱$ باشند. در این‌صورت مجموع ریشه‌ها

$p = ۳n$ و حاصل‌ضرب آنها $q = n^۳ - n$ است و

$$۳n^۲ - ۱ = (n-۱)n + (n-۱)(n+۱) + n(n+۱) = ۱۱$$

بنابراین یا $n = ۲$، $p = ۶$ و $q = ۶$، و یا $n = -۲$، $p = -۶$ و $q = -۶$.

ب) اگر همهٔ ریشه‌ها برابر با r باشند، چندجمله‌ای موردنظر برابر است با $(x-r)^۳$ و درنتیجه $p = ۳r$، $q = r^۳$ و $۳r^۲ = ۱۱$. بنابراین $r = \pm\sqrt{\frac{۱۱}{۳}}$ و p و q را می‌توان یافت.

مسألهٔ ۳۳۳. **راه‌حل اول** (به‌استقرا). اگر $n = ۱$، $۱۸ = ۱۰ - ۲۴n + ۲^{۲n}$. فرض کنید حکم به‌ازای $n \geqslant ۱$ برقرار باشد؛ در این‌صورت،

$$۲^{۲(n+۱)} + ۲۴(n+۱) - ۱۰ = ۴(۲^{۲n} + ۲۴n - ۱۰) - ۱۸(۴n - ۳)$$

یعنی حکم به‌ازای $n + ۱$ برقرار است.

راه‌حل دوم (مستقیم). عبارت مفروض آشکارا بر ۲ بخش‌پذیر است. همچنین

$$۲^{۲n} + ۲۴n - ۱۰ \equiv (۳-۱)^{۲n} + ۶n - ۱ \equiv (-۲n \times ۳ + ۱) + ۶n - ۱ = ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ ۹})$$

و بنابراین

$$۲^{۲n} + ۲۴n - ۱۰ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ ۱۸})$$

مسألهٔ ۳۳۴. فرض کنید

$$A = \{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\}, \quad B = \{۲n - a_۱, ۲n - a_۲, \cdots, ۲n - a_n\}$$

چون همهٔ عضوهای A متمایزند، عضوهای B نیز متمایزند. گذشته از این، چون

$$۱ \leqslant a_i \leqslant ۲n - ۱, \qquad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

پس

$$۱ \leqslant ۲n - a_i \leqslant ۲n - ۱, \qquad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

چون

$$A \cup B \subseteq \{۱, ۲, \cdots, ۲n - ۱\}$$

پس

$$\#A = \#B = n, \qquad \#(A \cup B) \leqslant ۲n - ۱ < ۲n$$

(تعداد عضوهای مجموعه‌ای مانند X را با $\#X$ نشان می‌دهیم.) بنابراین $A \cap B \neq \varnothing$، یعنی زیروندهایی مانند i و j وجود دارند به‌طوری‌که

$$a_i = ۲n - a_j$$

مسألهٔ ۳۳۵. در مورد هریک از عددهای مفروض، قدرمطلق تفاضل آن عدد با نزدیکترین مضرب $۲n$ به‌آن‌را حساب کنید. نتیجه یکی از $n + ۱$ عدد ۰، ۱، ۲، $\cdots$ و n خواهد بود. چون $n + ۲$ عدد صحیح

داریم، دست‌کم یکی از این تفاضلها، مثلاً r، دوبار ظاهر می‌شود (بنابر اصل لانه کبوتری). درنتیجه دو عدد مانند u و v بین عددهای مفروض وجود دارند به‌طوری‌که (به‌ازای عددهایی صحیح مانند p و q) یکی از برابریهای زیر درست است

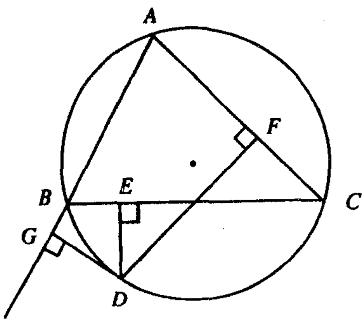
$$u = ۲np + r, \qquad v = ۲nq + r \qquad (۱)$$

$$u = ۲np + r, \qquad v = ۲nq - r \qquad (۲)$$

$$u = ۲np - r, \qquad v = ۲nq - r \qquad (۳)$$

در حالتهای (۱) و (۳)، $u - v$ بر $۲n$ بخش‌پذیر است؛ در حالت (۲)، $u + v$ بر $۲n$ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۳۳۶. فرض کنید عمودها AC ،BC و امتداد AB را به‌ترتیب در E، F و G قطع کنند (شکل ۲۰۷).



شکل ۲۰۷

پاره‌خطهای GE ،EF ،BD و CD را رسم کنید.
چون $AGDF$ محاطی است، پس

$$\angle GDF + \angle GAF = ۱۸۰^\circ$$

چون $ABCD$ محاطی‌است، پس $\angle BDC + \angle BAC = ۱۸۰^\circ$.
بنابراین $\angle GDF = \angle BDC$ و درنتیجه

$$\angle BDG = \angle CDF$$

چون $BGDE$ محاطی است، $\angle BDG = \angle BEG$. چون $DEFC$ محاطی است، $\angle CDF = \angle CEF$. بنابراین $\angle BEG = \angle CEF$؛ درنتیجه، G، E و F بر یک خط مستقیم واقع‌اند. این خط را خط سیمسون می‌نامند ولی در واقع در سال ۱۹۲۷ ویلیام والاس آن‌را پیدا کرد.

مسألهٔ ۳۳۷. بدون کاستن از کلیت استدلال می‌توانیم ضریب پیشرو را در چندجمله‌ای درجهٔ سوم موردبحث ۱ بگیریم. بنابراین

$$x^۳ - px^۲ + qx - r \equiv (x-u)(x-v)(x-uv)$$

که در آن p، q و r عددهایی گویا هستند. با بسط دادن طرف راست و برابر قرار دادن ضرایب به‌دست می‌آوریم

$$p = u + v + uv, \quad q = uv + u^۲v + uv^۲, \quad r = u^۲v^۲$$

از این معادله‌ها به‌آسانی می‌توان نتیجه گرفت که وقتی $p \neq -۱$،

$$uv = \frac{q+r}{۱+p}$$

و uv گویاست. اگر $p = -۱$، آنگاه $(۱+u)(۱+v) = ۰$ و درنتیجه یا $u = -۱$ و یا $v = -۱$.

مسألهٔ ۳۳۸. از حالتهایی که $n = ۱$ و $n = ۲$ معلوم می‌شود که ۱ و ۵ ممکن است بزرگترین

مقسوم‌علیه مشترک باشند. هر مقسوم‌علیه مشترک $n^۲ + ۱$ و $(n+۱)^۲ + ۱$ باید تفاضل آنها یعنی $۲n + ۱$ را بشمارد. بنابراین، هریک از آنها باید

$$۴(n^۲ + ۱) - (۲n + ۱)(۲n - ۱) = ۵$$

را بشمارد.

تبصره. ثابت کنید که بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد موردنظر ۵ است اگر و فقط اگر

$$n \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۵)$$

مسألهٔ ۳۳۹. اگر $x = \cos ۳۶^\circ$، آنگاه $\cos ۷۲^\circ = ۲x^۲ - ۱$. چون

$$\cos ۳۶^\circ - \cos ۷۲^\circ = ۲ \sin ۵۴^\circ \sin ۱۸^\circ = ۲ \cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ$$

پس $x - ۲x^۲ + ۱ = ۴x^۳ - ۲x$ و بنابراین

$$۴x^۳ + ۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$$

با توجه به اینکه ۱− ریشه‌ای از این معادله است،

$$(۴x^۲ - ۲x - ۱)(x + ۱) = ۰$$

چون $x = \cos ۳۶^\circ \neq -۱$، پس

$$۴x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$$

بنابراین

$$\cos ۳۶^\circ - \cos ۷۲^\circ = x - (۲x^۲ - ۱) = -\frac{۱}{۲}(۴x^۲ - ۲x - ۱) + \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

و

$$\cos ۳۶^\circ \cos ۷۲^\circ = \frac{۱}{۲}(\cos ۳۶^\circ - \cos ۷۲^\circ) = \frac{۱}{۴}$$

مسألهٔ ۳۴۰. توجه کنید که

$$۷^{\frac{۱}{۲}} + ۷^{\frac{۱}{۳}} + ۷^{\frac{۱}{۴}} < ۹^{\frac{۱}{۲}} + ۸^{\frac{۱}{۳}} + ۱۶^{\frac{۱}{۴}} = ۳ + ۲ + ۲ = ۷$$

و

$$۴^{\frac{۱}{۲}} + ۴^{\frac{۱}{۳}} + ۴^{\frac{۱}{۴}} > ۲ + ۱ + ۱ = ۴$$

تبصره. آیا می‌توانید راه ساده‌ای برای تعیین اینکه به‌ازای $n = ۵$ و $n = ۶$ از $n^{\frac{۱}{۲}} + n^{\frac{۱}{۳}} + n^{\frac{۱}{۴}}$ و n کدام‌یک بزرگتر است بیابید؟

مسألهٔ ۳۴۱. هریک از دو بازیکن در صورتی در موقعیت برد قرار می‌گیرد که حریف عددی بین ۴۵ و ۵۵ و یا خود این دو عدد را در اختیار او قرار دهد. بنابراین کسی که به عدد ۴۴ برسد، در صورتی‌که درست بازی کند برنده می‌شود.

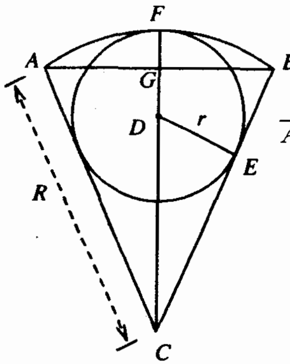
با همین استدلال، کسی که به عدد ۳۲، یا ۲۰ و یا ۸ برسد در موقعیت برد قرار می‌گیرد.

بنابراین اگر بازیکن اول درست بازی کند حتماً برنده می‌شود. او باید بازی را با عدد ۸ شروع کند و سپس هربار عددی را انتخاب کند که مجموع را به ۲۰، ۳۲، ۴۴ و ۵۶ برساند.

تبصره‌ها. *الف)* آیا می‌توان به‌جای ۵۶ عدد دیگری را در نظر گرفت که بازیکن دوم امکان برد داشته باشد؟ همهٔ امکانات را بررسی کنید.

ب) دو بازیکن بازی زیر را انجام می‌دهند. بازیکن اول عدد صحیحی بین ۱ و ۵۵ و یا خود این دو عدد را انتخاب می‌کند. بازیکن دوم عددی طبیعی را که بزرگتر از دو برابر عدد انتخابی بازیکن اول نباشد با آن جمع می‌کند. بازیکنان به‌همین‌ترتیب یکی‌درمیان بازی می‌کنند و هریک عدد صحیحی را که از دوبرابر عدد انتخابی بازیکن قبلی بزرگتر نیست با مجموع قبلی جمع می‌کند. بازیکنی که زودتر به ۵۶ برسد برنده است. امکان برد کدام بازیکن بیشتر است؟

ج) نوعی بازی مشابه بازی قسمت (ب) درنظر بگیرید، با این تفاوت که هر بازیکن باید عددی را که بزرگتر از عدد انتخابی بازیکن قبلی نیست با مجموع جمع کند. در این‌صورت امکان برد کدام بازیکن بیشتر است؟



شکل ۲۰۸

مسألهٔ ۳۴۲. در شکل ۲۰۸،

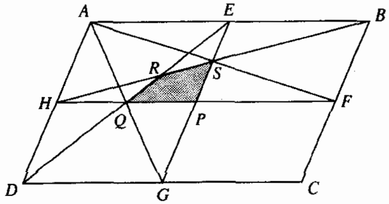
$$\overline{AB} = ۲a,\ \ \overline{AC} = \overline{BC} = R,\ \ \overline{DE} = \overline{DF} = r,\ \ \overline{CD} = R - r$$

چون مثلثهای GCB و DCE متشابه‌اند،

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BG}}$$

بنابراین $\frac{R}{a} = \frac{R-r}{r}$، یعنی

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{R} + \frac{۱}{a}$$



شکل ۲۰۹

مسألهٔ ۳۴۳. متوازی‌الاضلاع را با وصل کردن نقاط وسط ضلعهای روبه‌رو به‌یکدیگر به چهار متوازی‌الاضلاع تقسیم کنید (شکل ۲۰۹ را ببینید). متوازی‌الاضلاع سمت چپ بالا، یعنی $AEPH$، را در نظر بگیرید. مساحت چهارضلعی $PQRS$ مساحت بخشی از شکل موردنظر است که درون $AEPH$ قرار دارد.

ابتدا توجه کنید که A، R و P همخط‌اند و $\overline{AP} = ۳\overline{RP}$. دلیل این مطلب این است که R نقطهٔ تقاطع دو میانهٔ BH و DE از $\triangle ADB$ و بنابراین روی میانهٔ سوم، یعنی AP، واقع است. پس اگر نماد $[\cdots]$ را برای مساحت به‌کار ببریم،

$$[APS] = ۳[RPS],\ \ [AQP] = ۳[RQP]$$

بنابراین

$$[PQRS] = \frac{۱}{۳}[PQAS] = \frac{۱}{۶}[AEPH]$$

می‌توانیم همین نحوهٔ استدلال را در مورد سه متوازی‌الاضلاع دیگر تکرار کنیم و نتیجه بگیریم که مساحت شکل محدود به AG، AF، BH، BG، CE، CH، DF و DE برابر است با

$$\frac{۱}{۶}[ABCD]$$

مسألهٔ ۳۴۴. نه. در واقع به‌استقرا ثابت می‌کنیم

$$۱ < u_n < \frac{۱}{۱-u}, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

ابتدا توجه کنید که $۱ + u < \frac{۱}{۱-u}$. روشن است که

$$۱ < ۱ + u = u_۱, \;\; u_۱ = ۱ + u < \frac{۱}{۱-u}$$

اکنون فرض کنید که به‌ازای nای، $n \geqslant ۲$،

$$۱ < u_n < \frac{۱}{۱-u}$$

در این‌صورت

$$۱ = ۱ - u + u < \frac{۱}{u_n} + u = u_{n+۱}$$

$$u_{n+۱} = \frac{۱}{u_n} + u < ۱ + u < \frac{۱}{۱-u}$$

بنابراین

$$۱ < u_{n+۱} < \frac{۱}{۱-u}$$

و برهان کامل شده است.

تبصره. درستی جواب را با تعیین صریح u_n تحقیق کنید. راهی برای انجام این‌کار تعریف دنبالهٔ v_n است به‌طوری‌که $u_n = \frac{v_{n+۱}}{v_u}$. بنابراین، فرض کنید $v_۱ = ۱$، $v_۲ = ۱ + u$ و به‌طورکلی

$$v_{n+۱} = u_n v_n, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

در این‌صورت v_n باید در

$$\frac{v_{n+۲}}{v_{n+۱}} = \frac{v_n}{v_{n+۱}} + u$$

و یا

$$v_{n+۲} = uv_{n+۱} + v_n \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \cdots)$$

صدق کند. جواب عمومی این رابطهٔ بازگشتی به‌شکل

$$v_n = ar^n + bs^n$$

است که در آن a و b ثابت و r و s ریشه‌های چندجمله‌ای $t^۲ - ut - ۱$ هستند.

مسألهٔ ۳۴۵. الف) $a-b$ بر هر مقسوم‌علیه مشترک a و b بخش‌پذیر است. پس اگر $b=a+۱$، هر مقسوم‌علیه مشترک a و b باید ۱ را بشمارد.

ب) $n!+۱$.

ج) هر عدد اول مانند p که هریک از عددهای $r+۱$، $r+۲$، $\cdots$ و $۲r$ را می‌شمارد آشکارا از $۲r$ بزرگتر نیست، و بنابراین $(۲r)!+۱$ را نمی‌شمارد. بنابراین اگر $t=(۲r)!+۱$، t ویژگی موردنظر را دارد.

مسألهٔ ۳۴۶. راه‌حل اول. بله. برای ضرب کردن x در عدد منفی $-n^۲$ توجه می‌کنیم که

$$-n^۲x=n+\cfrac{۱}{-\cfrac{۱}{n}+\cfrac{۱}{n+\cfrac{۱}{x}}}$$

برای ضرب کردن x در عدد مثبت $n^۲$ توجه می‌کنیم که

$$n^۲x=n+\cfrac{۱}{-\cfrac{n+۱}{n}+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{-(n+۱)+\cfrac{۱}{x}}}}$$

راه‌حل دوم. اگر $u\neq -۱$، می‌توانیم $u^۲$ را از $u^۲=u-\left(\frac{۱}{u}+\frac{۱}{۱-u}\right)^{-۱}$ و $\frac{۱}{۲}u$ را از $\left(\frac{۱}{u}+\frac{۱}{u}\right)^{-۱}$ حساب کنیم. در این‌صورت حاصل‌ضربی مانند vw را می‌توانیم از

$$vw=\left(\frac{v+w}{۲}\right)^۲-\left(\frac{v-w}{۲}\right)^۲$$

حساب کنیم.

مسألهٔ ۳۴۷. باید توجه کرد که چنین زیرمجموعه‌ای از صفحه باید بی‌کران باشد ولی نیازی نیست که همبند باشد. مجموعه‌ای مناسب مجموعهٔ $\left\{(m,n)|\text{صحیح‌اند } n,m\right\}$ است که خطهای $x=۰$، $y=۰$، $x+y=۱$ و بسیاری خطهای دیگر محور تقارن آن هستند.

تبصره. آیا زیرمجموعه‌ای ناتهی و سره از صفحه وجود دارد که دقیقاً سه محور تقارن ناهمرس داشته باشد؟ آیا زیرمجموعه‌ای ناتهی و سره از صفحه وجود دارد که دقیقاً n محور تقارن ناهمرس داشته باشد؟

مسألهٔ ۳۴۸. $p+q$ عددی زوج است، درنتیجه $\frac{۱}{۲}(p+q)$ عدد صحیحی بین p و q است. چون p و q عددهایی اول و متوالی‌اند، عدد صحیح $\frac{۱}{۲}(p+q)$ اول نیست، یعنی برابر با حاصل‌ضرب دو یا چند عدد اول است. اکنون توجه کنید که $p+q=۲\left(\frac{p+q}{۲}\right)$، پس حکم مسأله درست است.

مسألهٔ ۳۴۹. الف) از جواب (ب) نتیجه می‌شود.

ب) فرض کنید $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ عددی گویا باشد. در این‌صورت چون

$$\sqrt{m}-\sqrt{n}=\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$$

پس $\sqrt{m}-\sqrt{n}$ هم عددی گویاست. بنابراین چون

$$\sqrt{m}=\frac{۱}{۲}(\sqrt{m}+\sqrt{n})+\frac{۱}{۲}(\sqrt{m}-\sqrt{n})$$

پس $\sqrt{m}$ هم عددی گویاست. درنتیجه m مربع کامل است. به‌طور مشابه معلوم می‌شود که n هم مربع کامل است. برعکس، اگر m و n مربع کامل باشند، $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ عددی صحیح و بنابراین گویاست.

تبصره‌ها. (۱) ثابت کنید که اگر $m_۱$، $m_۲$، $\cdots$ و m_k عددهایی طبیعی باشند، و دست‌کم یکی از m_iها مربع عددی گویا نباشد، $\sum_{i=۱}^{k}\sqrt{m_i}$ عددی گنگ است.

(۲) ثابت کنید $\sqrt[۳]{۹}+\sqrt[۳]{۳}$ عددی گویا نیست.

(۳) فرض کنید m و n عددهایی صحیح باشند. چه موقع $\sqrt[۳]{m}+\sqrt[۳]{n}$ عددی گویاست؟ (فرض کنید این عدد x باشد؛ در این‌صورت، $n=(x-\sqrt[۳]{m})^۳=x^۳-m-۳x\sqrt[۳]{mn}$.)

همچنین نگاه کنید به

Gregg N. Petruno, Sums of irrational square roots are irrational, *Math. Mag.* 61(1988) 44-45.

مسألهٔ ۳۵۰. هر انتخابی از دو نقطه از P_iها و دو نقطه از Q_jها یک نقطهٔ تقاطع به‌دست می‌دهد. با انتخاب مناسب نقاط می‌توان ترتیبی داد که همهٔ نقاط تقاطع متمایز باشند. بنابراین تعداد نقاط برابر است با

$$\binom{m}{۲}\binom{n}{۲}$$

تبصره. قطرهای nضلعی منتظم یکدیگر را در چند نقطه قطع می‌کنند؟

مسألهٔ ۳۵۱. فرض کنید

$$F(x,y,z)=(x+y+z)^۵-x^۵-y^۵-z^۵$$

چون

$$F(x,-x,z)=F(x,y,-x)=F(x,y,-y)=۰$$

(بنابر قضیهٔ عاملها) $x+y$، $x+z$ و $y+z$ عاملهای $F(x,y,z)$ هستند. فرض کنید

$$F(x,y,z)=(x+y)(x+z)(y+z)G(x,y,z) \qquad (۱)$$

در این‌صورت $G(x,y,z)$ باید چندجمله‌ایی متقارن و همگن از درجهٔ ۲ باشد؛ بنابراین، به‌شکل زیر است

$$G(x,y,z)=a(x^۲+y^۲+z^۲)+b(xy+xz+yz)$$

اگر در (۱) فرض کنیم $x = y = z = ۱$ به‌دست می‌آوریم $۸(۳a + ۳b) = ۳^۵ - ۳$ و یا $a + b = ۱۰$.
اگر در (۱) فرض کنیم $x = y = ۱$ و $z = ۰$ به‌دست می‌آوریم $۲(۲a + b) = ۲^۵ - ۲$ و یا $۲a + b = ۱۵$. درنتیجه $a = b = ۵$ و

$$G(x, y, z) = ۵(x^۲ + y^۲ + z^۲ + xy + xz + yz)$$

مسألهٔ ۳۵۲. الف) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} ۱۱۲۲۹۶^۲ - ۷۹۸۹۶^۲ &= (۱۱۲۲۹۶ - ۷۹۸۹۶)(۱۱۲۲۹۶ + ۷۹۸۹۶) \\ &= (۳۲۴۰۰)(۱۹۲۱۹۲) = ۱۸^۲ \times ۱۰^۲(۱۹۲)(۱۰۰۱) \\ &= (۲ \times ۹ \times ۳ \times ۶)(۲ \times ۵ \times ۱۰)(۲ \times ۸ \times ۱۲)(۷ \times ۱۱ \times ۱۳) \\ &= ۱۳! \end{aligned}$$

ب) با توجه به‌شکل برابری موردنظر به‌نظر می‌رسد که باید بکوشیم عامل $۱۰^۴$ را از $۶۵۱^۴ - ۵۹۹^۴$ بیرون بکشیم. بنابراین چنین می‌نویسیم

$$\begin{aligned} ۶۵۱^۴ - ۵۹۹^۴ &= (۶۵۱^۲ - ۵۹۹^۲)(۶۵۱^۲ + ۵۹۹^۲) \\ &= (۶۵۱ - ۵۹۹)(۶۵۱ + ۵۹۹)(۶۵۱^۲ + ۵۹۹^۲) \\ &= ۵۲ \times ۱۲۵۰((۶۲۵ + ۲۶)^۲ + (۶۲۵ - ۲۶)^۲) \\ &= ۲^۲ \times ۱۳ \times ۲ \times ۵^۴ \times ۲(۶۲۵^۲ + ۲۶^۲) \\ &= ۱۰^۴ \times ۱۳(۲۵^۴ + ۲۶^۲) \end{aligned}$$

و درنتیجه

$$۶۵۱^۴ - ۵۹۹^۴ - ۴۳۰^۴ - ۳۴۰^۴ - ۲۴۰^۴ = ۱۰^۴A$$

که در آن

$$\begin{aligned} A &= ۱۳(۲۵^۴ + ۲۶^۲) - (۴۳^۴ + ۳۴^۴ + ۲۴^۴) \\ &= ۱۲ \times ۲۵^۴ + ۴ \times ۱۳^۳ - (۳۴^۴ + ۲۴^۴) - (۴۳^۴ - ۲۵^۴) \\ &= ۱۲ \times ۲۵^۴ + ۴ \times ۱۳^۳ - ۱۶(۱۷^۴ + ۱۲^۴) - ۱۸ \times ۶۸ \times ۲(۳۴^۲ + ۹^۲) \\ &= ۴B \end{aligned}$$

و بازهم در آن

$$B = ۳ \times ۲۵^۴ + ۱۳^۳ - ۴(۱۷^۴ + ۱۲^۴) - ۱۷ \times ۳۶(۳۴^۲ + ۹^۲)$$

باید ثابت کنیم $A = B = ۰$. این‌کار را می‌توان با استفاده از لم زیر انجام داد. اثبات این لم را به خواننده واگذار می‌کنیم.

لم. فرض کنید N عددی صحیح و بر عددهای طبیعی $n_۱$، $n_۲$، $\cdots$ و n_k بخش‌پذیر باشد. اگر کوچکترین مضرب مشترک $n_۱$، $n_۲$، $\cdots$ و n_k بزرگتر از N باشد، آنگاه $N = ۰$.

بنابراین لم، به‌نظر می‌رسد باید ثابت کنیم که به‌ازای تعدادی کافی از عددهای صحیح مانند m که کوچکترین مضرب مشترک آنها از A بیشتر است،

$$A \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } m)$$

مقدارهایی از m را امتحان می‌کنیم که توان عددهایی اول‌اند:

$$B \equiv ۳ \times ۹^۴ - ۳^۳ - ۴(۱ + ۰) - ۱ \times ۴(۴ + ۸۱) \equiv ۳ \times ۸۱^۲ - ۱۱ - ۴ - ۴ \times ۱$$
$$\equiv ۳ - ۱۱ - ۴ - ۴ = -۱۶ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۶)$$

بنابراین (به‌پیمانهٔ ۶۴) $A \equiv ۰$. همچنین

$$A \equiv ۱۳(۲^۴ + ۱^۲) - (۱۶^۴ + ۷^۴ + ۰) \equiv ۱۳ \times ۱۷ - (۲۵۶^۲ + ۴۹^۲)$$
$$\equiv ۱۳(-۱۰) - ((-۱۴)^۲ + ۴۹^۲) \equiv -۱۳۰ - ۷^۲(۲^۲ + ۷^۲)$$
$$\equiv -۱۳۰ - ۴۹(-۱) = -۸۱ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲۷)$$

$$A \equiv ۱۳(۰ + ۱^۲) - ((-۷)^۴ + ۹^۴ + ۱) \equiv ۱۳ - (۴۹^۲ + ۸۱^۲ + ۱)$$
$$\equiv ۱۳ - (۱ + ۶^۲ + ۱) = -۲۵ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۲۵)$$

$$A \equiv -۱(۴^۴ + ۲^۲) - (۱ + ۱ + ۴^۴) \equiv -۱(۲^۲ + ۲^۲) - (۱ + ۱ + ۲^۲)$$
$$= -۱۴ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

$$A \equiv ۲(۳^۴ + ۴^۲) - (۱ + ۱ + ۲^۴) \equiv ۲(۲^۲ + ۲^۴) - ۱۸ = ۴۰ - ۱۸$$
$$= ۲۲ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۱)$$

$$A \equiv ۰ - (۴^۴ + ۸^۴ + ۲^۴) = -۲^۴(۲^۴ + ۴^۴ + ۱) \equiv -۲^۴(۴^۲ + ۳^۲ + ۱)$$
$$\equiv -۲^۴(۳ + ۹ + ۱) \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۳)$$

$$B \equiv ۳ \times ۸^۴ + (-۴)^۳ - ۴(۰ + ۱۲^۴) - ۰ \equiv ۳ \times ۴^۶ - ۴^۳ - ۳^۴ \times ۴^۵$$
$$= ۴^۳(۳ \times ۴^۳ - ۱ - ۳^۴ \times ۴^۲) \equiv ۴^۳(۳(-۴) - ۱ - ۳^۴(-۱))$$
$$= ۴^۳(-۱۲ - ۱ + ۸۱) = ۴^۳(۶۸) \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۷)$$

پس (به‌پیمانهٔ ۱۷) $A \equiv ۰$. بنابراین A بر $۱۷ \times ۱۳ \times ۱۱ \times ۷ \times ۲۵ \times ۲۷ \times ۶۴$ بخش‌پذیر است؛ یعنی A بر عددی بخش‌پذیر است که بزرگتر است از

$$۱۶۰۰ \times ۲۷ \times ۱۰۰۱ \times ۱۷ > ۱۰^۶ \left(\frac{۳}{۲}\right) \times ۲۷ \times ۱۷ > ۱۰^۶ \times ۴۰ \times ۱۷ > ۶ \times ۱۰^۸$$

اما

$$\begin{aligned}|A| &< \max(۱۳(۲۵^۴ + ۲۶^۲), ۴۳^۴ + ۳۴^۴ + ۲۴^۴)\\ &< \max(۱۳ \times ۲۶^۲(۲۶^۲ + ۱), ۳ \times ۵۰^۴)\\ &< \max(۱۳ \times ۳۰^۴, ۳ \times ۵۰^۴) < ۱۳ \times ۵۰^۴\\ &= ۱۳ \times ۶۲۵ \times ۱۰^۴ < ۱۳ \times ۱۰^۷ < ۶ \times ۱۰^۸\end{aligned}$$

پس A بر عددی بزرگتر از خود بخش‌پذیر است و بنابراین باید صفر باشد.

مسألهٔ ۳۵۳. فرض کنید

$$S_n = \frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۲^۲} + \frac{۵}{۲^۳} + \cdots + \frac{۲n-۱}{۲^n}$$

دو طرف این برابری را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنید:

$$\frac{۱}{۲}S_n = \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۳}{۲^۳} + \cdots + \frac{۲n-۵}{۲^{n-۱}} + \frac{۲n-۳}{۲^n} + \frac{۲n-۱}{۲^{n+۱}}$$

اکنون برابری دوم را از برابری اول کم کنید:

$$S_n - \frac{۱}{۲}S_n = \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۲^۲} + \frac{۲}{۲^۳} + \cdots + \frac{۲}{۲^{n-۱}} + \frac{۲}{۲^n} - \frac{۲n-۱}{۲^{n+۱}}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}S_n &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \cdots + \frac{۱}{۲^{n-۱}} - \frac{۲n-۱}{۲^{n+۱}}\\ &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}}{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)} - \frac{۲n-۱}{۲^{n+۱}}\end{aligned}$$

و یا

$$S_n = ۳ - \frac{۲n+۳}{۲^n}$$

مسألهٔ ۳۵۴. اگر از دو طرف برابری موردنظر در مبنای n لگاریتم بگیریم معلوم می‌شود که باید ثابت کنیم

$$۲ = (\log_k m)(۱ + \log_n k)$$

و یا (با استفاده از این ویژگی لگاریتم که $(\log_c b)(\log_b a) = \log_c a$)

$$۲ = \log_k m + \log_n m \qquad (۱)$$

اکنون بنابر ویژگی تصاعد حسابی

$$۲\log_m x = \log_n x + \log_k x$$

اگر دو طرف این برابری را در $\log_x m$ ضرب کنیم، با استفاده از $(\log_a b)(\log_b a) = ۱$ و آن ویژگی لگاریتم که قبلاً بیان کردیم، برابری (۱) را به‌دست می‌آوریم.

مسألهٔ ۳۵۵. ۱۰۰ معادلهٔ دستگاه موردنظر را باهم جمع کنید:

$$۳(x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۱۰۰}) = ۰$$

بنابراین

$$\begin{aligned} ۰ &= (x_۱ + x_۲ + x_۳) + (x_۴ + x_۵ + x_۶) + \cdots + (x_{۹۷} + x_{۹۸} + x_{۹۹}) + x_{۱۰۰} \\ &= ۰ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰ + x_{۱۰۰} \end{aligned}$$

بنابراین $x_{۱۰۰} = ۰$، و به‌طور مشابه $x_۱ = x_۲ = \cdots = x_{۹۹} = ۰$.

تبصره. اگر ۱۰۰ را با عدد طبیعی دیگری عوض کنیم چه روی می‌دهد؟

مسألهٔ ۳۵۶. نابرابریهای (الف) و (ب) هر دو به‌ازای $n = ۱$ آشکارا درست‌اند. بنابراین فرض می‌کنیم $n > ۱$. می‌توانیم x را به‌شکل

$$x = a_۰ + \frac{a_۱}{n} + \frac{a_۲}{n^۲} + \cdots \qquad (۱)$$

بنویسیم که در آن $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$، عددهایی صحیح‌اند و

$$۰ \leqslant a_i \leqslant n - ۱, \qquad i = ۱, ۲, ۳, \cdots$$

در این‌صورت

$$\begin{aligned} [x] &= a_۰ \\ nx &= na_۰ + a_۱ + \frac{a_۲}{n} + \frac{a_۳}{n^۲} + \cdots \\ [nx] &= na_۰ + a_۱ \end{aligned}$$

و

$$[nx] - n[x] = a_۱$$

و درستی نابرابری (الف) ثابت می‌شود.

برای اثبات نابرابری (ب) توجه کنید که (با استفاده از (۱) و عبارت مشابهی برای y) می‌توانیم x و y را به‌شکل

$$x = a_۰ + \frac{a_۱ + \alpha}{n}, \quad y = b_۰ + \frac{b_۱ + \beta}{n} \qquad (۰ \leqslant \alpha, \beta < ۱)$$

بنویسیم. در این‌صورت

$$x + y = a_۰ + b_۰ + \frac{a_۱ + b_۱ + \alpha + \beta}{n} \qquad (۰ \leqslant \alpha, \beta < ۱)$$

پس یا (یک) $a_۱ + b_۱ + \alpha + \beta < n$؛ و یا (دو) $n \leqslant a_۱ + b_۱ + \alpha + \beta$.

در حالت (یک)، $[x+y]=a_0+b_0$ و درنتیجه

$$\begin{aligned}[x]+[y]+(n-1)[x+y] &= a_0+b_0+(n-1)(a_0+b_0)\\ &= na_0+nb_0 \leqslant na_0+a_1+nb_0+b_1\\ &= [nx]+[ny]\end{aligned}$$

در حالت (دو)، چون $\alpha+\beta<2$، پس $a_1+b_1>n-2$ و درنتیجه $a_1+b_1\geqslant n-1$؛ درضمن $n\leqslant a_1+b_1+\alpha+\beta<2n$؛ بنابراین،

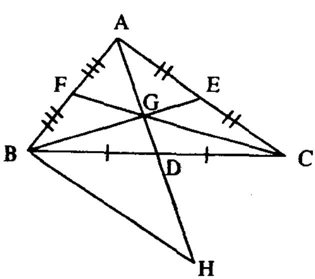
$$[x+y]=a_0+b_0+1$$

و

$$\begin{aligned}[x]+[y]+(n-1)[x+y] &= a_0+b_0+(n-1)(a_0+b_0+1)\\ &= na_0+b_0+n-1\\ &\leqslant na_0+nb_0+a_1+b_1=[nx]+[ny]\end{aligned}$$

مسألهٔ ۳۵۷. فرض کنید پاره‌خط مفروض AB باشد. عمودهای AX و BY را بر AB و در یک طرف آن رسم کنید. دو نقطهٔ دلخواه مانند P و Q روی AB انتخاب و از این دو نقطه عمودهایی بر AX رسم کنید تا BY (یا در صورت لزوم امتداد آن) را در R و S قطع کنند. فرض کنید پاره‌خطهای AR و BP یکدیگر را در M قطع کنند؛ فرض کنید پاره‌خطهای AS و BQ یکدیگر را در N قطع کنند. در این‌صورت خط MN پاره‌خط AB را نصف می‌کند.

مسألهٔ ۳۵۸. فرض کنید ABC مثلثی با میانه‌های AD، BE و CF باشد (شکل ۲۱۰ را ببینید). AD را تا H امتداد دهید به‌طوری‌که $\overline{AD}=\overline{DH}$. در این‌صورت $\triangle BDH\equiv\triangle ADC$ و $\overline{BH}=\overline{AC}$. بنابر نابرابری مثلثی،



شکل ۲۱۰

$$2\overline{AD}=\overline{AH}<\overline{AB}+\overline{BH}=\overline{AB}+\overline{AC}$$

به‌همین‌ترتیب $2\overline{BE}<\overline{AB}+\overline{BC}$ و $2\overline{CF}<\overline{AC}+\overline{BC}$.

اگر این سه نابرابری را باهم جمع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}<\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$$

از طرف دیگر

$$\overline{BC}<\overline{BG}+\overline{GC}=\frac{2}{3}(\overline{BE}+\overline{CF})$$

$$\overline{AC}<\frac{2}{3}(\overline{AD}+\overline{CF})$$

$$\overline{AB}<\frac{2}{3}(\overline{AD}+\overline{BE})$$

و بنابراین

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}<\frac{۴}{۳}(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF})$$

مسألهٔ ۳۵۹. الف) ۱۲۴ بزرگتر است، چون هریک از نابرابریهای زیر با نابرابری بعد از آن هم‌ارز است:

$$۲۹\sqrt{۱۴}+۴\sqrt{۱۵}<۱۲۴$$

$$۲۹\sqrt{۱۴}<۱۲۴-۴\sqrt{۱۵}$$

$$۲۹^{۲}\times ۱۴<۱۲۴^{۲}-۲\times ۴\times ۱۲۴\sqrt{۱۵}+۴^{۲}\times ۱۵$$

$$(۳۰-۱)^{۲}\times ۷<۶۲\times ۱۲۴-۴\times ۱۲۴\sqrt{۱۵}+۸\times ۱۵$$

$$۴\times ۱۲۴\sqrt{۱۵}<۶۲\times ۱۲۴+۸\times ۱۵-(۹۰۱-۶۰)\times ۷$$

$$۴۹۶\sqrt{۱۵}<۷۶۸۸+۱۲۰-(۶۳۰۷-۴۲۰)=۱۹۲۱$$

$$۴۹۶^{۲}\times ۱۵<۱۹۲۱^{۲}$$

$$۳۶۹۰۲۴۰<۳۶۹۰۲۴۱$$

$$۰<۱$$

ب) ۲۰۴۰ بزرگتر است، چون هریک از نابرابریهای زیر با نابرابری بعد از آن هم‌ارز است:

$$۲۰۴۰>۷۵۹\sqrt{۷}+۲\sqrt{۲۵۴}$$

$$۲۰۴۰-۲\sqrt{۲۵۴}>۷۵۹\sqrt{۷}$$

$$(۲۰۴۰-۲\sqrt{۲۵۴})^{۲}>۷\times ۷۵۹^{۲}$$

$$۴۱۶۲۶۱۶-۸۱۶۰\sqrt{۲۵۴}>۴۰۳۲۵۶۷$$

$$۱۳۰۰۴۹>۸۱۶۰\sqrt{۲۵۴}$$

$$۱۳۰۰۴۹^{۲}>۲۵۴\times ۸۱۶۰^{۲}$$

$$۱۶۹۱۲۷۴۲۴۰۱>۱۶۹۱۲۷۴۲۴۰۰$$

$$۱>۰$$

مسألهٔ ۳۶۰. تفاضلهای مربعهای متوالی تصاعدی حسابی با قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند:

$$۱^{۲}-۰^{۲}=۱,\ ۲^{۲}-۱^{۲}=۳,\ ۳^{۲}-۲^{۲}=۵,\ ۴^{۲}-۳^{۲}=۷,\ \cdots$$

اگر این تفاضلها را یکی در میان کنارهم بنویسیم (به‌طوری‌که در هر ردیف هیچ دوتایی «شامل» یک مربع نباشند)، دو تصاعد حسابی خواهیم داشت که قدرنسبت هریک از آنها ۴ است:

$$۱^{۲}-۰^{۲}=۱,\ ۳^{۲}-۲^{۲}=۵,\ ۵^{۲}-۴^{۲}=۹,\cdots$$

$$۲^{۲}-۱^{۲}=۳,\ ۴^{۲}-۳^{۲}=۷,\ ۶^{۲}-۵^{۲}=۱۱,\cdots$$

بنابراین

$$((q+۳)^۲-(q+۲)^۲)-((q+۱)^۲-q^۲)=۴, \quad q=۰,۱,۲,\cdots$$

یعنی

$$۴=q^۲-(q+۱)^۲-(q+۲)^۲+(q+۳)^۲, \quad q=۰,۱,۲,\cdots$$

بنابراین، اگر n را بتوان به‌شکل

$$\epsilon_۱ ۱^۲+\epsilon_۲ ۲^۲+\cdots+\epsilon_m m^۲$$

نوشت، $n+۴$ را نیز می‌توان به‌این شکل نوشت:

$$n+۴=\epsilon_۱ ۱^۲+\epsilon_۲ ۲^۲+\cdots+\epsilon_m m^۲+(m+۱)^۲-(m+۲)^۲-(m+۳)^۲+(m+۴)^۲$$

چون ۱، ۲، ۳، و ۴ را می‌توان به‌شکل مطلوب نوشت، نتیجه می‌شود که همهٔ عددهای طبیعی را می‌توان به‌این شکل نوشت. نوشتن چنین عبارتهایی آسان است. به‌ازای $k \geqslant ۱$،

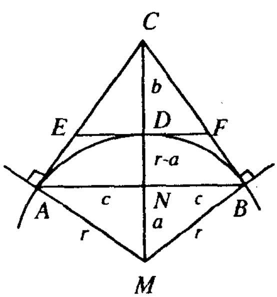
$$۱+۴k=۱^۲+\sum_{۱}^{۲k}(-۱)^{j+۱}((۲j)^۲-(۲j+۱)^۲)$$

$$۲+۴k=-۱^۲-۲^۲-۳^۲+۴^۲+\sum_{۲}^{۲k+۱}(-۱)^{j}((۲j+۱)^۲-(۲j+۲)^۲)$$

$$۳+۴k=-۱^۲+۲^۲+\sum_{۱}^{۲k}(-۱)^{j+۱}((۲j+۱)^۲-(۲j+۲)^۲)$$

$$۴+۴k=-۱^۲-۲^۲+۳^۲+\sum_{۲}^{۲k+۱}(-۱)^{j}((۲j)^۲-(۲j+۱)^۲)$$

تبصره. آیا می‌توانید نتیجهٔ مشابهی در مورد مکعبها (به‌جای مربعها) به‌دست آورید؟



شکل ۲۱۱

مسألهٔ ۳۶۱. الف) فرض کنید AB و CM یکدیگر را در N قطع کنند (شکل ۲۱۱ را ببینید). فرض کنید $a=\overline{NM}$، $b=\overline{CD}$، $c=\overline{AN}$ و $\overline{BN}=\overline{BM}=\overline{DM}=\overline{AM}=r$. چون $\triangle NAM \sim \triangle ACM$، $\frac{\overline{AM}}{\overline{NM}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}}$ و یا $a(b+r)=r^۲$. اکنون اگر از نماد $[\cdots]$ برای مساحت استفاده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$[ABM]=ac, \quad [ACBM]=(b+r)c,$$

$$[ADBM]=rc=c\sqrt{a(b+r)}$$

که از آنها نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

ب) میانگین همساز دو عدد x و y، که آن‌را h می‌نامیم، از برابری $\frac{۲}{h}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$ به‌دست می‌آید. در

مسألهٔ خودمان

$$x=[ADBM]=rc,\quad y=[ACBM]=(b+r)c$$

و

$$h=[AEDFBM]=(b+r)c-b\overline{ED}=(b+r)c-\frac{b(bc)}{b+r-a}$$

چون از تشابه مثلثهای CDE و CNA نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\overline{ED}}{c}=\frac{b}{b+r-a}$$

درنتیجه

$$h=\frac{c((b+r)^۲-a(b+r)-b^۲)}{b+r-a}$$

و با استفاده از $a(b+r)=r^۲$ به‌دست می‌آوریم

$$h=\frac{۲brc}{b+r-a}$$

اکنون

$$\frac{۲}{h}-\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}=\frac{b+r-a}{brc}-\frac{۱}{rc}-\frac{۱}{(b+r)c}$$
$$=\frac{r-a}{brc}-\frac{۱}{(b+r)c}=\frac{(r-a)(b+r)-br}{brc(b+r)}$$
$$=\frac{r(b+r)-a(b+r)-br}{brc(b+r)}$$
$$=\frac{r(b+r)-r^۲-br}{brc(b+r)}=۰$$

مسألهٔ ۳۶۲. ممکن نیست. اگر یکی از عددها و یا هر دو را بر توانی از ۱۰ تقسیم کنیم نتیجه تغییر نمی‌کند. پس فرض می‌کنیم دو عدد موردبحث

$$a+r,\qquad b+s$$

باشند که در آنها a و b عددهایی صحیح‌اند و

$$۱\leqslant a<b\leqslant ۹,\qquad ۰\leqslant r,s<۱$$

فرض‌کنید $(a+r)(b+s)<۱۰$. دراین‌صورت، اولین رقم حاصل‌ضرب عددها دست‌کم ab است (توجه کنید که ab عددی صحیح و یک‌رقمی است). چون $a\geqslant ۱$، پس $a<b\leqslant ab$ که نتیجهٔ مطلوب است.

فرض کنید $(a+r)(b+s)\geqslant ۱۰$. چون

$$(a+r)(b+s)<(a+۱)(۹+۱)=۱۰(a+۱)$$

حاصل‌ضرب عددها بین ۱۰ و ۹۰ (و یا خود این دو عدد) است که رقم اول آن از a بزرگتر نیست و این نیز نتیجهٔ مطلوب است.

مسألهٔ ۳۶۳. او با مقایسهٔ زمانهایی که ساعتش به هنگام ترک خانه و بازگشت به‌آن نشان می‌دهد تشخیص می‌دهد که چه مدت خارج از خانه بوده است. از روی ساعت دوستش تشخیص می‌دهد که چه مدت در خانهٔ او بوده است و بنابراین متوجه می‌شود که چه مدت در راه بوده است. با اضافه کردن نصف این مدت به زمانی که ساعت دوستش به هنگام عزیمتش از خانهٔ او نشان می‌داده است زمان صحیح را برای تنظیم ساعت درمی‌یابد.

مسألهٔ ۳۶۴. هر بار که قمارباز ببرد سرمایه‌اش در $\frac{۳}{۲}$ و هر بار که ببازد سرمایه‌اش در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌شود. اگر او در دنباله‌ای از $۲n$ بازی n بار ببرد و n بار ببازد، سرمایه‌اش که مقدار آن‌را A می‌نامیم به

$$A\left(\frac{۳}{۲}\right)^n\left(\frac{۱}{۲}\right)^n=\left(\frac{۳}{۴}\right)^n A$$

تقلیل می‌یابد. بنابراین مدت زیادی طول نمی‌کشد که کلِّ پولش را ببازد.

مسألهٔ ۳۶۵. مأمور آمارگیری با آرامش‌خاطر دنبالهٔ مربعها را درنظر گرفت:

$$۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ۳۶, ۴۹, ۶۴, ۸۱, ۱۰۰$$

سن مرد یکی از این مربعهاست که برابر مجموع سه مربع کوچکتر است. مأمور آمارگیری که در حساب ذهنی متبحر بود خیلی سریع دریافت که

$$۴۹ = ۳۶ + ۹ + ۴$$

پس سن مرد ۴۹ سال و سن همسرش ۳۶ سال است. اگر سن دختر ۹ سال باشد، سن پدربزرگ $۹۴ = ۹ + ۳۶ + ۴۹$ سال خواهد بود که عددی اول نیست. پس سن دختر باید ۴ سال باشد و سن پدربزرگ $۸۹ = ۴ + ۳۶ + ۴۹$، که عددی اول است. درنتیجه، سن پسر باید ۹ سال باشد. نکتهٔ آشکاری که آمارگیر در مورد سن همسر مرد درمی‌یابد این است که سن او برابر با حاصل‌ضرب سن فرزندانش است.

مسألهٔ ۳۶۶. ابتدا قسمت (ب) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید رأسها و نقاط وسط ضلعها را به‌ترتیب با $P_۱$، $P_۲$، $\cdots$، P_n و $M_۱$، $M_۲$، $\cdots$، M_n نمایش دهیم به‌طوری‌که M_i نقطهٔ وسط $P_iP_{i+۱}$ باشد. همچنین، فرض کنید $\overrightarrow{P_i}$ و $\overrightarrow{M_i}$ بردارهایی باشند که از مبدأ مشترکی به‌ترتیب به P_i و M_i رسم شده‌اند. در این‌صورت می‌خواهیم بدانیم که چه موقع دستگاه معادله‌های زیر برحسب P_iها جوابی یکتا دارد:

$$\overrightarrow{P_۱}+\overrightarrow{P_۲}=۲\overrightarrow{M_۱},\ \overrightarrow{P_۲}+\overrightarrow{P_۳}=۲\overrightarrow{M_۲},\ \cdots,\ \overrightarrow{P_n}+\overrightarrow{P_۱}=۲\overrightarrow{M_n}$$

اگر n فرد باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\overrightarrow{P_۱}=۲\overrightarrow{M_۱}-\overrightarrow{P_۲}=۲\overrightarrow{M_۱}-۲\overrightarrow{M_۲}+\overrightarrow{P_۳}=\cdots=۲\overrightarrow{M_۱}-۲\overrightarrow{M_۲}+۲\overrightarrow{M_۳}-\cdots$$
$$+۲\overrightarrow{M_n}-\overrightarrow{P_۱}$$

و بنابراین

$$\overrightarrow{P_۱} = \overrightarrow{M_۱} - \overrightarrow{M_۲} + \overrightarrow{M_۳} - \cdots + \overrightarrow{M_n}$$

پس $\overrightarrow{P_۱}$ به‌طور یکتا تعیین می‌شود و همین‌طور در مورد دیگر $\overrightarrow{P_i}$ها. از طرف دیگر، اگر n زوج باشد، به

$$\overrightarrow{P_۱} = ۲\overrightarrow{M_۱} - ۲\overrightarrow{M_۲} + ۲\overrightarrow{M_۳} - \cdots - ۲\overrightarrow{M_n} + \overrightarrow{P_۱}$$

می‌رسیم که فقط در صورتی سازگار است که

$$\overrightarrow{M_۱} + \overrightarrow{M_۳} + \cdots + \overrightarrow{M_{n-۱}} = \overrightarrow{M_۲} + \overrightarrow{M_۴} + \cdots + \overrightarrow{M_n}$$

وقتی‌که این شرط برقرار باشد، معادله‌های $\overrightarrow{P_i}$ها مستقل نیستند و بی‌نهایت جواب وجود دارد.

در مورد قسمت (الف)،

$$\overrightarrow{P_۱} = \overrightarrow{M_۱} - \overrightarrow{M_۲} + \overrightarrow{M_۳} - \overrightarrow{M_۴} + \overrightarrow{M_۵}$$

و ترسیم $\overrightarrow{P_۱}$ ممکن است. در این‌صورت $\overrightarrow{P_۲} = ۲\overrightarrow{M_۱} - \overrightarrow{P_۱}$، و غیره.

مسألهٔ ۳۶۷. روشن است که (شکل ۲۱۲ را ببینید)

$$\angle ANM = \angle ACM = ۴۵^\circ, \quad \angle MNB = \angle MEB = ۴۵^\circ, \quad \angle BNE = ۹۰^\circ$$

پس

$$\angle ANE = \angle ANM + \angle MNB + \angle BNE = ۱۸۰^\circ$$

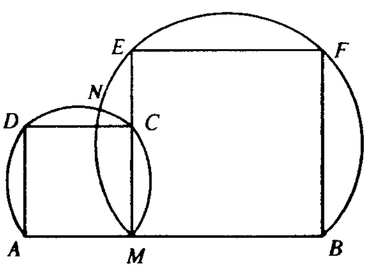
و A، N و E همخط‌اند. گذشته از این،

$$\angle ANB = \angle ANM + \angle MNB = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

و

$$\angle ANC = ۹۰^\circ$$

پس N، B و C همخط‌اند.



شکل۲۱۲

مسألهٔ ۳۶۸. الف) هر مقسوم‌علیه مشترک $۱۴n + ۳$ و $۲۱n + ۴$، باید

$$۳(۱۴n + ۳) - ۲(۲۱n + ۴) = ۱$$

را نیز بشمارد.

ب) هر مقسوم‌علیه مشترک $۷an + ۴$ و $۷bn + ۳$، باید

$$b(۷an + ۴) - a(۷bn + ۳) = ۴b - ۳a$$

را نیز بشمارد. بنابراین، اگر $۴b - ۳a = \pm ۱$، $۷an + ۴$ و $۷bn + ۳$ نسبت به‌هم اول خواهند بود. جواب عمومی معادلهٔ $۴b - ۳a = ۱$ چنین است: $b = ۳t + ۱$ و $a = ۴t + ۱$؛ جواب عمومی معادلهٔ $۴b - ۳a = -۱$ چنین است: $b = ۲ + ۳t$ و $a = ۳ + ۴t$. اگر در حالت اخیر فرض کنیم $t = ۰$، یعنی $b = ۲$ و $a = ۳$، قسمت (الف) نیز جواب داده می‌شود.

مسألهٔ ۳۶۹. توافق می‌کنیم که مجموعهٔ آشنایان هیچ‌کس شامل خودش نباشد (در غیر این‌صورت، کافی است به تعداد آشنایان هرکس یکی اضافه کنیم). فرض کنید n نفر در سالن سینما باشند و فرض کنید kاُمین نفر با a_k نفر آشنا باشد. البته $۰ \leqslant a_k \leqslant n - ۱$، $k = ۱, ۲, \cdots, n$. اما این امکان وجود ندارد که یکی از حاضران در سینما هیچ کس را نشناسد و کس دیگری همه را بشناسد. یعنی i و jای وجود ندارند به‌طوری که $a_i = ۰$ و $a_j = n - ۱$. پس ۰ و $n - ۱$ همزمان مقدار دو تا از a_kها نیستند. بنابراین در میان n عدد $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و a_n فقط $n - ۱$ عدد متمایز وجود دارد و بنابر اصل لانه کبوتری دو تا از a_iها باید با هم برابر باشند.

مسألهٔ ۳۷۰. توجه کنید در حالتی که $n = ۷$، مجموع مختصات ۷ جواب عبارت‌اند از ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ (البته نه به‌این ترتیب). نتیجه این است که در حالت کلی $x + y$ را بررسی کنیم و بکوشیم جوابها را با استفاده از مجموع $x + y$ با عددهای ۱، ۲، $\cdots$ و n جفت کنیم.

به‌ازای هر جواب از $x + ۲y = n$ مانند (x, y)،

$$\frac{n}{۲} = \frac{۱}{۲}(x + ۲y) \leqslant x + y \leqslant x + ۲y \leqslant n$$

به‌ازای هر عدد صحیح مانند k، $\frac{n}{۲} \leqslant k \leqslant n$، دستگاه معادله‌های

$$x + ۲y = n, \qquad x + y = k$$

جواب یکتا دارد: $(x, y) = (۲k - n \ , n - k)$.

به‌طور مشابه، به‌ازای هر جواب $۲x + ۳y = n - ۱$،

$$\frac{n - ۱}{۳} \leqslant x + y \leqslant \frac{n - ۱}{۲}$$

به‌ازای هر عدد صحیح مانند k، $\frac{n - ۱}{۳} \leqslant k \leqslant \frac{n - ۱}{۲}$، دستگاه معادله‌های

$$۲x + ۳y = n - ۱, \qquad x + y = k$$

جواب یکتا دارد: $(x, y) = (۳k - (n - ۱), n - ۱ - ۲k)$.

به‌طور کلی، هر جواب $ix + (i+1)y = n - i + 1$ در نابرابریهای زیر صدق می‌کند:

$$\frac{n+1-i}{i+1} \leqslant x + y \leqslant \frac{n+i-1}{i}$$

گذشته از این، به‌ازای هر k، $\frac{n+1-i}{i+1} \leqslant k \leqslant \frac{n+i-1}{i}$، دستگاه معادله‌های

$$ix + (i+1)y = n - i + 1, \qquad x + y = k$$

جواب یکتا دارد: $(x,y) = ((i+1)k - (n+1-i), (n+1-i) - ik)$.

اکنون ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر k، $k = 1, 2, \cdots, n$، عدد صحیح یکتایی مانند i وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{n+1-i}{i+1} \leqslant k \leqslant \frac{n+1-i}{i}$$

این نابرابریها هم‌ارزند با

$$\frac{n+1-k}{k+1} \leqslant i \leqslant \frac{n+1}{k+1}$$

اکنون،

$$\frac{n+1-k}{k+1}, \frac{n+2-k}{k+1}, \cdots, \frac{n+(k+1)-k}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}$$

$k+1$ کسر با مخرج $k+1$ هستند و دقیقاً یکی از آنها باید برابر با عدد صحیح i باشد. بنابراین، به‌ازای هر k، $k = 1, 2, \cdots, n$، دقیقاً یک معادله می‌توانیم بیابیم که دقیقاً یک جواب با شرط $x + y = k$ داشته باشد.

مسألهٔ ۳۷۱. کار را با یکی از مجموعهایی که در $a(n)$ شمرده می‌شود، مثلاً

$$n = 1 + 2 + 2 + 1 + \cdots + 2 + 1 + 1 + 2$$

آغاز می‌کنیم. یک ۱ در ابتدا و یک ۱ در انتها اضافه می‌کنیم:

$$n + 2 = 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + \cdots + 2 + 1 + 1 + 2 + 1$$

به‌جای هر ۲، ۱|۱ (یک خط یک) قرار می‌دهیم:

$$n + 2 = 1 + 1 + 1|1 + 1|1 + 1 + \cdots + 1|1 + 1 + 1 + 1|1 + 1$$

و مجموع زیر را به‌دست می‌آوریم

$$n + 2 = 3 + 2 + \cdots + 4 + 2$$

که در $b(n+2)$ شمرده می‌شود. این کار که در جهت عکس نیز قابل انجام است تناظر یک‌به‌یکی بین $a(n)$ مجموع مرتب با «بخشهای» ۱ و ۲ و $b(n+2)$ مجموع مرتب با «بخشهای» بزرگتر از ۱ برقرار

می‌سازد. مثلاً،

$$\begin{aligned}
&۵=۱+۱+۱+۱+۱\\
&\quad\to ۷=۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱\to ۷=۷\\
&۵=۲+۱+۱+۱\\
&\quad\to ۷=۱+۲+۱+۱+۱+۱\\
&\quad\to ۷=۱+۱|۱+۱+۱+۱+۱\to ۷=۲+۵\\
&۵=۱+۲+۱+۱\\
&\quad\to ۷=۱+۱+۲+۱+۱+۱\\
&\quad\to ۷=۱+۱+۱|۱+۱+۱+۱\to ۷=۳+۴
\end{aligned}$$

و غیره.

مسألهٔ ۳۷۲. فرض کنید تعداد مهره‌های هر یک از این پنج نفر در انتهای بازی پنجم x باشد. این به معنی آن است که در ابتدای بازی پنجم (یعنی در انتهای بازی چهارم) A، B، C، D و E به ترتیب $\frac{x}{۲}$، $\frac{x}{۲}$، $\frac{x}{۲}$، $\frac{x}{۲}$ و $۳x$ مهره داشته‌اند. در ابتدای بازی چهارم تعداد مهره‌ها چنین بوده است

$$\frac{x}{۴},\ \frac{x}{۴},\ \frac{x}{۴},\ \frac{۱۱x}{۴},\ \frac{۳x}{۲}$$

در ابتدای بازی سوم تعداد مهره‌ها چنین بوده است

$$\frac{x}{۸},\ \frac{x}{۸},\ \frac{۲۱x}{۸},\ \frac{۱۱x}{۸},\ \frac{۳x}{۴}$$

در ابتدای بازی دوم تعداد مهره‌ها چنین بوده است

$$\frac{x}{۱۶},\ \frac{۴۱x}{۱۶},\ \frac{۲۱x}{۱۶},\ \frac{۱۱x}{۱۶},\ \frac{۳x}{۸}$$

در ابتدای بازی اول تعداد مهره‌ها چنین بوده است

$$\frac{۸۱x}{۳۲},\ \frac{۴۱x}{۳۲},\ \frac{۲۱x}{۳۲},\ \frac{۱۱x}{۳۲},\ \frac{۳x}{۱۶}$$

کوچکترین عدد صحیح مانند x که به‌ازای آن همهٔ این عددها صحیح باشند $x=۳۲$ است؛ درنتیجه، کمترین تعداد ممکن مهره‌های این پنج بازیکن در ابتدا به‌ترتیب ۸۱، ۴۱، ۲۱، ۱۱ و ۶ است.

مسألهٔ ۳۷۳. چون

$$\sum_i r_i=\sum_j c_j=\sum_{i,j}a_{ij}$$

نتیجه می‌شود که $\sum_i(r_i-c_i)=۰$. بنابراین، یا به‌ازای هر i، $r_i-c_i=۰$ و یا زیروندهایی مانند i و j وجود دارند به‌طوری که $r_i-c_i>۰$ و $r_j-c_j<۰$. در هر دو حالت، نابرابری مطلوب برقرار است.

مسألهٔ ۳۷۴. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n و هر عدد دلخواه مانند b،

$$f(\circ) - f(b) = f(\circ) - f(\frac{b}{n}) + f(\frac{b}{n}) - f(\frac{2b}{n}) + \cdots + f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right) - f\left(\frac{nb}{n}\right)$$

و بنابراین

$$|f(\circ) - f(b)| \leqslant \left|f(\circ) - f\left(\frac{b}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{b}{n}\right) - f\left(\frac{2b}{n}\right)\right|$$

$$+ \cdots + \left|f\left(\frac{(n-1)b}{n}\right) - f\left(\frac{nb}{n}\right)\right|$$

$$\leqslant \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{b}{n}\right)^2$$

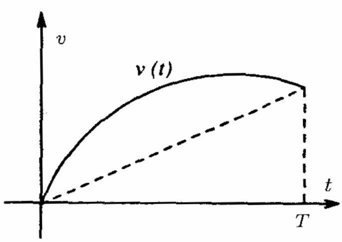
$$= n\left(\frac{b^2}{n^2}\right) = \frac{b^2}{n}$$

اگر b را ثابت نگاه داریم و n را افزایش دهیم از آنچه به‌دست آوردیم نتیجه می‌شود

$$|f(\circ) - f(b)| = \circ$$

یعنی $f(b) = f(\circ)$.

مسألهٔ ۳۷۵. نمودار تابع تندی حرکت اتومبیل، $v(t)$ (t برحسب ساعت، v برحسب کیلومتر بر ساعت)، را در نظر بگیرید (شکل ۲۱۳ را ببینید؛ در این شکل T زمانی است که طول می‌کشد تا اتومبیل مسافت یک کیلومتر را بپیماید). شیب خط مماس بر منحنی در هر نقطه مانند t شتاب اتومبیل در آن نقطه است و چون شتاب افزایش نمی‌یابد، شیب خط مماس با افزایش t افزایش نمی‌یابد؛ یعنی خط مماس همیشه در جهت ساعتگرد می‌چرخد.



شکل ۲۱۳

از بحث بالا معلوم می‌شود که تابع $v(t)$ مقعر است، و یا تقعر نمودار $v(t)$ رو به پایین است. مساحت زیر منحنی با مسافت پیموده شده (یعنی ۱ کیلومتر) برابر است و از مساحت مثلثی با رأسهای $(\circ,\circ)$، $(T,\circ)$ و $(T, 240)$ کمتر نیست. بنابراین

$$\frac{1}{2}(240)T \leqslant 1 \qquad \text{(۱ مساحت زیر منحنی است)}$$

و $T \leqslant \frac{1}{120}$؛ یعنی مدت آزمایش حداکثر ۳۰ ثانیه است.

مسألهٔ ۳۷۶. ثابت می‌کنیم که دنبالهٔ مورد نظر به ۱ همگراست. تحقیق اینکه w_nها یکی در میان بزرگتر از ۱ و کوچکتر از ۱ هستند دشوار نیست. بنابراین، رابطهٔ بین w_nهای یکی در میان و ۱ را به‌صورت زیر

بررسی می‌کنیم:

$$۱ - w_{n+۲}^{۲} = w_{n+۱} - ۱ = \sqrt{۲ - w_n} - ۱ = \frac{۱ - w_n}{۱ + \sqrt{۲ - w_n}}$$

و بنابراین

$$۱ - w_{n+۲} = \frac{۱ - w_n}{(۱ + w_{n+۲})(۱ + \sqrt{۲ - w_n})}$$

اگر $w_n < ۱$، آنگاه $w_{n+۲} < ۱$ و

$$۱ - w_{n+۲} < \frac{۱ - w_n}{۲}$$

اگر $w_n > ۱$، آنگاه

$$w_{n+۲} > ۱, \quad (۱ + w_{n+۲})(۱ + \sqrt{۲ - w_n}) > ۲$$

و

$$w_{n+۲} - ۱ < \frac{w_n - ۱}{۲}$$

بنابراین

$$|w_{n+۲} - ۱| < \frac{۱}{۲}|w_n - ۱|$$

در هر حالت،

$$|w_n - ۱| < \frac{۱}{۲^{[n/۲]}}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} |w_n - ۱| = ۰$$

مسألهٔ ۳۷۷. توجه کنید که

$$x^۳ + ۱ = (x + ۱)(x^۲ - x + ۱)$$

درنتیجه $-r^۲ = ۱ - r$، $r^۳ = -۱$، $r^۴ = -r$، $r^۵ = -r^۲$ و $r^۶ = ۱$. اکنون

$$S_n = r^n + (۱ - r)^n = r^n + (-۱)^n r^{۲n}$$

و

$$S_{۶m} = ۱ + ۱ = ۲$$

$$S_{۶m+۱} = r - r^۲ = ۲$$

$$S_{۶m+۲} = r^۲ + r^۴ = -۱$$

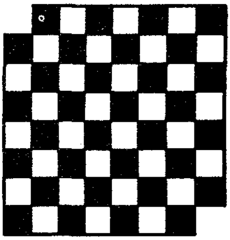
$$S_{۶m+۳} = r^۳ - r^۶ = -۲$$

$$S_{۶m+۴} = r^۴ + r^۸ = -r + r^۲ = -۱$$

$$S_{۶m+۵} = r^۵ - r^{۱۰} = -r^۲ + r = ۱$$

این نتایج همان چیزی است که می‌خواهیم.

مسألهٔ ۳۷۸. او وقتش را تلف می‌کند. نمی‌توان سطح مفروض را بدون شکستن هیچ موزاییکی فرش کرد. برای یافتن برهان سرراستی برای این حکم، سطح را به مربعهای ۱ فوت در ۱ فوت تقسیم و مربعها را یکی در میان سیاه کنید. (شکل ۲۱۴ را ببینید). روشن است که برای فرش کردن سطح مفروض هر موزاییک باید دو مربع را بپوشاند ـ یک مربع سفید و یک مربع سیاه. بنابراین ۳۱ موزاییک ۳۱ مربع سفید و ۳۱ مربع سیاه را می‌پوشانند. اما شکل ما ۳۲ مربع سیاه و ۳۰ مربع سفید دارد. بنابراین فرش کردن کلِّ سطح ممکن نیست.



شکل ۲۱۴

مسألهٔ ۳۷۹. قسمت اول را به‌استقرا ثابت می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$Q^{۲} = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱\times۱+۱\times۱ & ۱\times۱+۱\times۰ \\ ۱\times۱+۱\times۰ & ۱\times۱+۱\times۰ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{۳} & f_{۲} \\ f_{۲} & f_{۱} \end{pmatrix}$$

اکنون فرض کنید به‌ازای mای، $m \geqslant ۲$،

$$Q^m = \begin{pmatrix} f_{m+۱} & f_m \\ f_m & f_{m-۱} \end{pmatrix}$$

در این صورت

$$Q^{m+۱} = Q^m Q = \begin{pmatrix} f_{m+۱} & f_m \\ f_m & f_{m-۱} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{m+۱}+f_m & f_{m+۱} \\ f_m+f_{m-۱} & f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m+۲} & f_{m+۱} \\ f_{m+۱} & f_m \end{pmatrix}$$

و بنابراین

$$Q^m = \begin{pmatrix} f_{m+۱} & f_m \\ f_m & f_{m-۱} \end{pmatrix}, \qquad m = ۲, ۳, ۴, \dots$$

اکنون قسمت دوم را ثابت می‌کنیم. چون

$$Q^{۲n} = \begin{pmatrix} f_{۲m+۱} & f_{۲n} \\ f_{۲n} & f_{۲n-۱} \end{pmatrix}$$

و

$$(Q^n)^3 = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}^3$$

$$= \begin{pmatrix} f_{n+1}^3 + 2f_{n+1}f_n^2 + f_n^2 f_{n-1} & f_{n+1}^2 f_n + f_{n+1}f_n f_{n-1} + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ f_{n+1}^2 f_n + f_{n+1}f_n f_{n-1} + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 & f_{n+1}f_n^2 + 2f_n^2 f_{n-1} + f_{n-1}^3 \end{pmatrix}$$

درایه‌های سطر ۲، ستون ۱ را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f_{3n} &= f_{n+1}^2 f_n + f_{n+1}f_n f_{n-1} + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}f_n(f_{n+1} + f_{n-1}) + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}(f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} + f_{n-1}) + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}(f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2) + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}^3 - f_{n+1}f_{n-1}^2 + f_n^3 + f_n f_{n-1}^2 \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^2(f_{n+1} - f_n) \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 \end{aligned}$$

تبصره. اتحادهایی شامل f_{3n+1} و f_{3n-1} به‌دست آورید.

مسألهٔ ۳۸۰. به‌ازای $n \geqslant 1$، نقاط دنبالهٔ

$$L_n : (0, n), (1, n-1), (2, n-2), \cdots, (n, 0)$$

(نقاطی روی خط $x + y = n$) بر روی عددهای صحیح دنبالهٔ زیر نگاشته می‌شوند

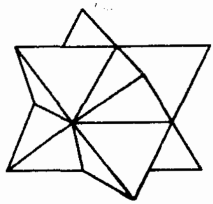
$$I_n : \frac{n(n+1)}{2},\ \ \frac{n(n+1)}{2} + 1,\ \ \frac{n(n+1)}{2} + 2, \cdots, \frac{n(n+1)}{2} + n$$

به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که مجموعه‌های I_1، I_2، $\cdots$، جدا از هم‌اند و اجتماع آنها مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی است.

تبصره. به‌طور کلیتر، فرض کنید N دنبالهٔ عددهای طبیعی باشد. به‌ازای هر $n \in N$ ثابت کنید چندجمله‌ای $F_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ وجود دارد به‌طوری که $F_n : N^n \to \{n\}$ نگاشتی دوسویی است.

ملاحظه. برای مطالعهٔ تاریخچه و تعمیمهایی از این مسأله نگاه کنید به

Crux Mathematicorum, 10(1984) 300-303.



شکل ۲۱۵

مسألهٔ ۳۸۱. هر وجه V مثلثی متساوی‌الاضلاع است که طول ضلعش با نصف طول ضلع هر یک از چهاروجهیها برابر است (شکل ۲۱۵ را ببینید). ۸ مثلث از این نوع داریم که هر یک از آنها روی یکی از وجه‌های یکی از چهاروجهیها واقع است. بنابر تقارن، V باید هشت‌وجهی باشد.

فرض کنید حجم هر یک از «نوک»های چهاروجهی شکل ستارهٔ U برابر با v باشد. حجم هر یک از دو چهاروجهی متقاطع $۲^۳v = ۸v$ است؛ پس حجم V برابر $۸v - ۴v = ۴v$ است. چون U از ۸ «نوک» چهاروجهی و هشت‌وجهی V تشکیل شده است، حجم U برابر است با $۴v + ۸v = ۱۲v$. بنابراین

$$\frac{(U\text{حجم})}{(V\text{حجم})} = \frac{۱۲v}{۴v} = ۳$$

مسألهٔ ۳۸۲. چون

$$(n^۲ + n)^۲ = n^۴ + ۲n^۳ + n^۲$$
$$< n^۴ + ۲n^۳ + ۲n^۲ + ۲n + ۱$$
$$< n^۴ + ۲n^۳ + ۳n^۲ + ۲n + ۱$$
$$= (n^۲ + n + ۱)^۲$$

معلوم می‌شود که $n^۴ + ۲n^۳ + ۲n^۲ + ۲n + ۱$ بین دو مربع متوالی قرار دارد و بنابراین مربع کامل نیست.

مسألهٔ ۳۸۳. بازیکنانی که ۱، ۵، ۸ و ۱۲ سال تجربهٔ بازی دارند در یک تیم و بازیکنانی که ۲، ۳، ۱۰ و ۱۱ سال تجربهٔ بازی دارند در تیم دیگر قرار گرفته‌اند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که

$$۱ + ۵ + ۸ + ۱۲ = ۲ + ۳ + ۱۰ + ۱۱$$
$$۱^۲ + ۵^۲ + ۸^۲ + ۱۲^۲ = ۲^۲ + ۳^۲ + ۱۰^۲ + ۱۱^۲$$
$$۱^۳ + ۵^۳ + ۸^۳ + ۱۲^۳ = ۲^۳ + ۳^۳ + ۱۰^۳ + ۱۱^۳$$

مسألهٔ ۳۸۴. ارزانترین راه ۲۹۰۰۰۰ تومان هزینه می‌خواهد و برای این کار باید ماشینهای لباسشویی را با ۴ کامیون بزرگ و ۶ کامیون کوچک ارسال کرد. راهی برای حل این مسأله و مسأله‌های مشابه این است که نموداری رسم کنیم و تعداد کامیونهای بزرگ را روی محور افقی و هزینهٔ کلی را روی محور قائم بنویسیم.

در این مسأله فرض کنید x تعداد کامیونهای بزرگ و y تعداد کامیونهای کوچک باشد. در این

صورت

$$۱۸x + ۱۳y \geqslant ۱۵۰ \qquad (۱)$$

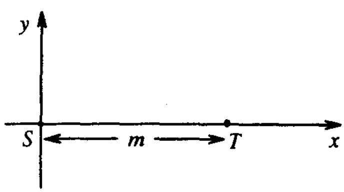
و هزینهٔ کل چنین است

$$C = ۳۵۰۰۰x + ۲۵۰۰۰y$$

به‌ازای هر x، $x = ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots$، کوچکترین مقدار y را که در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند حساب می‌کنیم.

x	کوچکترین مقدار y که در رابطهٔ (۱) صدق می‌کند	C
۰	۱۲	۳۰۰۰۰۰
۱	۱۱	۳۱۰۰۰۰
۲	۹	۲۹۵۰۰۰
۳	۸	۳۰۵۰۰۰
۴	۶	۲۹۰۰۰۰
۵	۵	۳۰۰۰۰۰
۶	۴	۳۱۰۰۰۰
۷	۲	۲۹۵۰۰۰
۸	۱	۳۰۵۰۰۰
۹	۰	۳۱۵۰۰۰

مسألهٔ ۳۸۵. برای سادگی کار، مبدأ زمان را ساعت ۰۰ : ۷ و دستگاه مختصات قائمی را در نظر می‌گیریم که مبدأ آن موضع آغازی S و محور x آن موضع آغازی نیمخط ST است (شکل ۲۱۶ را ببینید). اگر مؤلفه‌های x و y تندی S را بر حسب کیلومتر بر ساعت a و b و مؤلفه‌های x و y تندی T را برحسب کیلومتر بر ساعت c و d بگیریم، مختصات S و T پس از t ساعت چنین است



شکل ۲۱۶

$$S = (ab, bt), \quad T = (m + ct, dt)$$

در این صورت، با استفاده از دستور تعیین مسافت به‌دست می‌آوریم

$$(m + ۳c - ۳a)^۲ + (۳d - ۳b)^۲ = ۲۵$$

$$(m + ۴c - ۴a)^۲ + (۴d - ۴b)^۲ = ۱۶$$

$$(m + ۶c - ۶a) + (۶d - ۶b)^۲ = ۱۰۰$$

اگر فرض کنیم $u = c - a$، $v = d - b$ و $u^{۲} + v^{۲} = x^{۲}$، معادلات بالا به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$m^{۲} + ۶mu + ۹x^{۲} = ۲۵$$
$$m^{۲} + ۸mu + ۱۶x^{۲} = ۱۶ \qquad (۱)$$
$$m^{۲} + ۱۲mu + ۳۶x^{۲} = ۱۰۰$$

اگر معادلهٔ اول را از معادلهٔ دوم، و معادلهٔ دوم را از معادلهٔ سوم کم کنیم به‌دست می‌آوریم

$$۲mu + ۷x^{۲} = -۹$$
$$۴mu + ۲۰x^{۲} = ۸۴$$

از حل این معادله‌ها به‌دست می‌آوریم $x^{۲} = ۱۷$، $mu = -۶۴$.

الف) بنابر (۱)،

$$m^{۲} = ۲۵ + ۶(۶۴) - ۹(۱۷) = ۲۵۶$$

یعنی m برابر ۱۶ کیلومتر است (و $u = -۴$).

ب) در اینجا

$$m^{۲} + ۲tmu + t^{۲}x^{۲} = ۲۶^{۲}$$

یا

$$۱۶^{۲} - ۲(۶۴)t + ۱۷t^{۲} = ۲۶^{۲}$$

و یا

$$(۱۷t + ۴۲)(t - ۱۰) = ۰$$

بنابراین در ساعت ۱۷ : ۰۰ و همچنین $\frac{۴۲}{۱۷}$ ساعت قبل از ۱۷ : ۰۰، اگر دو کشتی در حرکت باشند، فاصلهٔ آنها از هم ۲۶ کیلومتر بوده است.

ج) در اینجا فاصلهٔ دو کشتی از برابری زیر به‌دست می‌آید

$$D(t) = ۱۷(t - \frac{۶۴}{۱۷})^{۲} + \frac{۲۵۶}{۱۷}$$

پس کمترین فاصلهٔ دو کشتی $\frac{۲۵۶}{۱۷}$ کیلومتر است که $\frac{۶۴}{۱۷}$ ساعت بعد از ۷ : ۰۰ روی می‌دهد.

د) در اینجا باید از اینکه اندازهٔ جابه‌جایی S و T با هم برابرند، یعنی از اینکه $at = m + ct$، استفاده کنیم. چون $m = ۱۶$ و $c - a = u = -۴$، پس $t = ۴$؛ در صورتی که $b > d$، در ساعت ۱۱ : ۰۰ کشتی S در شمال T است.

ه) در اینجا باید

$$T_x - S_x = T_y - S_y > ۰$$

بنابراین

$$m + ut = vt > ۰, \qquad u = -۴$$

چون

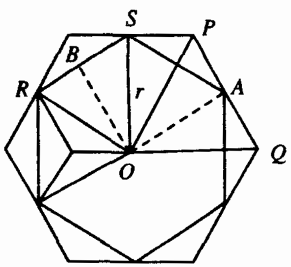
$$v^۲ = x^۲ - u^۲ = ۱۷ - ۱۶ = ۱$$

پس $v = \pm ۱$. به‌ازای $v = ۱$، $t = \frac{۱۶}{۵}$. جواب $v = -۱$ قابل قبول نیست.

و) در اینجا $a^۲ + b^۲ = c^۲ + d^۲$ و $c = ۰$. چون $c - a = u = -۴$، پس $a = ۴$. همچنین $(d-b)^۲ + a^۲ = ۱۷$ که از آن نتیجه می‌شود $d - b = \pm ۱$. با حل $d^۲ - b^۲ = ۱۶$ با این شرط که $d - b = \pm ۱$ به‌دست می‌آوریم $d = -\frac{۱۷}{۲}$، $b = -\frac{۱۵}{۲}$ (توجه کنید که d باید منفی باشد). بنابراین، S با سرعت $\frac{۱۷}{۲} = \sqrt{۴^۲ + \left(\frac{۱۵}{۲}\right)^۲}$ در جهت $\tan^{-۱}\frac{۸}{۱۵}$ به سمت شمال شرق حرکت می‌کند.

مسألهٔ ۳۸۶. الف) نسبت مساحت شش‌ضلعی به مساحت مثلث $\frac{۳}{۲} = \frac{۶}{۴}$ است.

ب) نسبت مساحتهای دو شش‌ضلعی برابر است با نسبت مساحتهای دو مثلث OPQ و ORS در شکل ۲۱۷، و این نسبت برابر است با $\frac{\overline{OA}^۲}{\overline{OB}^۲}$. اگر r شعاع دایره باشد، آنگاه $\overline{OA} = r$، $\overline{OB} = \frac{\sqrt{۳}r}{۲}$ و $\frac{\overline{OA}^۲}{\overline{OB}^۲} = \frac{۴}{۳}$.

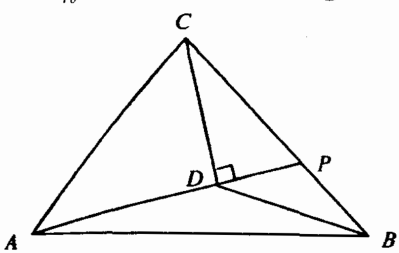


شکل ۲۱۷

راه‌حل هوشمندانهٔ دیگری برای (ب) در شکل ۲۱۷ نشان داده شده است.

تبصره. ثابت کنید که نسبت مساحتهای nضلعیهای منتظم محیطی و محاطی هر دایره برابر با $\sec^۲\frac{\pi}{n}$ است.

مسألهٔ ۳۸۷. فرض کنید D پای عمودی باشد که از C بر AP رسم می‌شود؛ درنتیجه $D \neq P$ و $\angle PCD = ۳۰^\circ$ (شکل ۲۱۸ را ببینید). در این صورت



شکل ۲۱۸

$$\overline{PD} = \frac{۱}{۲}\overline{PC} = \overline{PB}$$

و بنابراین مثلث BPD متساوی‌الساقین است و $\angle PBD = \angle PDB = ۳۰^\circ$. گذشته از این،

$$\angle DBA = \angle CBA - \angle PBD = ۴۵^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵^\circ$$

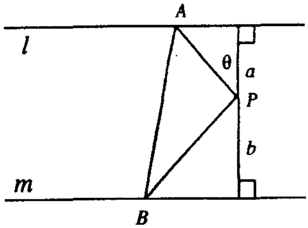
و

$$۳۰^\circ = \angle PDB = \angle DAB + \angle DBA = \angle DAB + ۱۵^\circ$$

به‌این ترتیب، $\angle DAB = ۱۵^\circ$، $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ و درنتیجه

$$\angle DAC = \angle DCA = ۴۵^\circ, \qquad \angle ACB = ۷۵^\circ$$

مسألهٔ ۳۸۸. فرض کنید PAB مثلثی قائم‌الزاویه و θ مطابق شکل ۲۱۹ مشخص شده باشد. مساحت مثلث PAB برابر است با



شکل ۲۱۹

$$\frac{۱}{۲}(\overline{AP})(\overline{PB}) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)\left(\frac{b}{\sin\theta}\right) = \frac{ab}{\sin ۲\theta}$$

و کمترین مقدار این مساحت، یعنی ab، وقتی به‌دست می‌آید که $\theta = ۴۵^\circ$.

تبصره. مسأله را با این فرض که $\angle APB = \alpha$ دوباره حل کنید؛ در این حالت $\theta = \frac{\pi - \alpha}{۲}$.

مسألهٔ ۳۸۹. اگر $۳x^۲ + y^۲ - ۱۲$ و $x^۲ - y^۲ + ۴$ هر دو یا مثبت باشند یا منفی، معادلهٔ مورد نظر به‌این معادله تبدیل می‌شود

$$۳x^۲ + y^۲ - ۱۲ = x^۲ - y^۲ + ۴$$

و یا

$$x^۲ + y^۲ = ۸$$

آیا هر نقطه از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۸$ نقطه‌ای روی نمودار معادلهٔ مفروض است؟ پاسخ مثبت است، زیرا اگر (x, y) در $x^۲ + y^۲ = ۸$ صدق کند، آنگاه

$$|۳x^۲ + y^۲ - ۱۲| = |۲x^۲ - ۴| = |x^۲ - y^۲ + ۴|$$

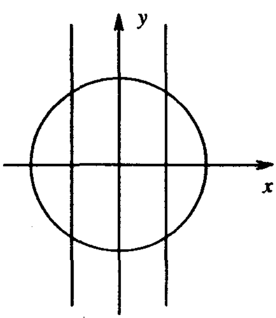
اگر علامتهای $۳x^۲ + y^۲ - ۱۲$ و $x^۲ - y^۲ + ۴$ مختلف باشد، معادلهٔ مورد نظر به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود.

$$۳x^۲ + y^۲ - ۱۲ = -(x^۲ - y^۲ + ۴)$$

و یا

$$|x| = \sqrt{۲}$$

گذشته از این، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که اگر (x, y) روی منحنی $|x| = \sqrt{۲}$ باشد، روی منحنی مورد نظر نیز خواهد بود. بنابراین، نموداری که در جستجوی آن هستیم اجتماع دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۸$ و خطهای $x = \sqrt{۲}$ و $x = -\sqrt{۲}$ است (شکل ۲۲۰ را ببینید).



شکل ۲۲۰

مسألهٔ ۳۹۰. به‌ازای هرماندهٔ درجهٔ دوم (به‌پیمانهٔ p) مانند r، عددی صحیح مانند y، $۱ \leqslant y \leqslant p - ۱$، وجود دارد به‌طوری که مربع آن همنهشت با r است، یعنی

$$y^۲ \equiv r \ (\text{به‌پیمانهٔ } p), \qquad ۱ \leqslant y \leqslant p - ۱$$

البته $p - y$ نیز در همین شرایط صدق می‌کند:

$$(p - y)^۲ \equiv r \ (\text{به‌پیمانهٔ } p), \qquad ۱ \leqslant p - r \leqslant p - ۱$$

(و $y + (p - y) = p$) از طرف دیگر، اگر

$$y_1^2 \equiv y_2^2 \ (p \text{ به‌پیمانهٔ }), \qquad 1 \leqslant y_1 < y_2 \leqslant p - 1$$

آنگاه $p|(y_1^2 - y_2^2)$؛ یعنی $p|(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$. چون $p \nmid (y_1 - y_2)$، پس $p|(y_1 + y_2)$ و بنابراین $y_1 + y_2 = p$؛ یعنی $y_2 = p - y_1$. پس نتیجه می‌گیریم که، به‌پیمانهٔ p، مانده‌های درجهٔ دوم r_1، r_2، $\cdots$ و r_q $\left(q = \frac{p-1}{2}\right)$ دو بار در دنبالهٔ 1^2، 2^2، 3^2، $\cdots$ و $(p-1)^2$ ظاهر می‌شوند و

$$2(r_1 + r_2 + \cdots + r_q) \equiv 1^2 + 2^2 + \cdots + (p-1)^2$$
$$= \frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \ (p \text{ به‌پیمانهٔ })$$

مسألهٔ ۳۹۱. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $\angle DAE = \alpha + \beta = 90^\circ$، و بنابراین (شکل ۲۲۱ را ببینید)

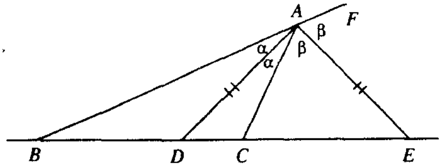
$$\angle ADE = \angle AED = 45^\circ$$

اکنون

$$\angle ACB = 180^\circ - (\angle ADE + \alpha) = 135^\circ - \alpha, \qquad 45^\circ = \alpha + \angle CBA$$

بنابراین

$$\angle ACB - \angle CBA = (135^\circ - \alpha) - (45^\circ - \alpha) = 90^\circ$$



شکل ۲۲۱

مسألهٔ ۳۹۲. الف) قانون کلی چنین است:

$$(n^3 + 1)^3 + (2n^3 - 1)^3 + (n^4 - 2n)^3 = (n^4 + n)^3, \quad n = 2, 3, 4, \cdots$$

ب) قانون کلی چنین است:

$$(3n^2)^3 + (6n^2 - 3n + 1)^3 + (3n(3n^2 - 2n + 1) - 1)^3$$
$$= (3n(3n^2 - 2n + 1))^3, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

ج) قانون کلی چنین است:

$$(3n^2)^3 + (6n^2 + 3n + 1)^3 + (3n(3n^2 + 2n + 1))^3$$
$$= (3n(3n^2 + 2n + 1) + 1)^3, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

مسألهٔ ۳۹۳. هر مثلث‌بندی P را به $n + ۲m - ۲$ مثلث تقسیم می‌کند. این نتیجه را به‌استقرا روی m ثابت می‌کنیم. وقتی $m = ۰$، تنها راه برای مثلث‌بندی چندضلعی این است که $n - ۳$ قطر را رسم کنیم و با این کار همیشه $n - ۲$ مثلث حاصل می‌شود. بنابراین اگر $m = ۰$ دستور مورد نظر درست است. اکنون فرض کنید دستور مورد نظر به‌ازای مقدار مفروضی از m درست باشد. اگر نقطهٔ جدید درون یکی از مثلثهایی باشد که قبلاً تشکیل شده است، باید آن را به سه رأس این مثلث وصل کنیم؛ با این کار، یکی از مثلثها به سه مثلث تبدیل می‌شود و کلاً دو مثلث به مثلثها اضافه می‌شود. اگر نقطهٔ جدید روی یکی از پاره‌خطهای درونی که قبلاً رسم شده است باشد، باید آن را به دو رأس روبه‌رو در دو مثلث که این پاره‌خط ضلع مشترک آنهاست وصل کنیم. با این کار دو تا از مثلثها به چهار مثلث تبدیل می‌شوند و کلاً دو مثلث به مثلثها اضافه می‌شود. بنابراین در هر حالت با اضافه کردن یک نقطهٔ درونی دو مثلث به مثلثها اضافه می‌شود. به‌این ترتیب، برهان کامل می‌شود.

راهی دیگر این است که مجموع زاویه‌های مثلثها را به دو روش به‌دست آوریم. اگر k مثلث داشته باشیم، مجموع زاویه‌ها $k \times ۱۸۰^\circ$ است. همچنین، مجموع زاویه‌های مثلثها برابر است با مجموع زاویه‌های چندضلعی P به علاوهٔ مجموع همهٔ زاویه‌هایی که در نقطه‌های Q_i ایجاد می‌شوند؛ یعنی

$$k \times ۱۸۰^\circ = (n - ۲)۱۸۰^\circ + m \times ۳۶۰^\circ$$

و بنابراین

$$k = n + ۲m - ۲$$

یادداشت. برای مطالعهٔ رابطه‌های این مسأله با قضیهٔ پیک و دستور اویلر نگاه کنید به
R.W. Gookell, M.S.Klamkin, P.Watson: Triangulation and Pick's Theorem, *Math. Mag.* 49(1976) 35-37.

مسألهٔ ۳۹۴. (طرح این مسأله از ا.جاست و ب. کَبَک است؛ حل از ل. هـ. کایرولی.) نتیجه فوراً از رابطه‌های شناخته شدهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin^۲ A + \sin^۲ B + \sin^۲ C = ۲ + ۲\cos A \cos B \cos C \quad (۱)$$

$$\cos^۳ A + \cos^۳ B + \cos^۳ C \geqslant ۳\cos A \cos B \cos C \quad (۲)$$

نابرابری (۲) برقرار است، چون

$$\cos^۳ A + \cos^۳ B + \cos^۳ C - ۳\cos A \cos B \cos C$$
$$= (\cos A + \cos B + \cos C)\frac{(\cos B - \cos C)^۲ + (\cos C - \cos A)^۲ + (\cos A - \cos B)^۲}{۲} \quad (۳)$$

و

$$\cos A + \cos B + \cos C = ۱ + ۴\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

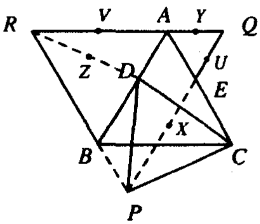
ملاحظه. نابرابریی قویتر از نابرابری مورد نظر چنین است

$$\cos^n A+\cos^n B+\cos^n C\geqslant \frac{۳}{۲^n} \qquad (۴)$$

که در آن برابری فقط در صورتی برقرار است که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد.

تبصره. اتحادهای (۱) و (۳) را ثابت کنید. نابرابری (۴) را دست‌کم در حالتی که زاویه‌های مثلث حاده باشند ثابت کنید.

مسألهٔ ۳۹۵. الف) کافی است ثابت کنیم R، B و P هم‌خط‌اند و $\overline{BP}=\overline{AQ}$. زیرا در این صورت در $\triangle PQR$، $\angle PRQ=۶۰^\circ$ و $\overline{RP}=\overline{RQ}$، و از اینجا نتیجه حاصل می‌شود. دوران (صفحه) در جهت پادساعتگرد به مرکز C و به‌اندازهٔ زاویهٔ ۶۰° نقطهٔ A را به B و نقطهٔ D را به P می‌برد، و بنابراین $\triangle CAD\cong\triangle CBP$. بنابراین $\overline{BP}=\overline{AD}$ که از آن نتیجه می‌شود $\overline{BP}=\overline{AQ}$ و $\angle CBP=\angle CAD$. درنتیجه R، B و P هم‌خط‌اند.



شکل ۲۲۲

ب) فرض کنید X، Y، Z، U و V به‌ترتیب نقاط وسط PE، AQ، RD، QE و RA باشند (شکل ۲۲۲ را ببینید). در این صورت $DA \parallel ZV$ و $AE\parallel YU$ و

$$\overline{ZV}=\frac{۱}{۲}\overline{AD}=\frac{۱}{۲}\overline{AE}=\overline{YU}$$

همچنین

$$\overline{VY}=\frac{۱}{۲}(\overline{RA}+\overline{AQ})=\frac{۱}{۲}\overline{RQ}=\frac{۱}{۲}\overline{PQ}=\overline{UX}$$

و $\angle YVZ=۱۲۰^\circ=\angle YUX$. بنابراین $\triangle YVZ\cong\triangle YUX$، و درنتیجه $\overline{YZ}=\overline{YX}$ و $\angle VYZ=\angle YXU$. بنابراین

$$\begin{aligned}\angle ZYX&=۱۸۰^\circ-(\angle VYZ+\angle QYX)\\&=۱۸۰^\circ-(\angle VYX+۱۸۰^\circ-(\angle YQX+\angle YXQ))=۶۰^\circ\end{aligned}$$

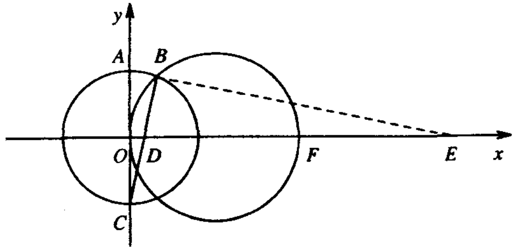
درنتیجه مثلث XYZ (که متساوی‌الساقین است و یک زاویهٔ ۶۰° دارد) متساوی‌الاضلاع است.

مسألهٔ ۳۹۶. راه‌حل اول. دایرهٔ به مرکز O محور قائم را در دو نقطهٔ A و C قطع می‌کند (شکل ۲۲۳ را ببینید). BC و OE یکدیگر را در D قطع می‌کنند. ثابت می‌کنیم F (نقطهٔ تقاطع دایرهٔ ثابت با OE) نقطهٔ وسط DE است. چون $\angle ABC$ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به قطر است، پس

$$\angle DBE=\angle CBA=۹۰^\circ$$

چون اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به هر کمان دو برابر اندازهٔ زاویهٔ محاطی روبه‌رو به همان کمان است و $\overline{OB}=\overline{OC}$، پس

$$\angle AOB=۲\angle ACB=۲\angle OBC$$



شکل۲۲۳

چون $\angle DBE = ۹۰^\circ = \angle OBF$، پس

$$\angle OBC = \angle FBE$$

چون AOC بر دایرهٔ ثابت مماس است، پس

$$\angle AOB = \angle OFB$$

بنابراین

$$\angle FBE + \angle FEB = \angle OFB = \angle AOB = ۲\angle OBC = ۲\angle FBE$$

درنتیجه $\angle FEB = \angle FBE$ و $\overline{BF} = \overline{FE}$. همچنین

$$\angle FBD = ۹۰^\circ - \angle FBE = ۹۰^\circ - \angle ACB = \angle FDB$$

درنتیجه $\overline{DF} = \overline{BF} = \overline{FE}$. بنابراین F نقطهٔ وسط DE است. وقتی‌که دایرهٔ متغیر کوچکتر می‌شود، B و C و بنابراین D به O نزدیکتر می‌شود. بنابراین E به نقطه‌ای مانند P نزدیک می‌شود، به‌طوری که F منصف OP باشد.

راه‌حل دوم. (تحلیلی) دایره‌های

$$(x - ۳)^۲ + y^۲ = ۹, \qquad x^۲ + y^۲ = h^۲$$

وقتی‌که $۶x = h^۲$ یکدیگر را در نقطهٔ

$$\left(\frac{h^۲}{۶}, \frac{h\sqrt{۳۶ - h^۲}}{۶}\right)$$

قطع می‌کنند. معادلهٔ خطی که دو نقطهٔ

$$A(۰, h), \qquad B\left(\frac{h^۲}{۶}, \frac{h\sqrt{۳۶ - h^۲}}{۶}\right)$$

را به‌هم وصل می‌کند این است

$$y - h = \frac{(\sqrt{۳۶ - h^۲} - ۶)x}{h}$$

که نقطهٔ تقاطعش با محور xها نقطهٔ $E(۶ + \sqrt{۳۶ - h^۲}, ۰)$ است. بنابراین، وقتی $h \to ۰$، نقطهٔ E به $(۱۲, ۰)$ نزدیک می‌شود.

مسألهٔ ۳۹۷. روشی برای حل این مسأله این است که بفهمیم اصل و نسب عددی گویا و مثبت مانند v از کجاست. چون، به‌ازای $u > ۰$، $u + ۱ > ۱$ و $\frac{u}{u+۱} < ۱$، معلوم می‌شود که اگر $v > ۱$، آنگاه u، پدر v، به‌طور یکتا مشخص می‌شود: $v = u + ۱$؛ همچنین اگر $v < ۱$، آنگاه u، پدر v، به‌طور یکتا مشخص می‌شود: $v = \frac{u}{u+۱}$. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که در هر حالت، مجموع صورت و مخرج v بزرگتر از مجموع صورت و مخرج «والد» یکتای آن است. با توجه به‌این نکات به نظر می‌رسد که می‌توان از برهان استقرایی استفاده کرد.

نتیجه آشکارا در مورد $\frac{۱}{۱} = ۱$، یعنی تنها عدد گویا و مثبتی که مجموع صورت و مخرجش ۲ است، برقرار است. فرض کنید نتیجه در مورد همهٔ عددهای گویا و مثبتی که مجموع صورت و مخرجشان k، $k \geqslant ۲$، است برقرار باشد. فرض کنید v در ساده‌ترین شکل برابر $\frac{p}{q}$ باشد که در آن $p \geqslant ۱$، $q \geqslant ۱$ و $p + q = k + ۱$. در این صورت اگر $p > q$، v به طریق یکتایی از نوادهٔ $\frac{p-q}{q}$ است و اگر $p < q$، v به طریق یکتایی از نوادهٔ $\frac{p}{q-p}$ است. اما بنابر فرض استقرا هر یک از این والدها به طریق یکتایی از نوادهٔ ۱ است.

مسألهٔ ۳۹۸. فرض کنید طول ضلعهای چهارضلعی a، b، c و d باشند و $۰ < a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. مجموع هر سه ضلعی از این چهارضلع باید اکیداً بزرگتر از ضلع چهارم باشد. بخصوص

$$d < a + b + c \leqslant ۳d$$

چون $a + b + c$ مضرب d است، فقط دو امکان وجود دارد. یکی اینکه $a + b + c = ۳d$؛ در این حالت باید $a = b = c = d$، و نتیجهٔ مطلوب برقرار است.

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $a + b + c = ۲d$. بنابر فرض عدد صحیحی مانند w وجود دارد به‌طوری که $a + b + d = wc$. بنابراین

$$۲a + ۲b + (a + b + c) = ۲wc$$

و درنتیجه

$$(۲w - ۱)c = ۳(a + b) \leqslant ۶c$$

بنابراین $w \leqslant ۳$. چون $d \geqslant c$، $w \neq ۱$.

فرض کنید $w = ۲$. در این صورت $۳(a + b) + c = ۴c$؛ درنتیجه، $a + b = c$ و $۲d = a + b + c = ۲c$. بنابراین $c = d$ و نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

فرض کنید $w = ۳$. در این صورت $۳(a + b) = ۵c$ و

$$۳d = a + b + c + d = (a + b + d) + c = ۴c$$

عددهایی صحیح مانند u و v وجود دارند به‌طوری که

$$b+c+d=ua, \qquad a+c+d=vb$$

از این برابریها و $a+b+d=3c$ و $a+b+c=2d$ نتیجه می‌شود

$$a-d=2d-ua, \qquad b-d=2d-vb$$

بنابراین

$$a=\frac{3d}{u+1}, \qquad b=\frac{3d}{v+1}$$

به‌این ترتیب

$$c=\frac{3}{5}(a+b)=\frac{9d}{5}\left(\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}\right)=\frac{12c}{5}\left(\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}\right)$$

درنتیجه

$$\frac{1}{u+1}+\frac{1}{v+1}=\frac{5}{12}$$

روشن است که $u \geqslant v$ و بنابراین یا $u=11$ و $v=2$، و یا $u=5$ و $v=3$. حالت اول ممکن نیست، چون $vb=a+c+d \geqslant a+2b$. در حالت دوم نتیجه می‌شود $b=\frac{3d}{4}=c$. پس نتیجهٔ مورد نظر در همهٔ حالتها برقرار است.

مسألهٔ ۳۹۹. به دو سطر مجاور که آنها را A و B می‌نامیم توجه کنید. فرض کنید در سطر A، r نقطهٔ قرمز مجاور نقاط قرمز سطر B، b نقطهٔ آبی مجاور نقاط آبی سطر B، u نقطهٔ قرمز مجاور نقاط آبی سطر B و v نقطهٔ آبی مجاور نقاط قرمز سطر B باشد. در این صورت r پاره‌خط قرمز و b پاره‌خط آبی داریم که عناصر A را به عناصر B وصل می‌کنند. در سطر A، $r+u$ نقطهٔ قرمز و $b+v$ نقطهٔ آبی و در سطر B، $r+v$ نقطهٔ قرمز و $b+u$ نقطهٔ آبی هست. بنابراین، $r+u=b+v$ و $r+v=b+u$. بنابراین $r-b=v-u=-(v-u)$ و درنتیجه $r=b$. بنابراین تعداد پاره‌خطهای قرمز و آبی بین دو سطر مجاور برابرند. حکم مشابهی در مورد ستونهای مجاور درست است. پس نتیجهٔ مطلوب برقرار است.

مسألهٔ ۴۰۰. اگر هر یک از میهمانان بقیه را بشناسد، درستی حکم معلوم است. فرض کنید یکی از میهمانان مانند A میهمان دیگری مانند B را نشناسد. فرض کنید X میهمان سومی باشد. اگر X میهمان دیگری غیر از A و B مانند Y را نشناسد، $\{A, B, X, Y\}$ مجموعه‌ای از چهار میهمان است که هیچ‌یک از آنها هر سه نفر دیگر را نمی‌شناسد. پس X باید همهٔ میهمانان، غیر از احتمالاً A و B، را بشناسد.

فرض کنید C میهمانی غیر از A و B باشد که همهٔ میهمانان را نشناسد و D میهمان چهارمی باشد. در این صورت، بنابر استدلال بالا، C و D هر دو همهٔ میهمانان را غیر از A و B می‌شناسد. همچنین C از A و B دست‌کم یکی را نمی‌شناسد. بنابراین بین $\{A, B, C, D\}$، D باید کسی باشد که سه نفر دیگر را می‌شناسد. پس D باید همهٔ میهمانان را بشناسد و A، B و C تنها کسانی هستند که بقیه را نمی‌شناسند.

بنابراین، در این میهمانی بیش از سه نفر که همهٔ میهمانان را نشناسند حضور ندارند.

مسألهٔ ۴۰۱. دایرهٔ محیطی nضلعی محاطی را در نظر بگیرید. این دایره باید هر یک از ضلعهای nضلعی مفروض را قطع کند و شعاع آن وقتی مینیمم است که دایرهٔ محاطی nضلعی مفروض باشد. به‌این ترتیب نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۴۰۲. از معادلهٔ اول نتیجه می‌شود

$$(z-x)(۱-S)=y-z$$

که در آن $S=x+y+z$. به‌طور مشابه،

$$(x-y)(۱-S)=z-x$$

$$(y-z)(۱-S)=x-y$$

بنابراین

$$(x-y)(y-z)(z-x)[(۱-S)^۳-۱]=۰$$

و همهٔ جوابهای این معادله به $x=y$ منجر می‌شوند. در این صورت

$$x^۲+(۱-x-y)^۲+(۱-y)^۲=۲-۶x(۱-x)$$

بنابراین، مینیمم مورد نظر $\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۴}-۲$ است که به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ حاصل می‌شود.

یادداشت. به‌طور هندسی، این مسأله با یافتن کوچکترین مثلث متساوی‌الاضلاعی که بتوان آن را در مثلث متساوی‌الاضلاع مفروضی محاط کرد هم‌ارز است. از نظر شهودی، رأسهای کوچکترین مثلثی که این ویژگی را دارد، نقاط وسط ضلعهای مثلث مفروض‌اند. (مسألهٔ ۴۰۱ را ببینید.)

مسألهٔ ۴۰۳. معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$(x^۲+۱)^۲=۲(x+۱)^۲$$

بنابراین

$$x^۲+۱=\pm\sqrt{۲}(x+۱)$$

و ریشه‌های این دو معادلهٔ درجهٔ دوم ریشه‌های معادلهٔ مفروض را به‌دست می‌دهند.

تبصره. معادلهٔ درجهٔ چهارم کلیتر زیر را حل کنید.

$$x^۴-۴x=\frac{۲}{k}-k^۲$$

مسألهٔ ۴۰۴. می‌توانیم بدون کاستن از کلیت برهان فرض کنیم به‌ازای هر x، $P(x)>Q(x)$. در این صورت

$$P(P(x))>Q(P(x))=P(Q(x))>Q(Q(x))$$

که از آن نتیجهٔ مطلوب به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۴۰۵. اگر در برابری (۱) مخرج کسرها را حذف کنیم، بعد از فاکتورگیری به‌دست می‌آوریم

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=۰$$

بنابراین یا $a=b+c$، یا $b=c+a$، و یا $c=b+a$. در هر یک از این حالتها، سه کسر سمت چپ برابری (۱) (به‌ترتیبی) به ۲، ۲، ۲− تبدیل می‌شوند. بنابراین مقدار P ثابت و برابر ۸− است.

مسألهٔ ۴۰۶. فرض کنید $\sqrt[۳]{a}$، $\sqrt[۳]{b}$ و $\sqrt[۳]{c}$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم

$$x^۳-px^۲+qx-r=۰ \qquad (۱)$$

باشند، در این صورت

$$\begin{aligned} S_۱ &= p \\ S_۲ &= p^۲-۲q \\ S_۳ &= pS_۲-qS_۱+۳r=p^۳-۳pq+۳r \\ S_n &= pS_{n-۱}-qS_{n-۲}+rS_{n-۳} \qquad (n>۳) \end{aligned}$$

بنابراین، اگر p، q و r عددهایی صحیح باشند، همهٔ S_nها نیز عددهایی صحیح‌اند. اکنون باقی می‌ماند که p، q و r را طوری انتخاب کنیم که ریشه‌های معادلهٔ (۱) عددهایی حقیقی و غیر صحیح باشند. انجام دادن این کار آسان است. مثلاً فرض کنید

$$P(x)\equiv x^۳-۱۰۰x^۲+x+۱ \qquad (۲)$$

چون $P(۰)=۱$، $P(۱)=-۹۷$ و $P(۱۰۰)=۱۰۱$، $P(x)$ در بازه‌های $(۰,۱)$ و $(۱,۱۰۰)$ ریشه‌هایی حقیقی دارد. چون مجموع سه ریشهٔ $P(x)$ برابر ۱۰۰ است، ریشهٔ سوم نیز حقیقی است. همچنین این ریشه‌ها عددهایی صحیح نیستند، چون هر ریشهٔ صحیح باید مقسوم‌علیه جملهٔ ثابت $P(x)$، یعنی ۱، باشد. بنابراین یکی از سه‌تاییهای مناسب سه‌تایی است که عضوهایش مکعب ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)$ است، و بی‌شمار چندجمله‌ای از این دست وجود دارد.

مسألهٔ ۴۰۷. نتیجهٔ مورد نظر از نابرابری قویتر

$$\frac{n+۲}{S}\geqslant\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{S-a_i}$$

یا هم‌ارز با آن،

$$۲\geqslant\sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i}{S-a_i} \qquad (۱)$$

به‌دست می‌آید. فرض کنید $a_۱\leqslant a_۲\leqslant\cdots\leqslant a_n$. در این صورت، چون $S-a_۱\geqslant S-a_n\geqslant a_n$، پس

$$\sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i}{S-a_i}\leqslant\sum_{i=۱}^{n-۱}\frac{a_i}{S-a_n}+\frac{S-a_n}{S-a_n}=۲$$

در نابرابری اخیر برابری برقرار است اگر و فقط اگر

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = a_{n-۲} = ۰, \quad a_{n-۱} = a_n$$

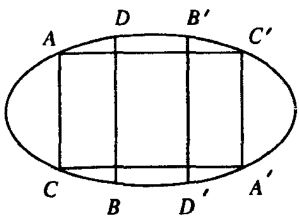
(که در این حالت چندضلعی تباهیده است.) حالت خاص (۱)، وقتی‌که $n = ۳$، در کتاب زیر آمده است

O. Bottema, et al, *Geometric Inequalities*, Walters Noordhoff, Gröningen. 1969, p.15.

مسألهٔ ۴۰۸. تصویر موازی بر روی صفحه‌ای مناسب را در نظر بگیرید، به‌طوری که تصویر بیضی دایره باشد. این تصویر سازی توازی را حفظ می‌کند و درنتیجه مستطیل به متوازی الاضلاع تبدیل می‌شود. اما چون این متوازی‌الاضلاع در دایره‌ای محاط است باید مستطیل باشد. اکنون اگر تبدیل معکوس را در نظر بگیریم، محورهای بیضی متناظر با قطرهایی از دایره خواهند بود که با اضلاع مستطیل محاط در دایره موازی‌اند.

راه‌حلی دیگر و تعمیم. چون قطرهای مستطیل یکدیگر را نصف می‌کنند و با هم برابرند، ابتدا ثابت می‌کنیم که نقطهٔ تقاطع دو وتر بیضی که با هم برابر باشند و یکدیگر را نصف کنند باید مرکز بیضی باشد. این نتیجه در مورد هر ناحیهٔ کاملاً محدب با تقارن مرکزی برقرار است. روش اثباتمان برهان خلف است.

فرض کنید AB و CD دو وتر برابر و منصف یکدیگر باشند که در نقطه‌ای غیر از مرکز ناحیهٔ موردبحث متقاطع‌اند. AB و CD را نسبت به مرکز این ناحیه منعکس می‌کنیم؛ دو وتر دیگر مانند $A'B'$ و $C'D'$ حاصل می‌شود که یکدیگر را نصف می‌کنند (شکل ۲۲۴ را ببینید). در این صورت



شکل ۲۲۴

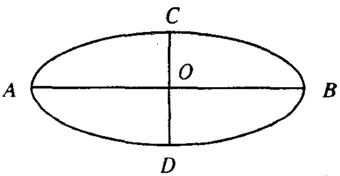
$$\overline{AC} = \overline{DB} = \overline{B'D'} = \overline{C'A'}$$

$$AC \parallel DB \parallel B'D' \parallel C'A'$$

و این تناقض است، چون در هر ناحیهٔ کاملاً محدب حداکثر دو وتر موازی و برابر وجود دارد (اگر چهار وتر موازی و برابر وجود داشته باشد، بنابر تحدب، دو وتر داخلی باید بلندتر از دو وتر خارجی باشند).

برای اینکه متوازی‌الاضلاع مستطیل محاط در بیضی باشد، باید طول قطرهای آن با هم برابر باشند و این مستلزم آن است که قطرها در بیضی به‌طور متقارن قرارگرفته باشند.

به‌طور کلیتر، اگر ناحیه‌ای کاملاً محدب با تقارن مرکزی دو محور تقارن عمود بر هم داشته باشد، به‌طوری که طول بردار شعاعی از O به‌طور یکنوا از C تا B افزایش یابد (شکل ۲۲۵ را ببینید)، ضلعهای هر مستطیل محاط در این ناحیه باید موازی AB و CD باشند.



شکل ۲۲۵

مسألهٔ ۴۰۹. بنابر مسأله ۴۰۸، ضلع مستطیلها باید با محورهای بیضی موازی باشد. مختصات چهار رأس مستطیلها به‌شکل $(\pm h, \pm k)$ هستند. اکنون می‌خواهیم $A = hk$ را با این شرط که $\frac{h^۲}{a^۲} + \frac{k^۲}{b^۲} = ۱$ ماکسیمم کنیم. بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}\left\{\frac{h^۲}{a^۲} + \frac{k^۲}{b^۲}\right\} \geqslant \frac{hk}{ab}$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $\frac{h^۲}{a^۲} = \frac{k^۲}{b^۲} = \frac{۱}{۲}$. بنابراین مساحت ماکسیمم $۴\frac{ab}{۲} = ۲ab$ است.

یادداشت. در بسیاری از متون موازی بودن ضلعهای مستطیل با محورهای بیضی بدیهی فرض می‌شود. اگرچه درستی این حکم از نظر شهودی روشن است اما به برهان نیاز دارد.

تبصره. $h^m k^n$ را در صورتی که عددهای صحیح m و n معلوم باشند و $\frac{h^۲}{a^۲} + \frac{k^۲}{b^۲} = ۱$ ماکسیمم کنید.

مسألهٔ ۴۱۰. **راه‌حل اول.** فرض کنید $w = re^{i\alpha}$ و $z = se^{i\beta}$، که در آنها r قدرمطلق w و s قدرمطلق z است. باید ثابت کنیم

$$۲|re^{i\alpha} - se^{i\beta}| \geqslant (r+s)|e^{i\alpha} - e^{i\beta}| \qquad (۱)$$

یا

$$۴\{(r\cos\alpha - s\cos\beta)^۲ + (r\sin\alpha - s\sin\beta)^۲\}$$
$$\geqslant (r+s)^۲\{(\cos\alpha - \cos\beta)^۲ + (\sin\alpha - \sin\beta)^۲\}$$

یا معادل با آن

$$۲\left(r^۲ + s^۲ - ۲rs\cos(\alpha-\beta)\right) \geqslant (r^۲ + s^۲ + ۲rs)(۱ - \cos(\alpha-\beta))$$

و یا

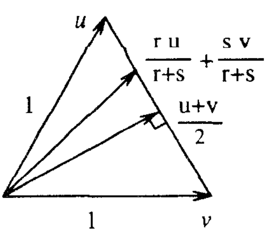
$$(r-s)^۲(۱ + \cos(\alpha-\beta)) \geqslant ۰$$

این نابرابری آشکارا برقرار است و در آن برابری برقرار است اگر و فقط اگر $r = s$ و یا $\alpha - \beta = \pm\pi$.

راه‌حل دوم. اگر فرض کنید $u = e^{i\alpha}$ و $-v = e^{i\beta}$، نابرابری (۱) را می‌توان چنین نوشت

$$\left|\frac{r}{r+s}u + \frac{s}{r+s}v\right| \geqslant \left|\frac{u+v}{۲}\right|$$

دلیل هندسی درستی این نابرابری روشن است: فاصلهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین از نقطه‌ای روی قاعدهٔ آن دست‌کم برابر طول ارتفاع خارج شده از رأس مثلث است (شکل ۲۲۶ را ببینید).



شکل ۲۲۶

مسألهٔ ۴۱۱. معادلهٔ مورد نظر را در $(x-a)(x-b)$ ضرب کنید. معادلهٔ حاصل این است

$$(a-b)x^{n+2}-(a^{n+2}-b^{n+2})x+ab(a^{n+1}-b^{n+1})=0 \qquad (2)$$

می‌توانیم بدون کاستن از کلیت برهان فرض کنیم $a>b$. چند حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. n زوج است و $a>b\geqslant 0$. معادلهٔ (۱) آشکارا ریشهٔ مثبت ندارد و ثابت می‌کنیم که ریشهٔ منفی نیز ندارد. چون در دنبالهٔ ضرایب معادلهٔ (۲) تعداد تغییر علامتها ۲ است، این معادله حداکثر دو ریشهٔ مثبت دارد و این دو ریشه $x=a$ و $x=b$ هستند که با ضرب کردن معادلهٔ (۱) در $(x-a)(x-b)$ وارد شده‌اند. اگر در معادلهٔ (۲)، x را به $-x$ تبدیل کنیم علامت ضرایب معادلهٔ حاصل تغییر نمی‌کند، و بنابراین معادلهٔ (۲)، و همچنین معادلهٔ (۱)، ریشهٔ منفی ندارد.

حالت ۲. n زوج است و $a\geqslant 0>b$. اگر $a^2>b^2$، به همان نتایج حالت قبل می‌رسیم. پس فرض می‌کنیم $a^2<b^2$؛ در این صورت، علامت ضرایب به‌ترتیب $+$، $+$ و $-$ است، و درنتیجه یک ریشهٔ مثبت داریم. اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم، علامتها به $+$، $-$ و $-$ تبدیل می‌شوند، و درنتیجه یک ریشهٔ منفی داریم. بنابراین معادلهٔ (۱) ریشهٔ حقیقی ندارد.

حالت ۳. n زوج است و $0>a>b$. در اینجا علامت ضرایب $+$، $+$، $+$ است، و درنتیجه ریشهٔ مثبت نداریم. اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم، علامتها به $+$، $-$، $+$ تبدیل می‌شوند، و درنتیجه معادلهٔ (۲) دو ریشهٔ منفی دارد. باز هم معادلهٔ (۱) ریشهٔ حقیقی ندارد.

اکنون اگر همین سه حالت بالا را در حالتی که n فرد است بررسی کنیم، درمی‌یابیم که معادلهٔ (۱) حداکثر یک ریشهٔ حقیقی دارد.

مسألهٔ ۴۱۲. ابتدا توجه کنید که

$$(z-1)P(z)=a_0z^{n+1}-(a_0-a_1)z^n-(a_1-a_2)z^{n-1}-\cdots-(a_{n-1}-a_n)z-a_n$$

چون a_0، a_0-a_1، a_1-a_2، $\cdots$، $a_{n-1}-a_n$ و a_n همه نامنفی‌اند، از نابرابری مثلثی نتیجه می‌شود

$$|(z-1)P(z)|\geqslant a_0|z|^{n+1}-\left\{(a_0-a_1)|z|^n+(a_1-a_2)|z|^{n-1}+\cdots+a_n\right\} \quad (1)$$

اکنون توجه کنید که اگر $|z|>1$، طرف راست (۱) از

$$\begin{aligned}&|a_0\|z|^{n+1}-|z|^n\left\{(a_0-a_1)+(a_1-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+a_n\right\}\\&=a_0|z|^n(|z|-1)>0\end{aligned}$$

کوچکتر نیست؛ یعنی $|P(z)|>0$، و بنابراین $|r|\leqslant 1$.

مسألهٔ ۴۱۳. چون

$$[\sqrt{k}]=n, \qquad n^2\leqslant k\leqslant (n+1)^2-1$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} S_n &= ۱(۲^۲ - ۱^۲) + ۲(۳^۲ - ۲^۲) + \cdots + (n-۱)(n^۲ - (n-۱)^۲) \\ &= -۱^۲ - ۲^۲ - ۳^۲ - \cdots - (n-۱)^۲ + (n-۱)n^۲ \\ &= (n-۱)n^۲ - \frac{(n-۱)(n)(۲n-۱)}{۶} \\ &= \frac{n(n-۱)(۴n+۱)}{۶} \end{aligned}$$

که پاسخ قسمت اول مسأله است.

چون

$$[\sqrt[۳]{k}] = n, \qquad n^۳ \leqslant k \leqslant (n+۱)^۳ - ۱$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} T_n &= ۱(۲^۳ - ۱^۳) + ۲(۳^۳ - ۲^۳) + \cdots + (n-۱)(n^۳ - (n-۱)^۳) \\ &= -۱^۳ - ۲^۳ - ۳^۳ - \cdots - (n-۱)^۳ + (n-۱)n^۳ \\ &= (n-۱)n^۳ - \frac{(n-۱)^۲n^۲}{۴} \\ &= \frac{(n-۱)n^۲(۳n+۱)}{۴} \end{aligned}$$

مسألهٔ ۴۱۴. اگر هفت عدد صحیح مورد نظر $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و $a_۷$ باشند، آنگاه

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۷ + (a_۱ + a_۲) + (a_۲ + a_۳) + \cdots + (a_۷ + a_۱) = ۱ + ۲ + \cdots + ۱۴$$

و یا

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_۷ = ۳۵$$

۱ باید انتخاب شود. اکنون به روش «آزمون و خطا» پیش می‌رویم. چون $۳ + ۲ = ۴ + ۱ = ۵$، بعد از ۱، عدد صحیح ۴ را امتحان می‌کنیم. برای به‌دست آوردن ۱۴ می‌توانیم ۱۰ را مجاور ۴ بنویسیم. برای به‌دست آوردن ۱۳ می‌توانیم ۳ را مجاور ۱۰ بنویسیم، و غیره. این روند به پاسخ درست منجر می‌شود:

		۱		
	۴		۶	
۱۰				۲
	۳		۹	

تبصره. همهٔ پاسخها از عددهای طبیعی متمایز را تعیین کنید.

مسألهٔ ۴۱۵. هر آرایشی جوابگوست! ابتدا توجه کنید که $(۹۹)(۳۲) = ۳۱۶۸$.

باقیماندهٔ تقسیم بر ۳۲ فقط به آخرین پنج رقم مقسوم بستگی دارد (چون $۲^۵|۱۰^۵$). باقیماندهٔ تقسیم بر ۹۹ با تعویض جای دو رقم مقسوم که هر دو یا در مواضع توانهای ۱۰ با نمای زوج باشند و یا

در مواضع توانهای ۱۰ با نمای فرد تغییر نمی‌کند، چون

$$a10^n + b10^{n+2m} \equiv b10^n + a10^{n+2m} \text{ (به‌پیمانهٔ ۹۹)}$$

سرانجام

$$39997 \equiv 1981 \text{ (به‌پیمانهٔ ۳۱۶۸)}$$

مسألهٔ ۴۱۶. چون

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1+\tan A \tan B}$$

(و همین‌طور در مورد بقیهٔ زاویه‌ها) اگر به‌جای $\tan A$، $\tan B$ و $\tan C$ به‌ترتیب، u، v و w قرار دهیم، می‌توانیم رابطهٔ مورد نظر را به‌شکل زیر بنویسیم

$$\frac{u-v}{1+uv} + \frac{v-w}{1+vw} + \frac{w-u}{1+wu} = 0$$

با ترکیب کسرها و فاکتورگیری به رابطهٔ زیر می‌رسیم

$$(u-v)(v-w)(w-u) = 0$$

بنابراین مثلثهای مورد نظر متساوی‌الساقین‌اند.

مسألهٔ ۴۱۷. روش اثباتمان برهان خلف است. فرض کنید چنین عددهایی وجود داشته باشند. دراین‌صورت

$$cr^{n_1} = \sqrt[m]{p_1}, \quad cr^{n_2} = \sqrt[m]{p_2}, \quad cr^{n_3} = \sqrt[m]{p_3}$$

که در آنها n_1، n_2 و n_3 عددهایی صحیح و متمایزند. با حذف کردن c به‌دست می‌آوریم

$$r^{n_1-n_2} = \sqrt[m]{\frac{p_1}{p_2}}, \quad r^{n_2-n_3} = \sqrt[m]{\frac{p_2}{p_3}}$$

سپس با حذف کردن r به‌دست می‌آوریم

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{n_2-n_3} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{n_1-n_2}$$

و این بنابر قضیهٔ تجزیهٔ یکتا ناممکن است. برای مطالعهٔ مسألهٔ مشابهی در مورد جمله‌های تصاعد حسابی مسألهٔ ۱۸۲ را ببینید.

مسألهٔ ۴۱۸. روش اثباتمان برهان خلف است. فرض کنید دو وتر موازی با طول ماکسیمم وجود داشته باشد. نقاط انتهایی این دو وتر رأسهای متوازی‌الاضلاعی هستند که دست‌کم یک قطرش بلندتر از هر ضلع آن است. (توجه کنید که اگر طول ضلعهای متوازی‌الاضلاع a و b باشد، طول قطرهای آن $a^2+b^2\pm 2ab\cos\theta$ است.) این نتیجه با فرض اولیه‌مان تناقض دارد و بنابراین حکم مسأله درست است.

مسألهٔ ۴۱۹. دو وتر موازی هم مانند AB و $A'B'$ با طول ماکسیمم از دو شکل در نظر بگیرید*. فقط

* بنابر مسألهٔ قبل، اگر یک جفت وتر موازی با طول ماکسیمم در دو شکل در نظر بگیریم، هیچ وتر با طول ماکسیمم دیگری موازی با این دو وتر وجود ندارد. همچنین، برای اینکه دو شکل دو مرکز تجانس داشته باشند، باید نوعی تقارن داشته باشند، مثلاً دو بیضی متجانس یا دو متوازی‌الاضلاع متجانس باشند.

دو تناظر وجود دارد: یا $A \leftrightarrow A'$، $B \leftrightarrow B'$ و یا $A \leftrightarrow B'$، $B \leftrightarrow A'$. دو مرکز تجانس نقاط تقاطع AA' و BB'، و AB' و $A'B$ هستند. توجه کنید که اگر دو شکل همنهشت هم باشند، یکی از دو مرکز تجانس «نقطهٔ در بی‌نهایت» است.

مسألهٔ ۴۲۰. مختصات سه رأس مثلث را $(a, ۰, ۰)$، $\left(-\frac{a}{۲}, \frac{a\sqrt{۳}}{۲}, ۰\right)$ و $\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{a\sqrt{۳}}{۲}, ۰\right)$ و مختصات محل پرتابه را (x, y, h) بگیرید. در این‌صورت

$$R_۱^۲ = (x-a)^۲ + y^۲ + h^۲$$

$$R_۲^۲ = \left(x + \frac{a}{۲}\right)^۲ + \left(y - a\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ + h^۲$$

$$R_۳^۲ = \left(x + \frac{a}{۲}\right)^۲ + \left(y + a\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ + h^۲$$

با ساده کردن این رابطه‌ها به‌دست می‌آوریم

$$R_۱^۲ = b^۲ - ۲ax$$

$$R_۲^۲ = b^۲ + ax - ay\sqrt{۳}$$

$$R_۳^۲ = b^۲ + ax + ay\sqrt{۳}$$

که در آنها $b^۲ = x^۲ + y^۲ + h^۲ + a^۲$. با جمع کردن این سه رابطه به‌دست می‌آوریم

$$R_۱^۲ + R_۲^۲ + R_۳^۲ = ۳b^۲$$

در این‌صورت

$$ax = \frac{۱}{۲}(b^۲ - R_۱^۲)$$

و

$$ay\sqrt{۳} = \frac{۱}{۲}(۳b^۲ - ۲R_۲^۲ - R_۱^۲)$$

و درنتیجه

$$x^۲ + y^۲ = \frac{(b^۲ - R_۱^۲)^۲}{۴a^۲} + \frac{(۳b^۲ - ۲R_۲^۲ - R_۱^۲)^۲}{۱۲a^۲}$$

سرانجام

$$h^۲ = b^۲ - a^۲ - \frac{(b^۲ - R_۱^۲)^۲}{۴a^۲} - \frac{(۳b^۲ - ۲R_۲^۲ - R_۱^۲)^۲}{۱۲a^۲}$$

که در آن $b^۲ = \frac{۱}{۳}(R_۱^۲ + R_۲^۲ + R_۳^۲)$.

مسألهٔ ۴۲۱. اگر دستگاه مختصات قائمی را انتخاب کنیم که محورهای آن در امتداد سه وتر مفروض باشند، B نقطهٔ $(۲b, ۰, ۰)$ و (بنابر تقارن) مرکز کره، O، نقطهٔ $(b-a, d-c, f-e)$ خواهد بود؛ در اینجا بدون کاستن از کلیت برهان فرض کرده‌ایم $b \geqslant a$، $d \geqslant c$ و $f \geqslant e$. اکنون

$$R^۲ = \overline{OB}^۲ = (b - a - ۲b)^۲ + (d-c)^۲ + (f-e)^۲$$

و چون $ab = cd = ef$، پس

$$R^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ + e^۲ + f^۲ - ۲ef$$

مسألهٔ ۴۲۲. اگر در مرحله‌ای r قطعه کاغذ داشته باشیم، s تا از آنها را دست‌نخورده باقی بگذاریم و هریک از $r-s$ قطعهٔ دیگر را به ۷ قطعهٔ کوچک ببریم، تعداد کلِّ قطعه‌ها بعد از این‌کار برابر است با

$$s+۷(r-s)=۷r-۶s\equiv r\ (\text{به‌پیمانهٔ ۶})$$

درابتدا $r=۷$؛ پس درانتها تعداد قطعه‌ها عدد صحیحی مانند x است به‌طوری‌که $۱۹۸۸<x<۱۹۹۸$ و

$$x\equiv ۷\ (\text{به‌پیمانهٔ ۶})$$

یعنی

$$x=۱۹۹۳=۶(۳۳۱)+۷$$

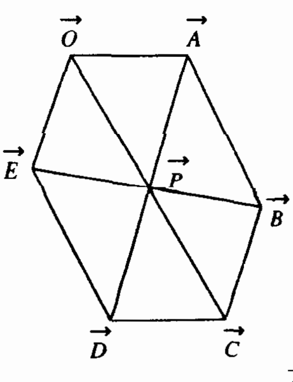
مسألهٔ ۴۲۳. پاره‌خطی به طول $r=۲^s+t$ درنظر بگیرید که در آن s و t عددهایی طبیعی‌اند و $۰<t\leqslant ۲^s$. می‌خواهیم این پاره‌خط را به r قطعه به‌طول واحد ببریم (قرار دادن قطعات روی‌هم پیش از هر برش مجاز است). با یک برش می‌توانیم قطعه‌هایی به طولهای ۲^s و t به‌دست آوریم؛ سپس با s برش دیگر (با قراردادن قطعه‌ها روی‌هم) r قطعه به طول واحد به‌دست می‌آید. با کمتر از $s+۱$ برش نمی‌توان این‌کار را انجام داد، چون در هر برش تعداد قطعه‌ها حداکثر دوبرابر می‌شود.

نتیجه اینکه اگر

$$a=۲^m+d\qquad (۰<d\leqslant ۲^m)$$
$$b=۲^n+e\qquad (۰<e\leqslant ۲^n)$$
$$c=۲^p+f\qquad (۰<f\leqslant ۲^p)$$

کمترین تعداد برشهای صفحه‌ای لازم برای بریدن مکعب مستطیلی به ابعاد $a\times b\times c$ به abc مکعب واحد برابر است با $m+n+p+۳$.

مسألهٔ ۴۲۴. فرض کنید بردارهایی که ازیکی از رأسهای شش‌ضلعی مفروض به رأسهای دیگرش رسم شده‌اند با $\overrightarrow{A}$، $\overrightarrow{B}$، $\overrightarrow{C}$، $\overrightarrow{D}$ و $\overrightarrow{E}$ نشان دهیم و $\overrightarrow{A}$، $\overrightarrow{B}$ و $\overrightarrow{C}$ مستقل خطی باشند (شکل ۲۲۷ را ببینید). چون اضلاع روبه‌رو موازی‌اند،



شکل ۲۲۷

$$\overrightarrow{D}-\overrightarrow{C}=-u\overrightarrow{A}$$
$$\overrightarrow{E}-\overrightarrow{D}=v(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})$$
$$-\overrightarrow{E}=w(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{C})$$

اگر این سه رابطه را باهم جمع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$-\overrightarrow{C}=-w\overrightarrow{C}+(w-v)\overrightarrow{B}+(v-u)\overrightarrow{A}$$

چون $\overrightarrow{A}$، $\overrightarrow{B}$ و $\overrightarrow{C}$ مستقل خطی‌اند، $u = v = ۱ = w$. بنابراین، اضلاع روبه‌روی شش‌ضلعی هم موازی‌اند و هم همنهشت. چون قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند، سه قطر AD، OC و BE (مثلاً در نقطهٔ P) همرس‌اند و شش‌ضلعی حول P تقارن مرکزی دارد. اکنون باید ثابت کنیم که نقاط وسط OA، AB، BC و CD که آنها را به‌ترتیب با F، G، H و I نشان می‌دهیم همصفحه‌اند. چون $FI \parallel AC \parallel GH$، آنچه گفتیم درست است.

مسألهٔ ۴۲۵. فرض کنید معادلهٔ دایرهٔ سمت چپ $x^۲ + y^۲ = R^۲$ باشد. در این‌صورت اگر محور xها در امتداد خط‌المرکزین دایره‌ها باشد، معادلهٔ دایرهٔ دیگر $(x - ۲R)^۲ + y^۲ = R^۲$ است. مختصات ذره‌ای که روی دایرهٔ سمت چپ حرکت می‌کند و حرکت خود را از نقطهٔ تماس دایره‌ها آغاز کرده است از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید

$$x = R\cos wt,\quad y = R\sin wt$$

که در آنها w تندی زاویه‌ای است. مختصات ذرهٔ دیگر از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید

$$x' - ۲R = R\cos(\pi + wt) = -R\cos wt$$

$$y' = R\sin(\pi + wt) = -R\sin wt$$

اگر جابه‌جایی (x', y') را نسبت به (x, y) با (x'', y'') نشان دهیم،

$$x'' = x' - x = ۲R - ۲R\cos wt$$

$$y'' = y' - y = -۲R\sin wt$$

بنابراین $(x'' - ۲R)^۲ + y''^۲ = (۲R)^۲$. اگر سرعت زاویه‌ای ثابت نباشد، به‌جای wt باید $\int_۰^t wdt$ را قرار دهیم که همان نتیجه را به‌دست می‌دهد.

مسألهٔ ۴۲۶. فرض کنیم معادلهٔ سهمی $y = ax^۲$ و نقطهٔ درونی ثابت (h, k) باشد. در این‌صورت معادلهٔ خطهای حامل وترهای موردنظر به‌شکل $y - k = m(x - h)$ است. از حل معادلهٔ

$$ax^۲ - k = m(x - h)$$

نقاط تقاطع به‌دست می‌آیند: $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$. بنابراین، نقاط وسط وترها از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آیند:

$$X = \frac{x_۱ + x_۲}{۲} = \frac{m}{۲a}$$

$$Y = \frac{y_۱ + y_۲}{۲} = m\frac{x_۱ + x_۲}{۲} + k - mh = \frac{m^۲}{۲a} + k - mh$$

با حذف کردن m به‌دست می‌آوریم $Y = ۲aX^۲ - ۲ahX + k$، و یا

$$Y - k + \frac{ah^۲}{۲} = ۲a\left(X - \frac{h}{۲}\right)^۲ \qquad (۱)$$

بنابراین، مکان‌هندسی موردنظر تصویر آفین انتقال‌یافته‌ای از سهمی اولیه است.

برای کامل کردن حل مسأله باید ثابت کنیم که هر نقطه مانند (r,s) روی مکان هندسی (۱) ویژگی موردنظر را دارد: نقاط تقاطع خطی را که از نقاط (r,s) و (h,k) می‌گذرد با سهمی $y = ax^۲$ درنظر می‌گیریم؛ نقطهٔ وسط وتری که این دو نقطهٔ تقاطع را به‌هم وصل می‌کند نقطهٔ (r,s) است. شیب خطی که از (r,s) و (h,k) می‌گذرد برابر است با

$$\frac{k-s}{h-r} = \frac{k - \{۲ar^۲ - ۲ahr + k\}}{h-r} = ۲ar$$

از قسمت اول حل معلوم می‌شود خطی که با این شیب از (h,k) می‌گذرد وتری را مشخص می‌کند که طول نقطهٔ وسط آن $r = \frac{۲ar}{۲a}$ است، و به‌این‌ترتیب برهان کامل می‌شود.

مسألهٔ ۴۲۷. ابتدا توجه کنید که $\frac{(n+۳)^۲}{۱۲}$ هیچ‌گاه به‌شکل $k + \frac{۱}{۲}$ نیست. چون اگر چنین باشد، باید $(n+۳)^۲ = ۱۲k + ۶$. اما چنین چیزی ناممکن است، چون طرف چپ به‌پیمانهٔ ۴ یا با ۰ همنهشت است یا با ۱ و طرف راست به‌پیمانهٔ ۴ با ۲ همنهشت است. اکنون فرض کنید $G(n) = k$. دراین‌صورت

$$k - \frac{۱}{۲} < \frac{(n+۳)^۲}{۱۲} < k + \frac{۱}{۲}$$

و یا

$$k - \frac{۱}{۲} < \frac{[(n-۳)^۲ + ۱۲n]}{۱۲} = \frac{(n-۳)^۲}{۱۲} + n < k + \frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$(k-n) - \frac{۱}{۲} < \frac{(n-۳)^۲}{۱۲} < (k-n) + \frac{۱}{۲}$$

و

$$G(n-۶) = k - n = G(n) - n$$

مسألهٔ ۴۲۸. (ج. ل. سلفریج) اگر ۱، ۲، $\cdots$ و $\left[\frac{m}{۲}\right]$ از بین ۱، ۲، $\cdots$ و m انتخاب شوند، هیچ‌یک از عددهای باقی‌مانده بر عدد باقی‌ماندهٔ دیگری بخش‌پذیر نیست. درنتیجه $\left[\frac{m}{۲}\right] > n$. اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $\left[\frac{m}{۲}\right] - ۱ \leqslant n$، در میان اعداد انتخاب نشده a و bای وجود دارند که $b = ۲^k a$. فرض کنید چنین a و bای وجود نداشته باشند. دراین‌صورت باید از هر دنباله به‌شکل r، $۲r$، $\cdots$، $۲^s r$ همهٔ عددها غیر از یکی را انتخاب کنیم. اگر r فرد باشد، این دنباله‌ها از هم جدا هستند. به‌این‌ترتیب، با توجه به اینکه انتخاب همهٔ عددهای هر دنباله غیر از بزرگترین عدد آن به‌معنی انتخاب ۱، ۲، $\cdots$ و $\left[\frac{m}{۲}\right]$ است، می‌توانیم تعداد عددهای انتخاب‌شده را بشماریم و به تناقض برسیم.

مسألهٔ ۴۲۹. به شش عدد زیر توجه کنید

$$N_۱ = ۱ - f(۱) - g(۱) - h(۱)$$
$$N_۲ = ۱ - f(۱) - g(۱) - h(۱)$$
$$N_۳ = ۰ + f(۰) + g(۱) + h(۱)$$
$$N_۴ = ۰ + f(۱) + g(۰) + h(۱)$$
$$N_۵ = ۰ + f(۱) + g(۱) + h(۰)$$
$$N_۶ = ۰ - f(۰) - g(۰) - h(۰)$$

چون $\sum N_i = ۲$، یکی از N_iها دست‌کم $\frac{۱}{۳}$ است. بنابراین نابرابری موردنظر به‌ازای دست‌کم یکی از نقطه‌های

$$(x, y, z) = (۱, ۱, ۱), (۰, ۱, ۱), (۱, ۰, ۱), (۱, ۱, ۰), (۰, ۰, ۰)$$

برقرار است. برای اثبات اینکه $\frac{۱}{۳}$ بهترین مقدار ممکن است، سه تابع مانند f، g و h مثال می‌آوریم که به‌ازای آنها دقیقاً $\frac{۱}{۳}$ را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید $f(x) = g(x) = h(x) = \frac{۳x - ۱}{۹}$. در این‌صورت

$$|xyz - f(x) - g(y) - h(z)| = \left|xyz - \frac{x + y + z}{۳} + \frac{۱}{۳}\right|$$

اکنون کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر $۰ \leqslant x, y, z \leqslant ۱$،

$$\frac{۱}{۳} \geqslant xyz - \frac{x + y + z}{۳} + \frac{۱}{۳} \geqslant -\frac{۱}{۳}$$

چون عبارت میانی در این نابرابریها نسبت به هریک از متغیرها خطی است، مقادیر اکسترممش در نقاط انتهایی به‌دست می‌آیند. بقیهٔ کار ساده است.

برای مطالعهٔ تعمیمی از این مسأله نگاه کنید به

Mathematics Magazine, 62 (1989) 198; 63 (1990) 194-197.

شکل ساده‌تری از این مسأله در مسابقهٔ پاتنام سال ۱۹۵۹ داده شده است.

مسألهٔ ۴۳۰. دو حالت حدی هرم مثلثی منتظم حالتهایی هستند که ارتفاع وارد بر قاعده به صفر نزدیک شود یا بی‌کران شود. در حالت اول، زاویه‌های دووجهی ۰، ۰، ۰، π، π و π و در حالت دوم $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۳}$، $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۳}$ هستند.

مسألهٔ ۴۳۱. فرض کنید

$$F(t)=\frac{x_n t^n+x_{n-1}t^{n-1}+\cdots+x_1 t+x_0}{x_{n-1}t^{n-1}+x_{n-2}t^{n-2}+\cdots+x_1+x_0}=1+\frac{x_n}{G}$$

که در آن

$$G=\frac{x_{n-1}}{t}+\frac{x_{n-2}}{t^2}+\cdots+\frac{x_1}{t^{n-1}}+\frac{x_0}{t^n}$$

چون $x_i \geqslant 0$ ($0 \leqslant i \leqslant n$)، G با افزایش t کاهش می‌یابد؛ پس $F(t)$ تابعی صعودی از t است. بنابراین

$$\frac{A}{C}=F(a)>F(b)=\frac{B}{D}$$

اگر و فقط اگر $a>b$.

مسألهٔ ۴۳۲. (د. دانکَن) سه دایرهٔ عظیمه که یکدیگر را در نقاط متمایز قطع می‌کنند، سطح کروی را به ۸ مثلث کروی تقسیم می‌کنند که به‌شکل زوجهایی متقارن در نیمکره‌های روبه‌روی هم واقع‌اند. فرض کنید دو دایرهٔ عظیمه یکدیگر را در O و O' قطع کنند و دایرهٔ عظیمهٔ سومی این دو دایره را به‌ترتیبی در A و A'، و B و B' قطع کند. در نیمکرهٔ محدود به دایرهٔ عظیمه‌ای که از A، B، A' و B' می‌گذرد و شامل نقطهٔ O است، آرایش حاصل از رسم دایرهٔ عظیمهٔ چهارمی را بررسی می‌کنیم. این دایرهٔ عظیمهٔ چهارم، دایرهٔ عظیمهٔ سوم را در نقاط متقاطر C و C'، نیمدایرهٔ AOA' را در P و نیمدایرهٔ BOB' را در Q قطع می‌کند. بنابراین از تقاطع دایره‌ها مثلث OPQ حاصل می‌شود که دورتادور آن این شکلها قرار دارند: مثلث AOB، چهارضلعی $BOPC$، مثلث CPA'، چهارضلعی $A'PQB'$، مثلث $B'QC'$ و چهارضلعی $C'QOA$. بنابراین چهار دایرهٔ عظیمه که نقطه‌های تقاطع آنها متمایزند، همیشه باید ۸ مثلث کروی و ۶ چهارضلعی کروی روی کره ایجاد کنند.

بازهم نیمکرهٔ محدود به دایرهٔ عظیمهٔ سوم را با آرایش پیشگفته درنظر بگیرید. فرض کنید دایرهٔ عظیمهٔ پنجم، دایرهٔ عظیمهٔ سوم را در نقاط D و D' قطع کند که یکی از آنها باید روی یکی از ضلعهای یکی از مثلثها و دیگری روی یکی از ضلعهای یکی از چهارضلعیها باشد. فرض کنید D روی ضلع AB از مثلث AOB و D' روی ضلع $A'B'$ از چهارضلعی $A'PQB'$ باشد. توجه کنید که هر ضلع مثلث OPQ ضلع یکی از چهارضلعیها نیز هست. اکنون DD' یا از درون مثلث OPQ می‌گذرد یا نمی‌گذرد.

اگر DD' از درون مثلث OPQ بگذرد، باید دو ضلع این مثلث را قطع کند، و در نتیجه مثلث OPQ را به یک مثلث و یک چهارضلعی تقسیم می‌کند. نیمدایرهٔ DD' نیز باید AOB را به یک مثلث و یک چهارضلعی، چهارضلعیی که از آن به OPQ وارد می‌شود به یک مثلث و یک پنج‌ضلعی و $A'PQB'$ را به دو چهارضلعی تقسیم کند. بنابراین دایرهٔ پنجم روی نیمکره آرایشی متشکل از ۵ مثلث، ۵ چهارضلعی و یک پنج‌ضلعی ایجاد می‌کند.

اگر DD' به OPQ وارد نشود، باید از چهار چندضلعی متوالی جانبی بگذرد و به این‌ترتیب

AOB را به یک مثلث و یک چهارضلعی، چهارضلعی مجاورش را به دو چهارضلعی، مثلث مجاور بعدی را به یک مثلث و یک چهارضلعی، و $A'PQB'$ را به یک مثلث و یک پنج‌ضلعی تقسیم می‌کند. بازهم ۵ مثلث، ۵ چهارضلعی و یک پنج‌ضلعی به‌دست آورده‌ایم.

بنابراین، آرایش حاصل از ۵ دایرهٔ عظیمه روی کره، که هیچ سه‌تایی از آنها همرس نیستند، دقیقاً از ۱۰ مثلث، ۱۰ چهارضلعی و ۲ پنج‌ضلعی تشکیل می‌شود. گذشته از این، دایرهٔ عظیمهٔ ششمی اگر پنج‌ضلعیی را قطع کند، آن‌را یا به یک پنج‌ضلعی و یک چهارضلعی و یا به یک مثلث و یک شش‌ضلعی تقسیم می‌کند. بنابراین، اگر روی کره n دایرهٔ عظیمه ($n \geqslant ۵$) داشته باشیم که هیچ سه‌تایی از آنها همرس نیستند، همواره دست‌کم یک چندضلعی کروی با ۵ ضلع یا بیشتر از ۵ ضلع داریم.

مسألهٔ ۴۳۳. از جوابهای بدیهی، هر سه‌تایی است که در $x+y=۰$ صدق می‌کند. به‌این‌ترتیب بنابر تقارن و قضیهٔ عاملها

$$(x+y+z)^۳-x^۳-y^۳-z^۳=۳(x+y)(y+z)(z+x)$$

بنابراین، همهٔ جوابها یا از $x+y=۰$ یا از $y+z=۰$ و یا از $z+x=۰$ به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۴۳۴. یا $\sin x+\cos x=۰$، که در این حالت $x=\frac{۳\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}$، و یا می‌توانیم دو طرف را بر عامل $\sin x+\cos x$ تقسیم کنیم و به‌دست آوریم

$$\begin{aligned} ۱۱ &= ۱۶(\sin^۴ x-\sin^۳ x\cos x+\sin^۲ x\cos^۲ x-\sin x\cos^۳ x+\cos^۴ x) \\ &= ۱۶(۱-\sin^۲ x\cos^۲ x-\sin x\cos x) \end{aligned}$$

و یا هم‌ارز با آن

$$(۴\sin x\cos x-۱)(۴\sin x\cos x+۵)=۰$$

تنها جواب غیراضافی این معادله در

$$\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

و یا

$$\sin ۲x=\frac{۱}{۲} \qquad (۰\leqslant x\leqslant ۲\pi)$$

صدق می‌کند. بنابراین همهٔ مقادیر مطلوب x عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$، $\frac{۵\pi}{۱۲}$، $\frac{۹\pi}{۱۲}$، $\frac{۱۳\pi}{۱۲}$، $\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ و $\frac{۲۱\pi}{۱۲}$.

مسألهٔ ۴۳۵. چند جملهٔ اول دنباله عبارت‌اند از

$$۱, ۱, ۱, ۲, ۳, ۷, ۱۱, ۲۶, \cdots$$

با بررسی این چند جمله به حدس زیر می‌رسیم

$$a_{n+۲}=۴a_n-a_{n-۲} \qquad (n=۳, ۴, ۵, \cdots)$$

می‌توان این حدس را به‌استقرا ثابت کرد. اگر درستی حدس را به‌ازای $n+۱$ بپذیریم، به‌دست می‌آوریم

$$a_{n-۱}a_{n+۲} = ۱ + a_{n+۱}a_n = ۱ + (۴a_{n-۱} - a_{n-۲})a_n$$
$$= ۴a_{n-۱}a_n - a_{n-۱}a_{n-۲}$$

که همان نتیجهٔ مطلوب است. از این رابطه معلوم می‌شود که اگر $a_۱$، $a_۲$، $\cdots$ و $a_{n+۱}$ عددهایی صحیح باشند، $a_{n+۲}$ نیز عددی صحیح است.

تبصره. همچنین می‌توان حدس زد که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k،

$$a_{۲k+۱} = ۲a_{۲k} - a_{۲k-۱},\quad a_{۲k+۲} = ۳a_{۲k+۱} - a_{۲k}$$

این حدسها را ثابت کنید و راه‌حل دیگری برای مسأله بیاورید.

مسألهٔ ۴۳۶. فرض کنید m بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و c باشد و $a = mu$ و $c = mv$. در این‌صورت $ub = vd$. چون $(u, v) = ۱$، d باید بر u بخش‌پذیر باشد. اگر $d = nu$، آنگاه $b = nv$ و

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ = (m^۲ + n^۲)(u^۲ + v^۲)$$

تبصره. ثابت کنید

$$a^۲ + b^۲ + c^۲ + d^۲ \not\equiv ۳ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

مسألهٔ ۴۳۷. ابتدا همین مسأله را در مورد ۵ کارت درنظر بگیرید. هر بر زدن با جایگشتی از ۵ کارت هم‌ارز است و می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نمایش داد

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ \end{pmatrix}$$

و معنی آن این است که کارت a_r در جای کارت r قرارگرفته است. مثلاً بر زدنی را در نظر بگیرید که با جایگشت زیر نمایش داده می‌شود

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۵ & ۳ \end{pmatrix}$$

در جدول زیر، سطر ۰ ترتیب اولیهٔ کارتها و سطر i، $۱ \leqslant i \leqslant ۶$، نتیجهٔ iاُمین برزدن را نشان می‌دهد.

۰	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲	۱	۴	۵	۳
۲	۱	۲	۵	۳	۴
۳	۲	۱	۳	۴	۵
۴	۱	۲	۴	۵	۳
۵	۲	۱	۵	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۵

در این حالت باید شش بار کارتها را بر زد تا به مواضع اولیه‌شان برگردند. هر جایگشت را می‌توان به حاصل‌ضربی از دورها «تجزیه» کرد. در اینجا

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۵ & ۳ \end{pmatrix} = (۱,۲)(۳,۴,۵)$$

که در آن، مثلاً دور $(۳,۴,۵)$ به‌معنی ۴ → ۳، ۵ → ۴ و ۳ → ۵ است. چون طول دورها به‌ترتیب ۲ و ۳ است، دورهٔ جایگشت ۳ × ۲ است که همان کوچکترین مضرب مشترک ۲ و ۳ است.

در مورد مسألهٔ اصلی باید ۱۳ را به تعدادی عدد طبیعی که کوچکترین مضرب مشترکشان ماکسیمم باشد افراز کنیم. با امتحان کردن معلوم می‌شود

$$۱۳ = ۵ + ۴ + ۳ + ۱$$

دورهٔ ماکسیمم را که ۶۰ = ۳ × ۴ × ۵ است به‌دست می‌دهد.

در مورد ۵۲ کارت، دورهٔ ماکسیمم را که ۱۸۰۱۸۰ است می‌توان از

$$۵۲ = ۱۳ + ۱۱ + ۹ + ۷ + ۵ + ۴ + ۲ + ۱$$

به‌دست آورد.

از خواننده می‌خواهیم، به‌عنوان مسأله‌ای پژوهشی، الگوریتمی برای تعیین دورهٔ چرخه در مورد n کارت پیدا کند.

مسألهٔ ۴۳۸. باید ثابت کنیم

$$P_۱ = ۰ \Rightarrow P_۲ = ۰ \qquad (۱)$$

که در آنها

$$P_n \equiv \frac{a}{(bc-a^۲)^n} + \frac{b}{(ca-b^۲)^n} + \frac{c}{(ab-c^۲)^n}, \qquad n = ۱,۲$$

اگر فرض کنیم

$$P_۰ \equiv \frac{۱}{bc-a^۲} + \frac{۱}{ca-b^۲} + \frac{۱}{ab-c^۲}$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که $P_۰ \cdot P_۱ = P_۲$، و درنتیجه (۱) بی‌درنگ نتیجه می‌شود؛ همچنین نتیجه می‌شود

$$P_۰ = ۰ \Rightarrow P_۲ = ۰ \qquad (۲)$$

اکنون ملاحظه کنید که عکس هیچ‌کدام از (۱) و (۲) درست نیست، چون

$$P_۲ = ۰ \Rightarrow P_۰ = ۰ \text{ یا } P_۱ = ۰ \qquad (۳)$$

گذشته از این، ترکیب فصلی در (۳) غیرقابل اجتناب است، چون هیچ‌یک از معادله‌های طرف راست رابطهٔ (۳) دیگری را نتیجه نمی‌دهد. مثلاً اگر w ریشهٔ سوم موهومی واحد باشد

$$(a,b,c) = (۰, w, -۱)$$

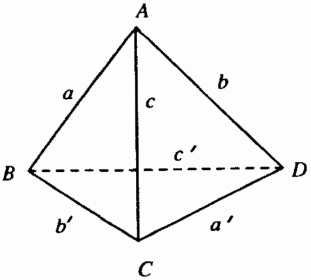
جوابی از $P_{\circ} = \circ$ است ولی جواب $P_{۱} = \circ$ نیست. همچنین

$$(a, b, c) = (\circ, ۱, -۱)$$

جوابی از $P_{۱} = \circ$ است ولی جواب $P_{\circ} = \circ$ نیست.

مسألهٔ ۴۳۹. توجه‌کنید که از برهان قسمت (ب) قسمت (الف) نیز نتیجه می‌شود؛ به هرحال، در اینجا برهان مستقیمی برای (الف) می‌آوریم.

الف) فرض‌کنید $p = a+a'$، $q = b+b'$ و $r = c+c'$. فرض می‌کنیم یالهای چهاروجهی طوری نامگذاری شده باشند که $p \geqslant q \geqslant r$. در این‌صورت (شکل ۲۲۸ را ببینید)



شکل ۲۲۸

$$b + c > a', \quad b' + c' > a'$$

$$b + c' > a, \quad b' + c > a$$

با جمع‌کردن این نابرابریها باهم به‌دست می‌آوریم $q + r > p$. بنابراین مثلثی مانند PQR با طول ضلعهای p، q و r وجود دارد.

ب) چون P بزرگترین زاویهٔ مثلث PQR است، این مثلث وقتی و فقط وقتی حاده است که $\cos P > \circ$. بنابراین قانون کسینوسها، یعنی

$$p^{۲} = q^{۲} + r^{۲} - ۲qr\cos P$$

معلوم می‌شود که مثلث PQR حاده است اگر و فقط اگر

$$q^{۲} + r^{۲} - p^{۲} > \circ \qquad (۱)$$

نابرابریهای

$$b^{۲} + b'^{۲} + c^{۲} + c'^{۲} - a^{۲} - a'^{۲} \geqslant \circ \qquad (۲)$$

$$۲bb' + ۲cc' - ۲aa' > \circ \qquad (۳)$$

را که از جمع‌کردن آنها باهم (۱) نتیجه می‌شود ثابت می‌کنیم.

برای اثبات (۲) فرض‌کنید $\overrightarrow{A}$، $\overrightarrow{B}$، $\overrightarrow{C}$ و $\overrightarrow{D}$ بردارهایی از مبدأیی دلخواه به رأسهای A، B، C و D از چهاروجهی باشند (شکل ۲۲۸ را ببینید). با نمادگذاری معمول، چون

$$\overrightarrow{v}^{۲} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^{۲} \geqslant \circ$$

با استفاده از ویژگیهای دیگر ضرب نقطه‌ای دو بردار، سمت چپ (۲) تبدیل می‌شود به

$$(\overrightarrow{A} - \overrightarrow{D})^{۲} + (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C})^{۲} + (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{C})^{۲} + (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{D})^{۲}$$
$$- (\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B})^{۲} - (\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D})^{۲} = (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D})^{۲} \geqslant \circ$$

برای اثبات (۳)، فرض کنید در بدنهٔ چهاروجهی در راستای CD لولا قرار دارد و می‌توان چهاروجهی را به چهارضلعی محدب $ADBC$ تبدیل کرد. در این‌صورت طول هیچ‌یک از یالها غیر از AB تغییر نمی‌کند؛ طول AB افزایش می‌یابد. بنابر نابرابری بطلمیوسی در چهارضلعی،

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AC}\cdot\overline{BD}\geqslant\overline{AB}\cdot\overline{CD} \qquad (۴)$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر چهارضلعی $ADBC$ محاطی باشد (قضیهٔ بطلمیوس). بنابراین نابرابری (۴) در مورد چهاروجهی اصلی، که در آن AB کوتاهتر است، به‌طور اکید برقرار است. درنتیجه (۳) هم درست است.

مسألهٔ ۴۴۰. توجه کنید که اگر $x<۱$،

$$۱۶-۲۴x+۹x^۲=(۴-۳x)^۲>x^۳$$

(نمودار رسم کنید!) و درنتیجه عبارت موردنظر معنی‌دار است. فرض کنید رادیکال اول را با m، رادیکال دوم را با n و مجموع را با s نشان دهیم. در این‌صورت

$$s^۳=(m+n)^۳=m^۳+n^۳+۳mns$$

و

$$s^۳=۸-۶x+۳sx$$

و یا

$$(s-۲)(s^۲+۲s+۴-۳x)=۰$$

وقتی $x<۱$، ریشه‌های عامل دوم مختلط‌اند؛ پس s باید ثابت و برابر با ۲ باشد. این نتیجه در حالتی‌که $x=۱$ نیز درست است.

مسألهٔ ۴۴۱. اگر فرض کنیم $u_n=۲n-t_n$، معلوم می‌شود که $\{t_n\}$ دنبالهٔ زیر است

$$۱;۲,۲;۳,۳,۳;۴,۴,۴,۴;۵,۵,\cdots$$

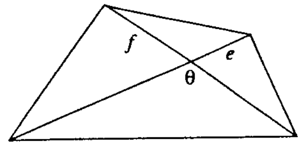
به‌ازای هر t_n،

$$۱+۲+۳+\cdots+(t_n-۱)\leqslant n-۱<۱+۲+۳+\cdots+t_n$$

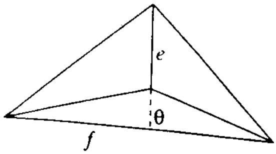
و در نابرابری سمت چپ دقیقاً وقتی برابری برقرار است که n اولین زیروندی باشد که به‌ازای آن t_n مقداری بجز مقدارهای قبلی دنباله است. از نابرابری سمت چپ نتیجه می‌شود

$$t_n^۲-t_n-۲(n-۱)\leqslant ۰$$

که درنتیجه $t_n\leqslant\frac{۱}{۲}(۱+\sqrt{۸n-۷})$. چون t_n بزرگترین عدد صحیحی است که در این نابرابری صدق می‌کند نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.



شکل ۲۲۹



شکل ۲۳۰

مسألهٔ ۴۴۲. به‌آسانی نتیجه می‌شود که $F = \frac{۱}{۲}ef\sin\theta$ (شکل ۲۲۹ را ببینید). در این‌صورت،

$$e^{۲} + f^{۲} \geqslant ۲ef \geqslant ۲ef\sin\theta$$

در نابرابری موردنظر برابری برقرار است اگر و فقط اگر $e = f$ و $\theta = ۹۰^{\circ}$. نتیجهٔ این مسأله در مورد چهارضلعیهای غیرمحدب نیز برقرار است (شکل ۲۳۰ را ببینید)، چون بازهم $F = \frac{۱}{۲}ef\sin\theta$.

مسألهٔ ۴۴۳. مکعب را به $۲۱۹۷ = ۱۳^{۳}$ مکعب کوچک به ضلع $\frac{۱۵}{۱۳}$ واحد تقسیم کنید. طول قطر هر مکعب کوچک $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۱۳}$ واحد است. اکنون توجه کنید که $۴ > \frac{۶۷۵}{۱۶۹} = \left(\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۱۳}\right)^{۲}$، و یا $۲ > \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۱۳}$.

بنابراین هر مکعب کوچک را می‌توان در کره‌ای به شعاع واحد گنجاند. چون ۱۱۰۰۰ نقطه و ۲۱۹۷ مکعب کوچک داریم و

$$۵ \times ۲۱۹۷ = ۱۰۹۸۵ < ۱۱۰۰۰$$

دست‌کم یکی از مکعبهای کوچک حاوی دست‌کم ۶ نقطه است (بنابر اصل لانه کبوتری). پس کرهٔ واحدی وجود دارد که حاوی دست‌کم ۶ نقطه است.

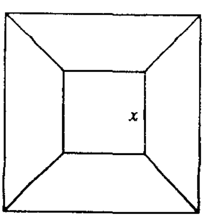
مسألهٔ ۴۴۴. مکعبی به ابعاد $۶ \times ۶ \times ۶$ درنظر بگیرید. هر خط برنده در مکعب $۴ \times ۴ \times ۴$ مرکزی، ۲ مکعب $۱ \times ۱ \times ۱$ را در لایهٔ بیرونی قطع می‌کند و هر مکعب $۱ \times ۱ \times ۱$ در راستای دقیقاً یک خط برنده قرار دارد. بنابراین، تعداد راههای برنده‌شدن برابر است با نصف تعداد مکعبهای $۱ \times ۱ \times ۱$ بیرونی، یا $\frac{۱}{۲}(۶^{۳} - ۴^{۳}) = ۷۶$.

اگر بازی در مکعبی nبعدی، به‌طول ضلع k، انجام شود، عدد موردنظر عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}\{(k+۲)^{n} - k^{n}\}$$

مسألهٔ ۴۴۵. این مسأله کمی «فریب‌دهنده» است. باکمی تفکر یا محاسبه معلوم می‌شود که تعداد کارتهای قرمز در ۲۶ کارت بالایی همیشه باید با تعداد کارتهای سیاه در ۲۶ کارت پایینی برابر باشد. پس بنابر قواعد منطق، حکم مسأله هرچه باشد درست است (به انتفای مقدم).

مسألهٔ ۴۴۶. اگرچه می‌توانیم A، مساحت شکل ۵۵، را برحسب x و y مستقیماً از نمودار شکل موردبحث حساب کنیم، آسانترین راه برای محاسبهٔ A توجه به‌این نکته است که می‌توانیم چهار قطعهٔ یکسان به‌این شکل را طوری قرار دهیم که مانند شکل ۲۳۱ مربعی توخالی یا قابی مربعی به‌دست آید. (درواقع نجار این قطعه‌ها را برای چنین کاری درنظر گرفته است). پس



شکل ۲۳۱

$$A = \frac{y^{۲} - x^{۲}}{۴} = \left(\frac{y+x}{۲}\right)\left(\frac{y-x}{۲}\right)$$

اگر فرض کنیم $m = \frac{y+x}{۲}$ و $n = \frac{y-x}{۲}$، آنگاه $m + n = y$ و $m - n = x$، و همچنین $A = mn$. از این برابری و شرایط بیان‌شده در مسأله روشن است که A باید عددی باشد که دست‌کم به چهار روش قابل تجزیه به دو عامل است. به‌آسانی معلوم می‌شود ۳۰ تنها عدد کوچکتر از ۴۰ است که این ویژگی را دارد. درواقع

$$۳۰ = ۱ \times ۳۰ = ۲ \times ۱۵ = ۳ \times ۱۰ = ۵ \times ۶$$

به‌این ترتیب مقادیر متناظر x و y عبارت‌اند از

$$(۳۱, ۲۹),\ (۱۷, ۱۳),\ (۱۳, ۷),\ (۱۱, ۱)$$

مسألهٔ ۴۴۷. درستی حکم در حالتهایی که $m = ۱$ یا $n = ۱$ معلوم است. فرض کنید $\sqrt[n]{m} = ۱ + u$ و $\sqrt[m]{n} = ۱ + v$، که در آنها $u, v > ۰$. در این‌صورت از بسط دوجمله‌ای نتیجه می‌شود

$$m = (۱ + u)^n > ۱ + nu\ ,\quad n = (۱ + v)^m > ۱ + mv$$

و درنتیجه

$$u < \frac{m - ۱}{n},\ \ v = \frac{n - ۱}{m}$$

به‌این‌ترتیب

$$\frac{۱}{\sqrt[n]{m}} + \frac{۱}{\sqrt[m]{n}} = \frac{۱}{۱ + u} + \frac{۱}{۱ + v} > \frac{n}{n + m - ۱} + \frac{m}{n + m - ۱} = \frac{n + m}{n + m - ۱} > ۱$$

ملاحظه. به‌طورکلیتر، اگر $x, y > ۰$، $x^y + y^x > ۱$. برهانی که در آن کمی از حسابان استفاده شده است در مجلهٔ زیر آمده است

Mathematics Magazine 52 (1979) 118.

آیا می‌توانید برهانی بدون استفاده از حسابان بیاورید؟

مسألهٔ ۴۴۸. الف) ادعا نادرست است. توجه کنید که

$$۲N = ۱۰۵۲۶۳۱۵۷۸۹۴۷۳۶۸۴۲۰$$

و بنابراین

$$۱۹N = ۲۰N - N = ۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۹۰$$

و $۱۹N$ شامل هر ده رقم نیست.

ب) هیچ عدد دیرپایی وجود ندارد! روش اثباتمان برهان خلف است. فرض کنید N دیرپا باشد. N را می‌توانیم به‌شکل $۲^a۵^bM$ بنویسیم که در آن M هم نسبت به ۲ اول است هم نسبت به ۵. چون

$$۲^b۵^aN = ۱۰^{a+b}M$$

$۱۰^{a+b}M$ نیز باید دیرپا باشد، و درنتیجه همهٔ مضربهای M باید شامل نُه رقم ناصفر باشند. اکنون از تعمیم

اویلر از قضیهٔ فرما استفاده می‌کنیم: اگر a نسبت به n اول باشد، آنگاه

$$a^{\varphi(n)} - ۱ = kn$$

که در آن $\varphi(n)$ (تابع φی اویلر) تعداد عددهای طبیعی کوچکتر از n است که نسبت به‌آن اول‌اند. اکنون

$$۱۰^{\varphi(M)} - ۱ = kM \qquad (۱)$$

و این تناقض است، چون kM باید شامل هر نُه رقم ناصفر باشد، اما رقمهای عدد سمت چپ (۱) همه ۹اند.

راه‌حلی مقدماتی‌تر نیز می‌آوریم. بازهم فرض کنید N عددی دیرپا باشد و باقیمانده‌های حاصل از تقسیم N عدد زیر را بر N درنظر بگیرید:

$$۱, ۱۱, ۱۱۱, \cdots, ۱۱۱\cdots۱$$

که در آنها آخرین عدد N رقم دارد. چون حداکثر $N - ۱$ باقیماندهٔ ناصفر متمایز حاصل می‌شود، یا یکی از عددهای بالا بر N بخش‌پذیر است، که در این حالت N دیرپا نیست، یا دو تا از آنها، مثلاً

$$R = \underbrace{۱۱۱\cdots۱}_{r}, \quad S = \underbrace{۱۱۱\cdots۱}_{s}, \quad s > r$$

باقیماندهٔ یکسان به‌دست می‌دهند، که در این حالت، تفاضل آنها، یعنی

$$S - R = \underbrace{۱۱\cdots۱}_{s-r}\ \underbrace{۰۰\cdots۰}_{r}$$

بر N بخش‌پذیر است، و N دیرپا نیست.

مسألهٔ ۴۴۹. نتیجه بی‌درنگ از اتحاد زیر حاصل می‌شود

$$(a^۲ + b^۲ - ۲)^۲ + (c^۲ + d^۲ - ۲)^۲ + ۲(ac - bd)^۲$$
$$= (a^۲ + c^۲ - ۲)^۲ + (b^۲ + d^۲ - ۲)^۲ + ۲(ab - cd)^۲$$

نتیجه را می‌توان تعمیم داد. نتیجهٔ تعمیم‌یافته هم‌ارز با این است که بگوییم اگر بردارهای سطری ماتریسی $n \times n$ یکا متعامد باشند، بردارهای ستونی این ماتریس نیز یکا متعامدند.

مسألهٔ ۴۵۰. فرض کنید S مجموعهٔ جایگشتهای ۱، ۲، $\cdots$ و n بدون هیچ قیدی، $S_۱$ مجموعهٔ همین جایگشتها با شرط $a_۱ = ۱$ و $S_۲$ مجموعهٔ جایگشتها با شرط $a_۲ = ۲$ باشد. در این‌صورت (اگر نماد $|X|$ تعداد عناصر مجموعهٔ X را نشان دهد)،

$$|S| = n!$$
$$|S_۱| = |S_۲| = (n - ۱)!$$
$$|S_۱ \cap S_۲| = (n - ۲)!$$

بنابراین

$$|S_۱ \cup S_۲| = |S_۱| + |S_۲| - |S_۱ \cap S_۲| = ۲(n - ۱)! - (n - ۲)!$$

و تعداد جایگشتها با شرط $a_۱ \neq ۱$ و/یا شرط $a_۲ \neq ۲$ برابر است با

$$n! - ۲(n-۱)! + (n-۲)! = (n-۲)!(n^۲ - ۳n + ۳)$$

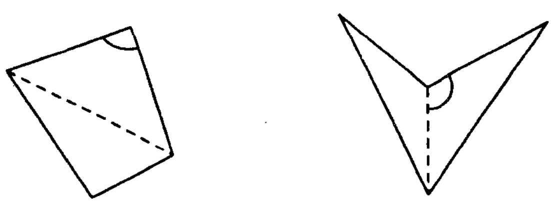
مسألهٔ ۴۵۱. فرض کنید در این زمان سن مرد n و سن نوه‌اش k بوده است. در این‌صورت $n + i$ باید بر $k + i$ بخش‌پذیر باشد ($۰ \leqslant i \leqslant ۵$). بنابراین $n - k$ بر $k + i$ بخش‌پذیر است و درنتیجه $n - k$ مضربی ازکوچکترین مضرب مشترک k، $k+۱$، ... و $k+۵$ است. اگر $k = ۱$، آنگاه $n - ۱$ مضربی از $۶۰ = (۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶)$ ک.م.م. است. پس سن مرد ۶۱ و سن نوه‌اش ۱ است. هر مقدار دیگر k به جوابی دور از واقع منجر می‌شود. مثلاً اگر $k = ۲$، آنگاه $n - ۲$ مضربی از

$$۴۲۰ = (۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷)\ \text{ک.م.م}$$

است.

مسألهٔ ۴۵۲. فرض کنید $\log_{۱۰} ۲ = \frac{a}{b}$، که در آن a و b عددهایی طبیعی‌اند. در این‌صورت $۱۰^{\frac{a}{b}} = ۲$، و درنتیجه $۱۰^a = ۲^b$. به تناقض رسیده‌ایم، چون طرف چپ بر ۵ بخش‌پذیر است، در حالی‌که طرف راست نیست. به‌همین ترتیب، اگر m عددی طبیعی باشد $\log_{۱۰} m$ عددی گنگ است، مگر اینکه m توانی از ۱۰ باشد.

مسألهٔ ۴۵۳. هر چهار نقطه رأسهای یک چهارضلعی‌اند که دست‌کم یک زاویهٔ آن از ۹۰° کوچکتر نیست. پس دست‌کم یکی از چهار مثلثی که از چهار نقطه به‌دست می‌آیند یا منفرجه است یا قائم‌الزاویه. (شکل ۲۳۲ را ببینید.)



شکل ۲۳۲

پنج نقطه درنظر بگیرید. هر چهار تای آنها دست‌کم یا یک مثلث منفرجه به‌دست می‌دهند یا یک مثلث قائم‌الزاویه. پنج راه برای انتخاب چهار نقطه وجود دارد. پس دست‌کم پنج مثلث داریم که یا منفرجه‌اند یا قائم‌الزاویه. اما هر مثلث دوبار شمرده شده است، پس فقط مطمئنیم که سه تا از این مثلثها متمایزند. پس از $۱۰ = \binom{۵}{۳}$ مثلث ممکن که از ۵ نقطه به‌دست می‌آیند، دست‌کم سه مثلث یا منفرجه‌اند یا قائم‌الزاویه. اکنون به همهٔ $\binom{۷۵}{۵}$ حالت برای انتخاب ۵ نقطه از ۷۵ نقطه توجه کنید. در مورد هر انتخاب، همهٔ مثلثهای قابل حصول را فهرست کنید؛ دست‌کم ۳۰٪ از این مثلثها یا منفرجه‌اند یا قائم‌الزاویه. در فهرست همهٔ مثلثهای موردقبول، هر مثلث دقیقاً $\binom{۷۲}{۲}$ بار دیده می‌شود، و دست‌کم ۳۰٪ از این مثلثها یا منفرجه‌اند یا قائم‌الزاویه.

بنابراین اگر فهرست مثلثها را بدون تکرار تنظیم کنیم، دست‌کم ۳۰٪ از این مثلثها یا منفرجه‌اند یا قائم‌الزاویه.

(این مسأله در مورد ۱۰۰ نقطه در دوازدهمین المپیاد ریاضی بین‌المللی مطرح شده است.)

مسألهٔ ۴۵۴. فرض کنید اندازهٔ زاویه‌های $T_۱$ و $T_۲$ به‌ترتیب $A_۱$، $B_۱$ و $C_۱$، و $A_۲$، $B_۲$ و $C_۲$ باشد. چون

$$A_۱ + B_۱ + C_۱ = ۱۸۰^\circ = A_۲ + B_۲ + C_۲$$

امکان ندارد که هریک از زاویه‌های یکی از مثلثها از زاویهٔ متناظرش در مثلث دیگر بزرگتر باشد. درنتیجه، در صورت لزوم، با نامگذاری مجدد می‌توانیم فرض کنیم

$$A_۱ \geqslant A_۲, \quad B_۱ \leqslant B_۲$$

در این صورت

$$\Delta_۱ = \frac{۱}{۲} b_۱ c_۱ \sin A_۱ \geqslant \frac{۱}{۲} b_۲ c_۲ \sin A_۲ = \Delta_۲$$

(زیرا $A_۱$ و $A_۲$ حاده‌اند.) همچنین (پیوست، ه۴۵ را ببینید)

$$R_۱ = \frac{b_۱}{۲ \sin B_۱} \geqslant \frac{b_۲}{۲ \sin B_۲} = R_۲$$

شعاع دایرهٔ محاطی مثلث از دستور $r = \frac{\Delta}{s}$ به‌دست می‌آید که در آن s نصف محیط مثلث است (پیوست، ه۴۵ را ببینید). ساده‌ترین حالتهای محاسبهٔ مساحت مثلث در مورد مثلثهای قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. پس فرض کنید $T_۱$ مثلثی قائم‌الزاویه و $T_۲$ مثلثی متساوی‌الساقین است که یک ضلعش از ضلعی از $T_۱$ کوتاهتر است. می‌کوشیم $T_۱$ و $T_۲$ را طوری انتخاب کنیم که $r_۱ < r_۲$. اگر $(a_۱, b_۱, c_۱) = (۳, ۴, ۵)$ و $(a_۲, b_۲, c_۲) = (۳, ۴, ۴)$، آنگاه $\Delta_۱ = ۶$، $s_۱ = ۶$ و $r_۱ = ۱$، اما

$$\Delta_۲ = \frac{۳\sqrt{۵۵}}{۴}, \qquad s_۲ = \frac{۱۱}{۲}, \qquad r_۲ = \sqrt{\frac{۴۵}{۴۴}} > ۱$$

یادداشت. اگر فقط $T_۱$ حاده باشد، باز هم نتیجه می‌شود که $\Delta_۱ \geqslant \Delta_۲$.

مسألهٔ ۴۵۵. فرض کنید دو خط متنافر مفروض a و b باشند، و A روی a و B روی b باشد. اگر C مرکز کرهٔ مورد نظر باشد، آنگاه $a \perp AC$ و $b \perp BC$. همچنین C از A و B به یک فاصله است. بنابراین، C روی سه صفحه واقع است:

σ: که از A می‌گذرد و بر a عمود است؛

μ: که از B می‌گذرد و بر b عمود است؛

τ: که عمودمنصف s، یعنی پاره‌خط AB، است.

چون a و b متنافرند، σ و μ نه موازی‌اند نه منطبق بر هم، و بنابراین یکدیگر را در راستای خطی مانند m قطع می‌کنند. فرض کنید در صورت امکان τ موازی با m یا شامل m باشد. در این صورت m بر خطهای a، b و s عمود است. پس m بر صفحهٔ شامل a و s (که از A می‌گذرد) و همچنین بر صفحهٔ شامل b و s (که از B می‌گذرد) عمود است. چون هر دو صفحه شامل s هستند، باید برهم منطبق باشند و a و b باید در یک

صفحه باشند که با فرض ما تناقض دارد. پس τ خط m را دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کند. و فقط این نقطه ممکن است مرکز کرهٔ مطلوب باشد (و هست).

مسألهٔ ۴۵۶. هر عدد اول غیر از ۲ و ۳ به‌شکل $۶u+۱$ یا $۶u-۱$ است. اگر عدد اولی مانند $p=۶u+۱$ در زنجیری از نوع مورد نظر باشد، چون $۲p+۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است، عدد اول بعدی در این زنجیر، در صورت وجود، باید

$$۲p-۱=۱۲u+۱=۲(۶u)+۱$$

باشد. پس عناصر متوالی زنجیر (تا جایی که عددها اول باشند) عبارت‌اند از

$$\{۶u+۱, ۲(۶u)+۱, ۲^۲(۶u)+۱, \cdots, ۲^i(۶u)+۱, \cdots\}$$

اما تعداد عددهای اول در این دنباله نامتناهی نیست. چون (پیوست، ب ۸ را ببینید) عددی مانند k وجود دارد به‌طوری که

$$۲^k \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۶u+۱)$$

به‌ازای این مقدار از k

$$۲^k(۶u)+۱ \equiv ۶u+۱ \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۶u+۱)$$

و درنتیجه $۲^k(۶u)+۱$ باید مرکب باشد.

در مورد عددهای اول به‌شکل $۶u-۱$ در زنجیر نیز می‌توان استدلال مشابهی عرضه کرد.

تبصره. آیا طول ماکسیممی برای چنین زنجیرهایی از عددهای اول وجود دارد؟

مسألهٔ ۴۵۷. در مثلث ABC، با شعاع دایرهٔ محیطی R،

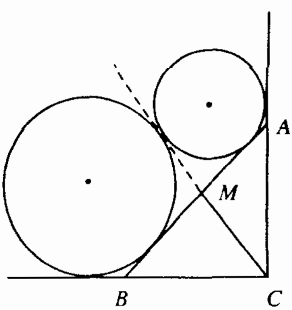
$$r=۴R\sin\frac{\angle A}{۲}\sin\frac{\angle B}{۲}\sin\frac{\angle C}{۲}$$
$$t=۴R\cos\frac{\angle A}{۲}\cos\frac{\angle B}{۲}\sin\frac{\angle C}{۲}$$

و بنابراین

$$\frac{r}{t}=\tan\frac{\angle A}{۲}\tan\frac{\angle B}{۲}$$

به‌همین ترتیب (شکل ۲۳۳ را ببینید)

$$r_۱=۴R_۱\sin\frac{\angle A}{۲}\sin\frac{\angle AMC}{۲}\sin\frac{\angle ACM}{۲}$$
$$t_۱=۴R_۱\cos\frac{\angle A}{۲}\cos\frac{\angle AMC}{۲}\sin\frac{\angle ACM}{۲}$$
$$r_۲=۴R_۲\sin\frac{\angle B}{۲}\sin\frac{\angle BMC}{۲}\sin\frac{\angle BCM}{۲}$$
$$t_۲=۴R_۲\cos\frac{\angle B}{۲}\cos\frac{\angle BMC}{۲}\sin\frac{\angle BCM}{۲}$$



شکل ۲۳۳

چون

$$\sin\frac{\angle AMC}{۲}=\cos\frac{\angle BMC}{۲}$$

و

$$\cos\frac{\angle AMC}{۲}=\sin\frac{\angle BMC}{۲}$$

$\left(\frac{\angle AMC}{۲}+\frac{\angle BMC}{۲}=۹۰^\circ\right)$، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

مسألهٔ ۴۵۸. چون بزرگترین (کوچکترین) عدد در هر حلقه از بزرگترین (کوچکترین) عدد در حلقهٔ قبل از آن بزرگتر (کوچکتر) نیست، با تکرار عمل مذکور باید قدرمطلق تفاضل بزرگترین وکوچکترین عدد حلقه‌ها کاهش یابد (یا تغییر نکند). سرانجام، هر چنین دنباله‌ای از عددهای صحیح نامنفی باید دو تا از درایه‌های مجاورش برابر باشند. بدون کاستن ازکلیت استدلال می‌توانیم فرض کنیم که کوچکترین عنصر حلقه در این مرحله ۰ است. اگر a بزرگترین عنصر باشد، سه امکان برای این حلقه وجود دارد:

الف) $\begin{pmatrix} a & ۰ \\ a & b \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} a & ۰ \\ b & ۰ \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} a & ۰ \\ b & b \end{pmatrix}$

اگر عمل مذکور را در هر یک از این حالتها تکرار کنیم به‌دست می‌آوریم

الف)

$$\begin{pmatrix} a & ۰ \\ a & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a-b \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} a-b & |a-۲b| \\ a & a-b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} c & c \\ b & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} ۰ & |c-b| \\ |c-b| & ۰ \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} |c-b| & |c-b| \\ |c-b| & |c-b| \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

که در آن $c=|a-b-|a-۲b||$.

ب)

$$\begin{pmatrix} a & ۰ \\ b & ۰ \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & ۰ \\ a-b & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a & b \\ b & |a-۲b| \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a-b & c \\ a-b & c \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} d & ۰ \\ ۰ & d \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} d & d \\ d & d \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$$

که در آن $c=|b-|a-۲b||$ و $d=|a-b-c|$.

ج)

$$\begin{pmatrix} a & \circ \\ b & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & b \\ a-b & \circ \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a-b & b \\ b & a-b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} |a-۲b| & |a-۲b| \\ |a-۲b| & |a-۲b| \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$$

می‌توان ثابت کرد که اگر عمل مشابهی را با n عدد ($n \geqslant ۳$) به‌جای چهار عدد شروع کنیم، در صورتی که $n = ۲^m$، سرانجام همهٔ اعداد صفر می‌شوند (مسألهٔ ۱-۶۹ را در

SIAM Review 12(1970)297-300.

ببینید). همچنین لوتان (در *American Math. Monthly* 56(1949) 335 - 541) ثابت کرده است که اگر کار را با چهار عدد حقیقی شروع کنیم و اولین مجموعهٔ تفاضل به‌شکل ۱، q، $q^۲$، $q^۳$، که در اینجا q جواب مثبت $q^۳ = q^۲ + q + ۱$ است، نباشد، غیر از تبدیلهای بدیهی، همواره به مجموعهٔ تمام صفر می‌رسیم.

مسألهٔ ۴۵۹. تنها بیضی قابل محاط شدن در پنج‌ضلعی منتظم دایرهٔ محاطی پنج‌ضلعی است. اگر بیضی محاطی دیگری وجود داشته باشد، این بیضی باید دایرهٔ محاطی را دست‌کم در پنج نقطه قطع کند. اما این ناممکن است، چون بیشترین تعداد نقاط تقاطع دو بیضی متمایز چهار است. برای اثبات این موضوع می‌توانیم $y^۲$ را بین معادله‌های درجهٔ دوم بیضیها حذف و معادلهٔ حاصل را نسبت به y حل کنیم. در این صورت با جایگذاری مجدد به یک معادلهٔ چندجمله‌ای درجهٔ چهارم برحسب x می‌رسیم.

به‌طور کلیتر در فضای اقلیدسی nبعدی، اگر p تا رویهٔ جبری از درجه‌های $d_۱$، $d_۲$، $\cdots$ و d_p داشته باشیم که تعدادی متناهی نقطهٔ مشترک داشته باشند، عدد مورد نظر حداکثر $d_۱ d_۲ d_۳ \cdots d_{p-۱} d_p$ است. این نتیجه همان قضیهٔ بزو است.

مسألهٔ ۴۶۰. اگر $x, y, z \geqslant \circ$، نابرابری مورد نظر درست است. پس بدون کاستن از کلیت استدلال فرض می‌کنیم $z < \circ$. با در نظر گرفتن مثلثهای تباهیده با طول ضلعهای (۱, ۰, ۱) و (۱, ۱, ۰) معلوم می‌شود که باید $x > \circ$ و $y > \circ$. فرض کنید $x = -u$، $y = -v$ و $z = w$، که در آنها u، v و w مثبت‌اند. در این صورت شرط مورد نظر را می‌توان چنین نوشت: به‌ازای هر مثلث با طول ضلعهای (a, b, c)،

$$wc^۲ \leqslant ua^۲ + vb^۲ \qquad (۱)$$

فرض کنید (۱) برقرار باشد. در این صورت (۱) باید در حالت تباهیده‌ای که $c = a + b$ نیز برقرار باشد، و درنتیجه

$$(u-w)a^۲ - ۲wab + (v-w)b^۲ \geqslant \circ \qquad (۲)$$

به‌ازای هر نسبت مثبتی مانند $\frac{a}{b}$ این نابرابری درست است. پس $u \geqslant w$ و $v \geqslant w$. چون $w > \circ$، معلوم می‌شود که (۲) به‌ازای هر نسبت نامثبتی مانند $\frac{a}{b}$ نیز برقرار است؛ پس (۲) باید به‌ازای هر جفتی مانند (a, b)

برقرار باشد. بنابراین مبیّن طرف چپ (۲) منفی است، یعنی $w \leqslant (u-w)(v-w)$، و یا

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\leqslant\frac{1}{w} \qquad (3)$$

از طرف دیگر، فرض کنید (۳) برقرار باشد. در این صورت، $u \geqslant w$، $v \geqslant w$ و مبیّن طرف چپ (۲) منفی است. اگر (a,b,c) طول ضلعهای مثلثی دلخواه باشد،

$$\begin{aligned} ua^2+vb^2-wc^2 &\geqslant ua^2+vb^2-w(a+b)^2 \\ &= (u-w)a^2-2wab+(v-w)b^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

جواب مسأله مجموعهٔ همهٔ سه‌تاییهایی مانند (x,y,z) است که در مورد آنها یکی از چهار دسته شرط زیر برقرار باشد:

۱) $x\leqslant 0$، $y\leqslant 0$، $z\leqslant 0$.

۲) $x<0$، $y<0$، $z>0$، $-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{z}$.

۳) $x<0$، $y>0$، $z<0$، $-\frac{1}{x}-\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{y}$.

۴) $x>0$، $y<0$، $z<0$، $-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\leqslant\frac{1}{x}$.

مسألهٔ ۴۶۱. فرض می‌کنیم $\frac{v}{u}=\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}}$، که در آن $u+v=1$. دراین‌صورت $\overrightarrow{A'}=u\overrightarrow{B}+v\overrightarrow{C}$ و مربع طول خط سِوایی c_a این‌طور حساب می‌شود

$$\begin{aligned} c_a^2 &= (\overrightarrow{A'}-\overrightarrow{A})\bullet(\overrightarrow{A'}-\overrightarrow{A}) \\ &= \{u(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A})+v(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A}\}^2 \\ &= u^2(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A})^2+v^2(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A})^2 \\ &\quad +uv\left[2(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A})\bullet(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A})\right] \\ &= u^2c^2+v^2b^2+uv(b^2+c^2-a^2) \end{aligned} \qquad (1)$$

(این نتیجه همان قضیهٔ استوارت است.) با تبدیل دوری a، b و c در مورد دو خط سوایی دیگر نیز به‌دست می‌آوریم

$$c_b^2=u^2a^2+v^2c^2+uv(c^2+a^2-b^2) \qquad (2)$$

$$c_c^2=u^2b^2+v^2a^2+uv(a^2+b^2-c^2) \qquad (3)$$

اکنون ثابت می‌کنیم که $c_a=c_b=c_c$ اگر و فقط اگر $a=b=c$. روشن است که اگر $a=b=c$، آنگاه $c_a=c_b=c_c$ (از (۱)، (۲) و (۳)). برای اثبات اینکه از $c_a=c_b=c_c$ نتیجه می‌شود $a=b=c$، باید ثابت کنیم دستگاه معادله‌های خطی بر حسب a، b و c (دستگاه (۱)، (۲) و (۳)) جواب یکتایی دارد. این

دستگاه را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم

$$-uva^۲ + vb^۲ + uc^۲ = c_a^۲$$
$$ua^۲ - uvb^۲ + uc^۲ = c_b^۲ = c_a^۲$$
$$ua^۲ + ub^۲ - uvc^۲ = c_c^۲ = c_a^۲$$

پس باید ثابت کنیم دترمینان ضرایب این دستگاه، یعنی

$$D = \det \begin{pmatrix} -uv & v & u \\ u & -uv & v \\ v & u & -uv \end{pmatrix}$$

صفر نیست (ناتکین است). دترمینان را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} D &= u^۳ + v^۳ + ۳u^۲v^۲ - u^۳v^۳ \\ &= u^۲ - uv + v^۲ + ۳u^۲v^۲ - u^۳v^۳ \\ &= ۱ - ۳uv + ۳u^۲v^۲ - u^۳v^۳ = (۱ - uv)^۳ \end{aligned}$$

اما $(u - ۱)u - ۱ = uv - ۱$، و اگر u عددی حقیقی باشد طرف راست این رابطه صفر نیست.

مسألهٔ ۴۶۲. می‌توان نوشت

$$\sin A_۱ \sin A_۲ \cdots \sin A_n = \cos A_۱ \cos A_۲ \cdots \cos A_n$$
$$= (۲^{-n} \sin ۲A_۱ \sin ۲A_۲ \cdots \sin ۲A_n)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant ۲^{-\frac{n}{۲}}$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر

$$\sin ۲A_۱ = \sin ۲A_۲ = \cdots = \sin ۲A_n = ۱$$

این برابریها وقتی درست‌اند که A_iها برابر $\frac{\pi}{۴}$ باشند، و در این حالت شرط مورد نظر برقرار است.

مسألهٔ ۴۶۳. فرض کنید $\pi > \theta \geqslant ۰$. عبارت درجهٔ دوم

$$x^۲ + y^۲ - ۲xy\cos\theta = (x - y\cos\theta)^۲ + y^۲ \sin\theta \qquad (۱)$$

همواره نامنفی است و فقط در صورتی صفر می‌شود که یا $\theta \neq ۰$ و $x = y = ۰$ و یا $\theta = ۰$ و $x = y$.
اکنون فرض کنید $x = b_۱c_۲$، $y = b_۲c_۱$ و $\theta = A_۱ - A_۲$، که در آن A_i زاویهٔ روبه‌رو به ضلع با طول a_i است. در این صورت

$$۲b_ic_i \cos A_i = b_i^۲ + c_i^۲ - a_i^۲$$
$$b_ic_i \sin A_i = ۲\Delta_i\,, \qquad i = ۱, ۲$$

پس از (۱) به‌دست می‌آوریم

$$b_1^2c_2^2 + b_2^2c_1^2 - \frac{1}{2}(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2)(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) - 8\Delta_1\Delta_2 \geqslant 0$$

که با نابرابری مطلوب هم‌ارز است. برای اینکه برابری برقرار باشد باید $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ و $A_1 = A_2$. بنابراین دو مثلث باید متشابه باشند. برای مطالعهٔ برهانهای دیگر و بحث بیشتر، نگاه کنید به

D. Pedoe, Thinking Geometrically, *Amer. Math. Monthly*, 77 (1970) 711-721.

O. Bottema, M.S. Klamkin, Joint triangle inequalities, *Simon Steven*, 48 (1974/5) 3-8.

مسألهٔ ۴۶۴. بدون کاستن از کلیت استدلال می‌توانیم فرض کنیم $A_1B_1 \geqslant A_2B_2$، و درنتیجه $B_1A_2 \leqslant B_2A_3$. همچنین چون $B_1B_2 = B_2B_3$، نتیجه می‌شود $A_2B_2 \geqslant A_3B_3$، و در این صورت $B_2A_3 \leqslant B_3A_4$. (توجه کنید که $\angle A_2 = \angle A_3$.) با ادامهٔ این استدلال نتیجه می‌گیریم

$$A_1B_1 \geqslant A_2B_2 \geqslant \cdots \geqslant A_nB_n \geqslant A_1B_1$$

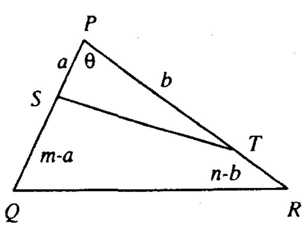
بنابراین طول A_iB_iها با هم برابر است.

مسألهٔ ۴۶۵. چون ۰ آشکارا خوب است، بزرگترین عدد خوب از صفر کوچکتر نیست. گذشته از این، اگر x خوب باشد، نابرابری (۱) وقتی‌که $a = m$ و $b = 0$ برقرار است و از اینجا معلوم می‌شود $x \leqslant \frac{n}{m} \leqslant 1$. بنابراین می‌توانیم توجه خود را به عددهای خوب در بازهٔ $[0, 1]$ معطوف کنیم. به‌ازای هر xای در این فاصله، زاویهٔ یکتایی مانند θ وجود دارد به‌طوری که $\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ و $\cos\theta = \frac{x}{2}$. بنابراین، x، $x = 2\cos\theta$، خوب است به شرطی که به‌ازای هر a و b، $0 \leqslant a \leqslant m$ و $0 \leqslant b \leqslant n$،

$$m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta \geqslant a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \qquad (2)$$

اکنون تعبیر هندسی (۲) را بررسی می‌کنیم (شکل ۲۳۴ را ببینید).

فرض‌کنید PQR مثلثی باشد که در آن $\overline{PQ} = m$، $\overline{PR} = n$ و $\angle QPR = \theta$. به‌ازای عددهای دلخواه a و b فرض‌کنید S نقطه‌ای روی PQ و T نقطه‌ای روی PR باشد به‌طوری که $\overline{PS} = a$ و $\overline{PT} = b$. بنابر قانون کسینوسها در مثلث، (۲) با این شرط هم‌ارز است: به‌ازای هر S روی PQ و هر T روی PR،



شکل ۲۳۴

$$\overline{QR}^2 \geqslant \overline{ST}^2 \qquad (3)$$

و این هم‌ارز است با $\overline{QR}^2 \geqslant \overline{PQ}^2$ (زیرا (۳) برقرار است اگر و فقط اگر QR بلندترین ضلع $\triangle PQR$ باشد). بنابراین، x خوب است اگر و فقط اگر

$$m^2 + n^2 - mnx = m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta \geqslant m^2$$

یعنی $\frac{n}{m} \geqslant x \geqslant 0$؛ پس بزرگترین عدد خوب $\frac{n}{m}$ است.

مسألهٔ ۴۶۶. $(n+1)$ضلعی دلخواهی را با طول ضلعهای a_1، a_2، $\cdots$ و a_{n+1} در نظر بگیرید. در این صورت، بنابر نابرابری میانگین توانی، به‌ازای $m \geqslant 1$،

$$\left(\frac{a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

که در آن برابری برقرار است اگر و فقط اگر $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. همچنین، بنابر نابرابری مثلثی

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant a_{n+1}$$

بنابراین

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_n^m \geqslant \frac{a_{n+1}^m}{n^{m-1}}$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}a_{n+1}$، یعنی در صورتی که چندضلعی تباهیده باشد. حکم مسأله متناظر با حالتی است که $m = 4$ و $n = 3$ (مسألهٔ ۲۷۵ را نیز ببینید).

مسألهٔ ۴۶۷. ابتدا توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$x + y = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + y \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2 y}{4}}$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $x = 2y$. همچنین

$$2x^2 + 2xy + 3y^2 = \frac{2x^2}{8} + \cdots + \frac{2x^2}{8} + \frac{2xy}{4} + \cdots + \frac{2xy}{4} + y^2 + y^2 + y^2$$

$$\geqslant 15\left\{\left(\frac{2x^2}{8}\right)^8 \left(\frac{2xy}{4}\right)^4 (y^2)^3\right\}^{\frac{1}{15}} = 15\left(\frac{x^2 y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

و برابری برقرار است اگر و فقط اگر $y^2 = \frac{2xy}{4} = \frac{2x^2}{8}$ و یا $x = 2y$. بنابراین

$$k = x + y + (2x^2 + 2xy + y^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant (3 + \sqrt{15})\sqrt[3]{\frac{x^2 y}{4}}$$

و

$$\max x^2 y = \frac{4k^3}{(3 + \sqrt{15})^3}$$

مسألهٔ ۴۶۸. روش اثباتمان استقراست. فرض کنید نابرابری طرف چپ (۱) به‌ازای $m = n$ برقرار باشد. در

این صورت

$$\binom{۲n+۲}{n+۱} = \frac{۲(۲n+۱)}{n+۱}\binom{۲n}{n}$$
$$> \frac{۲(۲n+۱)۴^n}{(n+۱)۲\sqrt{n}}$$
$$= \frac{۲(۲n+۱)۴^n}{\sqrt{۴n(n+۱)}\sqrt{n+۱}}$$
$$> \frac{۴^{n+۱}}{۲\sqrt{n+۱}}$$

بنابراین نابرابری طرف چپ (۱) به‌ازای $m = n+۱$ برقرار است، و چون به‌ازای $m = ۲$ برقرار است، به‌ازای هر m برقرار است. برقراری نابرابری طرف راست (۱) به‌طور مشابه ثابت می‌شود.

مسألهٔ ۴۶۹. فرض کنید (x,y) جواب باشد. اگر $x = ۰$ آنگاه یا $y = ۰$ و یا $y = ۱$، و جوابها $(۰,۰)$ و $(۰,۱)$ هستند. اگر $x \neq ۰$، عددگویای یکتایی مانند m، $m \neq -۱$، وجود دارد به‌طوری که $y = mx$، و با جایگذاری به‌دست می‌آوریم

$$x = \frac{۱+m^۲}{۱+m^۳}, \qquad y = \frac{m(۱+m^۲)}{۱+m^۳} \tag{۱}$$

برعکس، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که اگر m عددی گویا باشد، $m \neq -۱$ و x و y در (۱) صدق کنند، (x,y) جواب معادلهٔ مورد نظر است.

مسألهٔ ۴۷۰. اگر $۰ \leqslant k \leqslant n$، احتمال اینکه در پرتاب تصادفی n تاس سالم k شش به‌دست آید برابر است با

$$\binom{n}{k}\left(\frac{۵}{۶}\right)^{n-k}\left(\frac{۱}{۶}\right)^k$$

بنابراین اگر $a = \frac{۵}{۶}$ و $b = \frac{۱}{۶}$، احتمال مورد نظر برابر است با

$$P = \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \binom{n}{۳}a^{n-۳}b^۳ + \binom{n}{۵}a^{n-۵}b^۵ + \cdots$$
$$= \left((a+b)^n \text{ مجموع جمله‌های مرتبهٔ زوج در بسط }\right)$$
$$= \frac{۱}{۲}\{(a+b)^n - (a-b)^n\}$$
$$= \frac{۱}{۲}\left\{۱ - \left(\frac{۲}{۳}\right)^n\right\}$$

مسألهٔ ۴۷۱. فرض کنید سن مادرم M، سن پدرم P، سن برادرم B و سن من I باشد. در این صورت

$$M+P+B+I = ۸۳, \quad ۶P = ۷M, \quad M = ۳I$$

و بنابراین

$$\frac{۵}{۲}M + B = ۸۳$$

چون P و M عددهایی صحیح‌اند، M باید مضربی از ۶ باشد. تنها مقدارهایی از M که در این شرط صدق می‌کنند و به‌ازای آنها B مثبت و کوچکتر از M است، $M = ۳۰$ (و به‌ازای آن، $B = ۸$) و $M = ۲۴$ (و به‌ازای آن، $B = ۲۳$) است. جواب دوم چندان عقلانی نیست! بنابراین، $M = ۳۰$، $B = ۸$، $P = ۳۵$ و $I = ۱۰$. (نسبتاً باهوشم که می‌توانم در ۱۰ سالگی چنین معماهایی را طرح کنم!)

مسألهٔ ۴۷۲. فرض کنید $a = \prod p_i^{a_i}$، $b = \prod p_i^{b_i}$ و $c = \prod p_i^{c_i}$، که در آنها p_iها مقسوم‌علیه‌های اول a، b و c هستند (ممکن است بعضی از نماها صفر باشند). چون

$$(a,b) = \prod p_i^{\min(a_i,b_i)}$$

$$[a,b] = \prod p_i^{\max(a_i,b_i)}, \dots$$

باید ثابت کنیم

$$۲\max(a_i,b_i,c_i) - \max(b_i,c_i) - \max(c_i,a_i) - \max(a_i,b_i)$$
$$= ۲\min(a_i,b_i,c_i) - \min(b_i,c_i) - \min(c_i,a_i) - \min(a_i,b_i)$$

بدون کاستن از کلیت استدلال فرض می‌کنیم به‌ازای هر i، $a_i \geqslant b_i \geqslant c_i$. در این صورت به‌دست می‌آوریم

$$۲a_i - b_i - a_i - a_i = ۲c_i - c_i - c_i - b_i$$

مسألهٔ ۴۷۳. فرض کنید $n = abc$ و N حاصل‌ضرب مطلوب باشد. روشن است که هیچ‌یک از a، b و c برابر ۵ نیست. گذشته از این، $c \neq ۱$. در غیر این صورت، $cba < ۲۰۰$ و درنتیجه $N < ۲۰۰ \times ۱۰^۳ \times ۱۰^۳ = ۲ \times ۱۰^۸$، که نادرست است. می‌توانیم از دو شرط زیر استفاده کنیم:

الف) $a \times b \times c$ باید به ۶ ختم شود؛

ب) چون هر عددی به‌پیمانهٔ ۳ همنهشت با مجموع ارقام خود است،

$$N \equiv ۳۵ \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳)$$

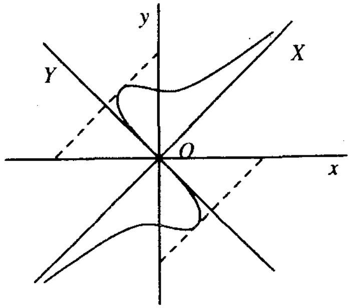
و درنتیجه

$$n \equiv a+b+c \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳)$$

بنابه شرط (الف) مقادیر ممکن n چنین‌اند

$$n = ۸۷۶, ۹۶۴, ۸۴۳, ۷۶۳, ۹۸۳, ۶۳۲, ۶۳۲, ۷۴۲, ۸۶۲, ۹۷۲$$

بنابر شرط (ب) همهٔ این مقادیر غیر از ۹۸۳ و ۶۳۲ قابل قبول نیستند. بنابراین باید $n = ۹۸۳$ و $N = ۳۲۸, ۲۴۵, ۳۲۶$.



شکل ۲۳۵

مسألهٔ ۴۷۴. دستگاه مختصات را ۴۵° دوران می‌دهیم (شکل ۲۳۵ را ببینید). برای این کار فرض می‌کنیم

$$x + y = \sqrt{۲}X$$

$$y - x = \sqrt{۲}Y$$

معادلهٔ مورد نظر به‌این معادله تبدیل می‌شود

$$(۵X + Y)^۲ Y = ۲X$$

رابطهٔ بالا در صورتی که $-X$ و $-Y$ را به‌جای X و Y قرار دهیم تغییر نمی‌کند. همچنین، Y و X باید هم‌علامت باشند و (اگر معادله را به‌عنوان معادله‌ای درجهٔ دوم برحسب X حل کنیم) $Y^۲ \leqslant \frac{۱}{۱۰}$. تنها مجانب حقیقی $Y = ۰$ است؛ $X = ۰$ مماس عطفی در مبدأ است.

مسألهٔ ۴۷۵. می‌دانیم $\frac{۱}{A_{n+۱}} - \frac{۱}{A_n} = n$. بنابراین

$$\frac{۱}{A_۱} - \frac{۱}{A_۰} = ۰$$

$$\frac{۱}{A_۲} - \frac{۱}{A_۱} = ۱$$

$$\vdots$$

$$\frac{۱}{A_{۱۹۹۰}} - \frac{۱}{A_{۱۹۸۹}} = ۱۹۸۹$$

با جمع کردن همهٔ این برابریها به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{A_{۱۹۹۰}} - \frac{۱}{A} = ۱ + ۲ + \cdots + ۱۹۸۹ = (۹۹۵)(۱۹۸۹)$$

و بنابراین

$$A_{۱۹۹۰} = \frac{A}{۱ + (۹۹۵)(۱۹۸۹)A}$$

مسألهٔ ۴۷۶. روش اثباتمان برهان خلف است. فرض کنید همهٔ باقیمانده‌های مثبت، یعنی ۱، ۲، $\cdots$ و ۱۰۰، حاصل شده باشند. حاصل‌ضربها را با $a_۱b_۱$، $a_۲b_۲$، $\cdots$ و $a_{۱۰۰}b_{۱۰۰}$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم

$$a_i b_i \equiv c_i \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۱)$$

در این صورت، بنابر قضیهٔ ویلسون،

$$\prod c_i = ۱۰۰! \equiv -۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۱)$$

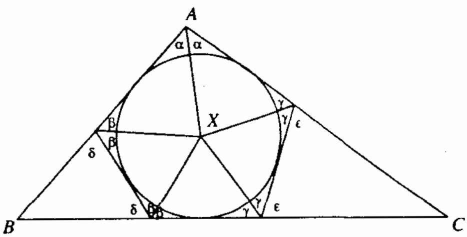
همچنین

$$\prod c_i = \prod a_i b_i \equiv (۱۰۰!)^۲ \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۱)$$

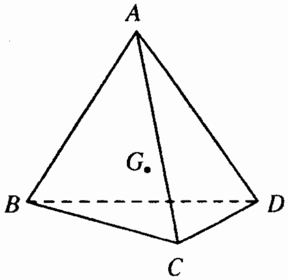
که تناقض است.

مسألهٔ ۴۷۷. فرض کنید $x = y = a$ که در اینجا a عددی دلخواه است. در این صورت $f(0) = ba^2$. چون مقدار $f(0)$ ثابت و a دلخواه است، پس $b = 0$. تابعی حقیقی از این است وجود دارد، چون $f(x) = mx$ در $f(x-y) = f(x) - f(y)$ صدق می‌کند.

مسألهٔ ۴۷۸. چون هر چندضلعی با چهارضلع یا بیشتر از چهارضلع را می‌توان به چند مثلث تقسیم کرد، مسأله تبدیل می‌شود به اینکه چگونه مثلثی منفرجه را به مثلثهایی حاده تقسیم کنیم در شکل ۲۳۶، $\angle BAC$ منفرجه و X مرکز دایرهٔ محاطی داخلی است. زاویه‌های α، β، γ، δ و ϵ آشکارا حاده‌اند و هر یک از زاویه‌های α، β و γ از 45° بزرگتر است. درنتیجه همهٔ زاویه‌ها با رأس X حاده‌اند.



شکل ۲۳۶



شکل ۲۳۷

مسألهٔ ۴۷۹. عکس حکم بیان شده درست نیست. ثابت می‌کنیم که اگر چهاروجهیی فقط متساوی‌الساقین باشد (یعنی یالهای روبه‌رو جفت‌جفت همنهشت باشند) و لزوماً منتظم نباشد، آنگاه O، I و G برهم منطبق‌اند. فرض کنید $ABCD$ چهاروجهیی متساوی‌الساقین با مرکزثقل G باشد (شکل ۲۳۷ را ببینید) و

$$a = \overrightarrow{GA},\quad b = \overrightarrow{GB},\quad c = \overrightarrow{GC},\quad d = \overrightarrow{GD}$$

چون چهاروجهی متساوی‌الساقین است، (با استفاده از نماد $\overrightarrow{V}^2 = \overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{V} = |V|^2$)

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})^2 = (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d})^2$$

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c})^2 = (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{d})^2 \qquad (1)$$

$$(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{d})^2 = (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c})^2$$

چون G مرکزثقل است، $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$، و بنابراین

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^2 = (\overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})^2$$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c})^2 = (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{d})^2 \qquad (2)$$

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d})^2 = (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})^2$$

با بسط توانهای دوم و جمع کردن برابریهای متناظر در (۱) و (۲) به‌دست می‌آوریم

$$\vec{a}^{۲} + \vec{b}^{۲} = \vec{c}^{۲} + \vec{d}^{۲}$$
$$\vec{a}^{۲} + \vec{c}^{۲} = \vec{b}^{۲} + \vec{d}^{۲}$$
$$\vec{a}^{۲} + \vec{d}^{۲} = \vec{b}^{۲} + \vec{c}^{۲}$$

و درنتیجه $\vec{d}^{۲} = \vec{c}^{۲} = \vec{b}^{۲} = \vec{a}^{۲}$. بنابراین $|\overrightarrow{GD}| = |\overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GB}| = |\overrightarrow{GA}|$ و G بر مرکز دایرهٔ محیطی، O، منطبق است.

روشن است که در چهاروجهی متساوی‌الساقین چهاروجه و درنتیجه چهار ارتفاع همنهشت‌اند (حجمها را در نظر بگیرید!). چون G هر میانه (یعنی پاره‌خط واصل از رأسی به مرکزثقل وجه روبه‌روی آن) را به نسبت ۱ : ۳ تقسیم می‌کند، فاصلهٔ G از هر وجه $\frac{۱}{۴}$ ارتفاع متناظرش است. بنابراین، G از چهاروجه همفاصله، و بنابراین بر مرکز دایرهٔ محاطی داخلی، I، منطبق است.

مسألهٔ ۴۸۰. ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر مجموعهٔ متناهی مانند S با ویژگی مورد نظر، عدد دیگری به‌شکل $۲^r - ۳$ وجود دارد که نسبت به هر عضو S اول است. فرض کنید $p_۱$، $p_۲$، $\cdots$ و p_k همهٔ عددهای اولی باشند که دست‌کم یکی از عضوهای S را می‌شمارند و

$$r = (p_۱ - ۱)(p_۲ - ۱)\cdots(p_k - ۱) + ۱$$

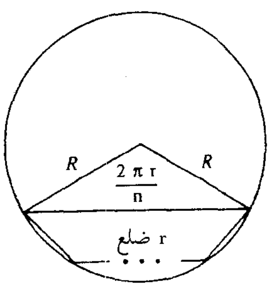
عدد $۲^r - ۳$ را در نظر بگیرید. چون بنابر قضیهٔ فرما،

$$۲^{p_۱ - ۱} \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p_۱)$$

پس

$$۲^r - ۳ = ۲(۲^{p_۱-۱})^{(p_۲-۱)\cdots(p_k-۱)} - ۳$$
$$\equiv ۲ - ۳ = -۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p_۱)$$

و درنتیجه $p_۱ \nmid (۲^r - ۳)$. از استدلالی مشابه نتیجه می‌شود که $p_i \nmid (۲^r - ۳)$، $i \geqslant ۲$، و بنابراین نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.



شکل ۲۳۸

مسألهٔ ۴۸۱. شکل ۲۳۸ را ببینید. به‌آسانی نتیجه می‌شود که (مجموع مورد نظر را با S نشان می‌دهیم)

$$۴R^۲S = \sum_{r=۱}^{n-۱} \csc^۲\left(\frac{r\pi}{n}\right)$$

اکنون روشی معرفی می‌کنیم که می‌توان از آن برای یافتن S و همچنین مجموع تابعهای مثلثاتی دیگر، مانند $\sum \sec^۴ \frac{r\pi}{n}$ و $\sum \csc^۴ \frac{r\pi}{n}$، استفاده کرد. ابتدا توجه کنید که

$$\tan(\theta_۱ + \theta_۲ + \cdots + \theta_n) = \frac{S_۱ - S_۳ + S_۵ - \cdots}{۱ - S_۲ + S_۴ - \cdots}$$

که در آن S_r مجموع حاصل‌ضربهای r جمله‌ای $\tan\theta_1$، $\tan\theta_2$، $\cdots$ و $\tan\theta_n$ است. این نتیجه را می‌توان به‌استقرا ثابت کرد. اکنون فرض کنید $\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta$؛ به‌دست می‌آوریم

$$\tan n\theta = \frac{\binom{n}{1}x - \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{5}x^5 - \cdots}{1 - \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{4}x^4 - \cdots}$$

که در آن $x = \tan\theta$.

چون $\tan n\theta$ به‌ازای $\theta = \frac{r\pi}{n}$، $r = 0, 1, \cdots, n-1$، صفر می‌شود، ریشه‌های

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3}x^2 + \binom{n}{5}x^4 - \cdots = 0$$

عبارت‌اند از $\tan\left(\frac{r\pi}{n}\right)$، $r = 1, 2, \cdots, n-1$. بنابراین

$$\sum_{r=1}^{n-1} \cot\left(\frac{r\pi}{n}\right) = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n-1} \cot^2\left(\frac{r\pi}{n}\right) = 0 + 2\frac{\binom{n}{3}}{\binom{n}{1}} = \frac{1}{3}(n-1)(n-2)$$

سرانجام

$$\sum_{r=1}^{n-1} \csc^2\left(\frac{r\pi}{n}\right) = \sum_{r=1}^{n-1}\left\{1 + \cot^2\left(\frac{r\pi}{n}\right)\right\} = \frac{1}{3}(n^2-1)$$

و

$$S = \frac{n^2-1}{12R^2}$$

تبصره. $\sum \csc^4\left(\frac{r\pi}{n}\right)$ را تعیین کنید.

مسألهٔ ۴۸۲. n^2 مهره را به $\frac{(n^2)!}{(n!)^n}$ طریق می‌توان در n ردیف که هر یک از آنها حاوی n مهره باشد توزیع کرد؛ اما اگر قرار باشد که در هر ردیف یک مهرهٔ قرمز باشد، تعداد راههای توزیع مهره‌ها $n!\frac{(n^2-n)!}{\{(n-1)!\}^n}$ است. بنابراین، احتمال اینکه در هر ردیف یک مهرهٔ قرمز باشد عبارت است از

$$\frac{n^{n-1}(n-1)!(n^2-n)!}{(n^2-1)!}$$

و احتمال مطلوب مکمل این احتمال است.

مسألهٔ ۴۸۳. (حل از ا.پ. استارک، *Math. Mag.* 23(1949)) فرض کنید عدد صحیح مفروض

$$k = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_1 b + a_0$$

باشد، که در آن b مبنای دستگاه شمار است. n عدد صحیح زیر را در نظر بگیرید:

$$k_1 = a_0,\ k_2 = a_1 b + a_0, \ldots,$$
$$k_{n-1} = a_{n-2} b^{n-2} + \cdots + a_1 b + a_0,\ k_n = k$$

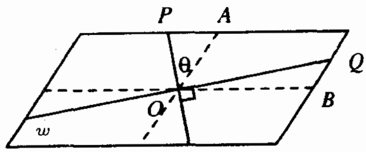
اگر k_jای بر n بخش‌پذیر باشد، مسألهٔ آشکارا با تعویض اولین $n - j$ رقم k با ۰ حل می‌شود. اگر هیچ‌یک از k_jها بر n بخش‌پذیر نباشد، دست‌کم دو تا از k_jها باید با هم همنهشت باشند، مثلاً فرض کنید

$$k_j \equiv k_i\ (n \text{ به‌پیمانهٔ}), \qquad i < j$$

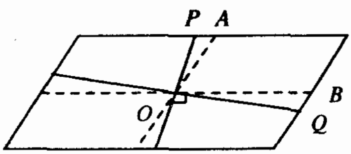
در این صورت، مسأله با تعویض اولین $n - j$ رقم و آخرین i رقم k با ۰ حل می‌شود. بنابر فرض، عدد باقی‌مانده دست‌کم یک رقم ناصفر دارد.

اگر تعداد رقمهای k کمتر از n باشد، گزاره لزوماً درست نیست. عدد $b - 2$ رقمی ۱۱۱۰۰۰۱۱۱ را در نظر بگیرید و فرض کنید $n = b - 1$. اگر هر j رقمی $(0 \leqslant j \leqslant n - 1)$ را با ۰ عوض کنیم، عدد حاصل به‌پیمانهٔ n همنهشت با $n - j - 1$ خواهد بود که صفر نیست.

مسألهٔ ۴۸۴. فرض کنید O مرکز متوازی‌الاضلاع باشد، OA و OB موازی با ضلعها رسم شده باشند، و زاویهٔ بین آنها w (شکلهای ۲۳۹ و ۲۴۰ را ببینید). قطرهای هر لوزی محاط در متوازی‌الاضلاع باید بر هم عمود باشند و مرکز آن باید همان مرکز متوازی‌الاضلاع، یعنی O، باشد (چرا؟). فرض کنید P و Q دو رأس مجاور در لوزی باشند و $\angle POA = \theta$. چون مساحت لوزی $2\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ است، $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ را مینیمم می‌کنیم.



شکل ۲۳۹



شکل ۲۴۰

اکنون، $\angle OPA = \pi - (w + \theta)$ و $\angle OQB = \frac{\pi}{2} \pm \theta$ (۲ حالت وجود دارد). بنابر قانون سینوسها،

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \frac{\sin w}{\sin(w + \theta)}, \qquad \frac{\overline{OQ}}{\overline{OB}} = \frac{\sin w}{\cos \theta}$$

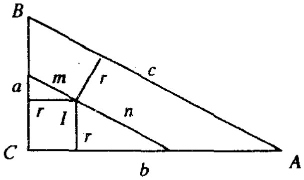
بنابراین

$$\frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} = \frac{\sin^2 w}{\sin(w + 2\theta) \cos \theta} = \frac{2 \sin^2 w}{\sin(w + 2\theta) + \sin w}$$

این عبارت وقتی مینیمم می‌شود که $w + 2\theta = \frac{\pi}{2}$، یعنی وقتی‌که $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{w}{2}$. بنابراین اگر OM و ON به‌ترتیب عمود بر AP و BQ رسم شوند، قطرهای لوزی با مساحت مینیمم به‌ترتیب زاویه‌های AOM و BON را نصف می‌کنند.

ملاحظه. در این راه‌حل فرض شده است که $\overline{AP}$ کوچکتر از $\overline{OB}$ و $\overline{BQ}$ کوچکتر از $\overline{OA}$ است. اگر این فرض درست نباشد، یکی از قطرهای لوزی با مساحت مینیمم قطر کوتاهتر متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

مسألهٔ ۴۸۵. از تشابه مثلثها در شکل ۲۴۱ نتیجه می‌گیریم $a = \frac{rc}{n}$ و $b = \frac{rc}{m}$. همچنین $c^۲ = a^۲ + b^۲$ و $ab = r(a+b+c)$. بنابراین $r = \frac{mn}{\sqrt{m^۲ + n^۲}}$ و



شکل ۲۴۱

$$\frac{r^۲c^۲}{mn} = ab = rc\left(\frac{r}{n} + \frac{r}{m} + ۱\right)$$

پس $c = m + n + \sqrt{m^۲ + n^۲}$ و مساحت مثلث برابر است با

$$\frac{۱}{۲}ab = \frac{r^۲c^۲}{۲mn} = \frac{mn(m+n+\sqrt{m^۲+n^۲})^۲}{۲(m^۲+n^۲)}$$

مسألهٔ ۴۸۶. فرض کنید p_r مجموع حاصل‌ضربهای rجمله‌ای ۴ حرف c، d، e و f باشد. در این صورت $p_۱ = -(a+b)$. همچنین

$$p_۱(p_۱^۲ - ۳p_۲) = \sum c^۳ - ۳p_۳ = -(a^۳ + b^۳) - ۳p_۳$$

بنابراین

$$p_۳ = \frac{۱}{۳}\{(a+b)^۳ - (a^۳+b^۳)\} - p_۲(a+b) = (a+b)(ab - p_۲)$$

پس

$$\begin{aligned}
&(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)\\
&\quad = a^۴ - a^۳(a+b) + a^۲p_۲ + a(a+b)(ab-p_۲) + p_۴\\
&\quad = a^۲b^۲ - abp_۲ + p_۴\\
&\quad = (b+c)(b+d)(b+e)(b+f)
\end{aligned}$$

مسألهٔ ۴۸۷. چون $۲۷۴ \times ۹۹۹۹ = ۲۷۳۹۷۲۶$، کافی است ثابت کنیم که مجموع رقمهای هر مضرب زوج ۹۹۹۹ تا ۲۰۰۰۰اُمین مضرب برابر ۳۶ است.

الف) مضربهای ۹۹۹۹ را تا ۱۰۰۰۰اُمین مضرب در نظر بگیرید. اگر $x < ۱۰۰۰۰$، عدد $۹۹۹۹(x+۱)$، و یا $۱۰^۴x + (۹۹۹۹ - x)$، بیشتر از ۸ رقم ندارد؛ و اگر a، b، c و d رقمهای x باشند، رقمهای $۹۹۹۹(x+۱)$ عبارت‌اند از

$$a, b, c, d, ۹-a, ۹-b, ۹-c, ۹-d$$

که مجموع آنها ۳۶ است.

ب) مضرب زوجی از ۹۹۹۹ را در میان ۱۰۰۰۲اُمین و ۲۰۰۰۰اُمین مضرب در نظر بگیرید. در این صورت، چون

$$(۹۹۹۹)(۱۰۰۰۱) = ۱۰^۸ - ۱$$

اگر مضرب فردی از ۹۹۹۹، حداکثر ۹۹۹۹اُمین مضرب، را با این عدد جمع کنیم، یعنی عددی را که ارقامش عبارت‌اند از

$$a, b, c, d, ۹ - a, ۹ - b, ۹ - c, ۹ - d$$

($۹ - d$ فرد است) با عدد مذکور جمع کنیم، عددی به‌دست می‌آوریم که ارقامش عبارت‌اند از

$$۱, a, b, c, d, ۹ - a, ۹ - b, ۹ - c, ۸ - d$$

و مجموع این رقمها ۳۶ است.

مسألهٔ ۴۸۸. چون $|\overline{z_i}| = |z_i|$ و $z_i\overline{z_i} = ۱$، پس

$$|z_۲z_۳ + z_۳z_۱ + z_۱z_۲| = |z_۱z_۲z_۳| \left|\frac{۱}{z_۱} + \frac{۱}{z_۲} + \frac{۱}{z_۳}\right|$$

$$= \left|\frac{۱}{z_۱} + \frac{۱}{z_۲} + \frac{۱}{z_۳}\right| = |z_۱ + z_۲ + z_۳| = |z_۱ + z_۲ + z_۳|$$

بنابراین، $k = ۱$.

مسألهٔ ۴۸۹. شرط‌بند روی همهٔ اسبها به‌این ترتیب شرط‌بندی می‌کند: او $\frac{b_r}{a_r + b_r}$ به $\frac{a_r}{a_r + b_r}$ شرط می‌بندد که اسب rاُم برنده می‌شود. در این صورت، اگر اسب rاُم برنده شود، سودش $\frac{a_r}{a_r + b_r}$ و زیانش $\sum \frac{b}{a+b} - \frac{b_r}{a_r + b_r}$ است. پس سود نهایی او، یعنی

$$\frac{a_r}{a_r + b_r} - \sum \frac{b}{a+b} + \frac{b_r}{a_r + b_r} = ۱ - \sum \frac{b}{a+b}$$

مقداری مثبت است و بستگی به اینکه کدام اسب برنده می‌شود ندارد.

مسألهٔ ۴۹۰. میانگین حسابی هر تعدادی از عددهای مثبت و نابرابر بزرگتر از میانگین هندسی آنهاست؛ یعنی

$$p_۱ + p_۲ + \cdots + p_m > m \sqrt[m]{p_۱p_۲\cdots p_{m-۱}p_m}$$

اگر از همین قضیه دربارهٔ معکوس این عددها استفاده و دو رابطه را در هم ضرب کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$\sum(p) \cdot \sum\left(\frac{۱}{p}\right) > m^۲$$

فرض کنید p_iها حاصل ضربهای iجمله‌ای ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشند؛ در نتیجه

$$\sum p_i = \binom{n}{r}\frac{a_r}{a_۰}, \quad \sum \frac{۱}{p_i} = \binom{n}{r}\frac{a_{n-r}}{a_n}$$

m، یعنی تعداد جمله‌های هر یک از مجموعها، برابر $\binom{n}{r}$ است. بنابراین

$$\binom{n}{r}\frac{a_r}{a_\circ}\binom{n}{r}\frac{a_{n-r}}{a_n} > \binom{n}{r}^۲$$

و یا

$$a_r a_{n-r} > a_\circ a_n$$

مسألهٔ ۴۹۱. نابرابریهای مورد نظر با این نابرابریها هم‌ارزند

$$(u-v)(w-۱) \geqslant \circ, \quad (w-v)(۱-u) \geqslant \circ$$

اگر $۱ = w = u$، این نابرابریها به‌ازای همهٔ مقادیر v برقرارند.

اگر $۱ = u$ و $w > ۱$، این نابرابریها برقرارند اگر و فقط اگر $v \leqslant u = ۱$.

اگر $۱ = w$ و $u < ۱$، این نابرابریها برقرارند اگر و فقط اگر $v \leqslant w = ۱$.

اگر $w > ۱ > u$، این نابرابریها برقرارند اگر و فقط اگر $v \leqslant u$.

مسألهٔ ۴۹۲. فرض کنید (u,v,w) و (p,q,r) نقطه‌هایی به‌ترتیب روی بیضیوار و صفحه باشند. در این صورت می‌خواهیم

$$D^۲ = (u-p)^۲ + (v-q)^۲ + (w-r)^۲$$

را مینیمم کنیم. بنابر نابرابری کوشی،

$$D^۲(A^۲+B^۲+C^۲) \geqslant \{A(u-p)+B(v-q)+C(w-r)\}^۲$$

$$= \{۱-(Au+Bv+Cw)\}^۲$$

که در آن وقتی برابری برقرار است که (p,q,r) به‌شکل $(u+\lambda A, v+\lambda B, w+\lambda C)$ باشد. چون صفحه و بیضیوار یکدیگر را قطع نمی‌کنند، و چون بیضیوار در همان طرف مبدأ است که صفحه قرار دارد،

$$۱ > Au + Bv + Cw$$

پس برای مینیمم کردن D باید $Au+Bv+Cw$ را ماکسیمم کنیم. بازهم بنابر نابرابری کوشی،

$$\left(\frac{u^۲}{a^۲}+\frac{v^۲}{b^۲}+\frac{w^۲}{c^۲}\right)(a^۲A^۲+b^۲B^۲+c^۲C^۲) \geqslant (Au+Bv+Cw)^۲$$

و برابری وقتی برقرار است که (u,v,w) به‌شکل $(\mu Aa^۲, \mu Bb^۲, \mu Cc^۲)$ باشد. بنابراین

$$\max(Au+Bv+Cw) = \sqrt{a^۲A^۲+b^۲B^۲+c^۲C^۲}$$

و کوتاهترین فاصلهٔ مورد نظر برابر است با

$$D_{m,n} = \frac{۱-\sqrt{a^۲A^۲+b^۲B^۲+c^۲C^۲}}{\sqrt{A^۲+B^۲+C^۲}}$$

و این مقدار وقتی به‌دست می‌آید که

$$(u, v, w) = (\mu A a^۲, \mu B b^۲, \mu C c^۲)$$

$$\mu^۲(A^۲a^۲ + B^۲b^۲ + C^۲c^۲) = ۱$$

$$(p, q, r) = (u + \lambda A, v + \lambda B, w + \lambda C)$$

$$\lambda = \frac{۱ - \sqrt{a^۲A^۲ + b^۲B^۲ + c^۲C^۲}}{A^۲ + B^۲ + C^۲}$$

مسألهٔ ۴۹۳. برای یافتن معادلهٔ خط قائم می‌توانیم ابتدا معادلهٔ خط مماس را بیابیم. اگر $y = mx + b$ بر $y^۲ = ۲ax$ مماس باشد، چندجمله‌ای $(mx + b)^۲ - ۲ax$ فقط یک ریشهٔ دوگانه دارد. بنابراین، مبیّن این چندجمله‌ای باید صفر باشد، یعنی $b = \frac{a}{۲m}$. در این صورت اگر (h, k) نقطهٔ تماس باشد، $k^۲ = ۲ah$ و $k = mh + \frac{a}{۲m}$. و درنتیجه $(km - a)^۲ = ۰$. بنابراین $m = \frac{a}{k}$ و خط قائمی که از (h, k) می‌گذرد این است

$$y - k = -\frac{k}{a}(x - h)$$

از حل کردن همزمان این معادله و $y^۲ = ۲ax$ نتیجه می‌شود

$$k^۲(x - h)^۲ - ۲ak^۲(x - h) + a^۲k^۲ - ۲a^۳x = ۰$$

که درنتیجه (با استفاده از $k^۲ = ۲ah$) $k^۲(x - h) = ۲a(a^۲ + k^۲)$ که از آن طول نقطهٔ برخورد دوم وتر با سهمی به‌دست می‌آید.

نقاط انتهایی وتر (h, k) و $\left(\frac{(۲a^۲ + k^۲)^۲}{۲ak^۲}, \frac{-(۲a^۲ + k^۲)}{k}\right)$ و مربع طول آن، $L^۲$، برابر $\frac{۴}{k^۴}(k^۲ + a^۲)^۳$ است. در این صورت

$$\left(\frac{L^۲}{۴}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{(t^۶ + a^۲)}{t^۴}$$

که در آن $k = t^۳$. سرانجام، بنابر نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی،

$$\frac{t^۶}{۲} + \frac{t^۶}{۲} + a^۲ \geqslant ۳\left[\frac{t^{۱۲}a^۲}{۴}\right]^{\frac{۱}{۳}}$$

بنابراین

$$\left(\frac{L^۲}{۴}\right)^{\frac{۱}{۳}} \geqslant ۳\left[\frac{a^۲}{۴}\right]^{\frac{۱}{۳}}$$

(برابری برقرار است اگر و فقط اگر $t^۶ = ۲a^۲$، و یا $k^۲ = ۲a^۲$) و

$$L_{\min} = ۳a\sqrt{۳}$$

مسألهٔ ۴۹۴. فرض کنید وقتی علی n تومان دارد احتمال بردش u_n باشد. در این صورت چه علی بازی بعدی را ببرد و چه ببازد،

$$u_n = \frac{۱}{۲}u_{n+۱} + \frac{۱}{۲}u_{n-۱}$$
$$u_{n+۱} - ۲u_n + u_{n-۱} = ۰$$

پس با توجه به اینکه $u_۰ = ۰$،

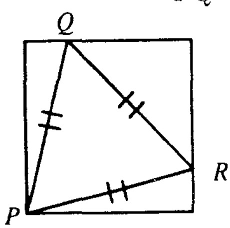
$$u_n - u_{n-۱} = u_{n-۱} - u_{n-۲} = u_{n-۳} = \cdots = u_۲ - u_۱ = u_۱$$

بنابراین $u_n = nu_۱$ و چون $u_{a+b} = ۱$، $u_۱ = \frac{۱}{a+b}$. بنابراین

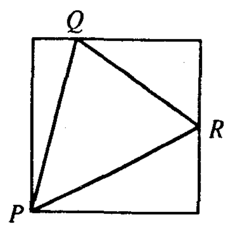
$$u_a = \frac{a}{a+b}$$

مسألهٔ ۴۹۵. اگر هر کدام از نقطه‌ها درون مربع واقع باشد، می‌توان بدون کاستن از طول پاره‌خطها این نقطه را به روی مربع منتقل کرد. وقتی هر سه نقطه روی مربع واقع باشند، در صورتی که هیچ کدام از نقطه‌ها رأس مربع نباشند، می‌توان یکی از نقطه‌ها را، باز هم بدون کاهش طول پاره‌خطها، به رأسی از مربع منتقل کرد. بنابراین، به آرایش شکل ۲۴۲ می‌رسیم و اکنون مسأله مشخص کردن نقاط Q و R است به‌طوری که طول کوتاهترین ضلع مثلث PQR بزرگترین مقدار ممکن باشد. این حالت وقتی روی می‌دهد که PQR متساوی‌الاضلاع باشد (شکل ۲۴۳ را ببینید). درنتیجه $\alpha = ۱۵^\circ$ و

$$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP} = ۲\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

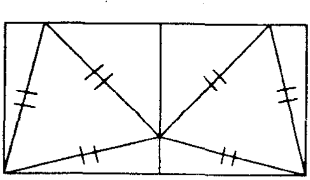


شکل ۲۴۳



شکل ۲۴۲

مسألهٔ ۴۹۶. مستطیل را به دو مربع واحد تقسیم می‌کنیم. بنابر اصل لانه کبوتری، یکی از مربعها حاوی سه تا از نقطه‌هاست. کمترین فاصلهٔ این سه نقطه از هم وقتی ماکسیمم می‌شود که آرایش آنها مانند شکل ۲۴۳ در مسألهٔ ۲۹۵ باشد، و بنابراین جواب به‌صورت شکل ۲۴۴ است.


شکل ۲۴۴

مسألهٔ ۴۹۷. جوابی کلی از رابطهٔ بازگشتی زیر به‌دست می‌آید

$$x_۱ = ۲,\ \ x_r = x_۱x_۲\cdots x_{r-۱} + ۱, \qquad ۱ < r \leqslant n$$

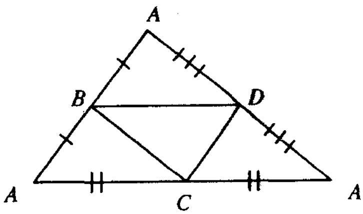
توجه کنید که وقتی ۱ $= n$، $x_۱$ در معادلهٔ مورد نظر صدق می‌کند. فرض کنید عددهای $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$ و x_r در معادلهٔ مورد نظر صدق می‌کنند؛ در این صورت

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\cdots+\frac{۱}{x_{r+۱}}+\frac{۱}{x_۱x_۲\cdots x_{r+۱}}=۱-\frac{۱}{x_۱\cdots x_r}+\frac{۱}{x_{r+۱}}+\frac{۱}{x_۱\cdots x_{r+۱}}$$
$$=۱+\frac{۱}{x_{r+۱}}-\frac{x_{r+۱}-۱}{x_۱\cdots x_{r+۱}}=۱$$

بنابراین از استقرایی ساده معلوم می‌شود که آنچه گفتیم درست است.

به‌ازای ۱,۲ $= n$ جواب یکتاست (البته صرفنظر از جایگشت x_iها). به‌ازای هر n، ۲ $< n$، مجموعه‌ای نامتناهی از جوابها وجود دارد (مسألهٔ ۱۷۹ را هم ببینید).

مسألهٔ ۴۹۸. چهاروجهی $ABCD$ را در امتداد AB، AC و AD ببرید و مانند شکل ۲۴۵ آن را روی صفحه بگسترانید. چون ABA، ACA و ADA خطهایی راست‌اند، B، D و C وسط اضلاع مثلث بیرونی‌اند. به‌این ترتیب $\overline{AB}=\overline{CD}$، $\overline{BC}=\overline{DA}$ و $\overline{CA}=\overline{BD}$.



شکل۲۴۵

مسألهٔ ۴۹۹. فرض کنید a_i، iاُمین جملهٔ دنبالهٔ

$$\{۳,-۲,۱۲,-۸,۴۸,-۳۲,۱۹۲,\cdots\}$$

باشد. می‌دانیم

$$۱=a_۱+a_۲,\quad ۲=a_۲+a_۳+a_۴,\quad ۳=a_۱$$

فرض کنید ۴ $\geqslant n$ و همهٔ عددهای صحیح ۱، ۲، $\cdots$ و ۱ $- n$ را بتوان به‌شکل مجموع a_iهای متمایز نوشت. چهار حالت پیش می‌آید:

۱) $n=۴k$ که در آن $۱\leqslant k<n$. اگر $k=\sum_{i\in S}a_i$ که در آن $S\subset\{۱,۲,۳,\cdots\}$، نمایش مطلوب $n=\sum_{i\in S}a_{i+۲}$ است؛

۲) $n=۴k+۱$ که در آن $۱\leqslant k<n$. اگر $k=\sum_{i\in S}a_i$، آنگاه $n=a_۱+a_۲+\sum_{i\in S}a_{i+۲}$؛

۳) $n=۴k-۲$ که در آن $۲\leqslant k<n$. اگر $k=\sum_{i\in S}a_i$، آنگاه $n=a_۲+\sum_{i\in S}a_{i+۲}$؛

۴) $n=۴k+۳$ که در آن $۱\leqslant k<n$. اگر $k=\sum_{i\in S}a_i$، آنگاه $n=a_۱+\sum_{i\in S}a_{i+۲}$.

مسألهٔ ۵۰۰. در مورد $E^۳$، چهار نیمخط در نظر بگیرید که از مرکز چهاروجهی منتظم به رأسهایش

رسم شده‌اند. بنابر تقارن، همهٔ زاویه‌های بین هر جفت از این نیمخطها با هم برابرند. در مورد E^n، $n+۱$ نیمخط در نظر بگیرید که از مرکز سادکی (چهاروجهیی nبعدی) منتظم رسم شده‌اند. فرض کنید $\overrightarrow{V}_۱$، $\overrightarrow{V}_۲$، $\cdots$ و $\overrightarrow{V}_{n+۱}$ بردارهایی باشند که از مرکز به رأسها رسم شده‌اند. بنابر تقارن (ثابت کنید!) مرکز دایرهٔ محیطی و مرکزثقل سادک یک نقطه‌اند. بنابراین $R = |\overrightarrow{V}_i|$، $i = ۱, ۲, \cdots, n+۱$، و

$$\overrightarrow{V}_۱ + \overrightarrow{V}_۲ + \cdots + \overrightarrow{V}_{n+۱} = \overrightarrow{۰}$$

در این صورت

$$(\overrightarrow{V}_۱ + \overrightarrow{V}_۲ + \cdots + \overrightarrow{V}_{n+۱}) \bullet (\overrightarrow{V}_۱ + \overrightarrow{V}_۲ + \cdots + \overrightarrow{V}_{n+۱}) = \overrightarrow{۰}$$

و یا

$$(n+۱)R^۲ + ۲\binom{n+۱}{۲}\overrightarrow{V}_i \bullet \overrightarrow{V}_j = ۰$$

سرانجام، اگر θ زاویهٔ مشترک بین هر جفت بردار مانند $(\overrightarrow{V}_i, \overrightarrow{V}_j)$ باشد، آنگاه $\cos\theta = -\frac{۱}{n}$ و $\theta = \arccos\left(-\frac{۱}{n}\right)$.

پیوست

اگرچه خلاقیت حل‌کننده برای گشودن گره بسیاری از مسائل این مجموعه کافی است، حل برخی دیگر به دانش مقدماتی برخی از شاخه‌های ریاضی نیاز دارد. در اینجا فهرست مختصری از «ابزار»هایی که ممکن است لازم باشند عرضه می‌کنیم. برای مطالعهٔ جزئیات کاملتر نتیجه‌هایی که نمی‌خواهید (یا نمی‌توانید) خودتان آنها را تحقیق کنید به کتابهای درسی مراجعه کنید.

الف) ترکیبیات

الف ۱. «r فاکتوریل»،

$$r! = r(r-۱)\cdot\ldots\cdot۲\cdot۱$$

تعداد راههای فهرست کردن (به‌ترتیب) r شیءِ متمایز است.

الف ۲. «ترکیب r از n»،

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-۱)\cdots(n-r-۱)}{۱\cdot۲\cdot\ldots\cdot r}$$

تعداد راههای انتخاب r شیء از میان n شیءِ متمایز است، درصورتی‌که ترتیب اشیا مهم نباشد.

الف ۳. نمادگذاری مجموعه: فرض کنید A و B مجموعه باشند. در این‌صورت
«A اجتماع B»،

$$A\cup B = \{x|\ x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

«A اشتراک B»،

$$A\cap B = \{x|\ x\in A \text{ و } x\in B\}$$

«متمم A»،

$$\backslash A = \{x|\ x \notin A\}$$

توجه کنید که $A \cap B \subseteq A \cup B$ ($\subseteq$ به‌معنی «محتوی در» است).

الف ۴. مجموعهٔ تهی که شامل هیچ عضوی نیست با $\varnothing$ نشان داده می‌شود. این مجموعه را گاهی مجموعهٔ پوچ یا خالی نیز می‌نامند.

الف ۵. تعداد عناصر مجموعهٔ A را با $\#A$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم.

الف ۶. اصل لانه‌کبوتری (اصل جعبهٔ دیریشله): اگر n شیء بین کمتر از n جعبه توزیع شوند، جعبه‌ای هست که دست‌کم شامل دو شیء باشد. (با استفاده از این اصل، درصورتی‌که اشیا و جعبه‌ها مناسب انتخاب شوند، بسیاری از مسأله‌های ترکیبیاتی به مسائل بدیهی تبدیل می‌شوند.)

الف ۷. اصل شمول و عدم شمول. فرض کنید S مجموعه‌ای شامل n شیء باشد و $P_۱$، $P_۲$، ... و P_m را m ویژگی بگیرید به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in S$ و هر ویژگی P_i، یا x ویژگی P_i را دارد یا x ویژگی P_i را ندارد. فرض کنید $f(i, j, \dots, k)$ تعداد آن عناصر S باشد که ویژگیهای P_i، P_j، ... و P_k (و شاید ویژگیهای دیگر) را دارند. در این‌صورت، تعداد آن عناصری که هیچ‌یک از ویژگیهای $P_۱$، $P_۲$، ... و P_m را ندارند برابر است با

$$n - \sum_{۱\leq i \leq m} f(i) + \sum_{۱\leq i<j\leq m} f(i,j) + \sum_{۱\leq i<j<\ell\leq m} f(i,j,\ell) + \cdots + (-۱)^m f(۱,۲,\cdots,m)$$

ب) حساب

ب ۱. الگوریتم تقسیم: اگر a و b دو عدد طبیعی باشند، عددهای صحیح نامنفی q (خارج‌قسمت) و r (باقیمانده) وجود دارد به‌طوری‌که $a = bq + r$ و $۰ \leq r < b$.

ب ۲. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک: اگر a و b دو عدد صحیح باشند، می‌گوییم «a، b را می‌شمارد» یا «b مضرب a است» اگر عددی صحیح مانند c وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ac = b$. عدد صحیح a مقسوم‌علیه مشترک m و n است اگر a هم m را بشمارد و هم n را. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و n، که آن‌را با (m,n) یا (m,n)ب.م.م. نمایش می‌دهیم، بزرگترین عدد صحیحی است که هم m را می‌شمارد و هم n را؛ هر مقسوم‌علیه مشترک m و n، (m,n) را می‌شمارد.

ب ۳. دو عدد طبیعی را متباین (یا نسبت به‌هم اول) می‌نامیم اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ باشد.

ب ۴. فرض کنید b عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد. هر عدد طبیعی مانند a را می‌توان به‌صورت

$$a = a_۰ + a_۱ b + a_۲ b^۲ + \cdots + a_n b^n$$

نوشت که در آن به‌ازای هر i، $\circ \leqslant a_i \leqslant b - ۱$. نمایش رقمی a در مبنای b عبارت است از

$$a = a_n a_{n-۱} \cdots a_۱ a_\circ$$

(در حالت کلی، محتوای متن مورد مطالعه مانع از اشتباه شدن این نماد با نماد ضرب می‌شود.)

ب ۵. $[x]$ بزرگترین عدد صحیح نابزرگتر از عدد حقیقی x است؛ مثلاً $-۲ = [-۱/۵]$ و $۳ = [\pi] = [۳]$. توجه کنید که همیشه $x - ۱ < [x] \leqslant x$. اگر n، k و r عددهایی طبیعی باشند به‌طوری‌که $۱ < r \leqslant k - ۱$، $\left[\frac{n}{k}\right]$ تعداد مضربهای مثبتی از k است که از n بزرگتر نیستند؛ $\left[\frac{n+r}{k}\right]$ تعداد عددهای طبیعی نابزرگتر از n است که وقتی بر k تقسیم شوند، باقیمانده $k - r$ می‌شود.

ب ۶. $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m)، «a به‌پیمانهٔ m همنهشت b است»، نمادی است که بیان می‌کند باقیماندهٔ a و b در تقسیم بر m یکسان است (یعنی $a - b$ مضرب m است). این رابطه در قانونهای زیر صدق می‌کند:

اگر $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) و $c \equiv d$ (به‌پیمانهٔ m) آنگاه $a + c \equiv b + d$ (به‌پیمانهٔ m) و $ac \equiv bd$ (به‌پیمانهٔ m).

ب ۷. توانهای دوم:

$$n^۲ \equiv \begin{cases} \circ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴) & \text{وقتی } n \text{ زوج است} \\ ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴) & \text{وقتی } n \text{ فرد است} \end{cases}$$

$$n^۲ \equiv \begin{cases} \circ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۸) & \text{وقتی } n \equiv \circ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴) \\ ۴ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۸) & \text{وقتی } n \equiv ۲ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴) \\ ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۸) & \text{وقتی } n \text{ فرد است} \end{cases}$$

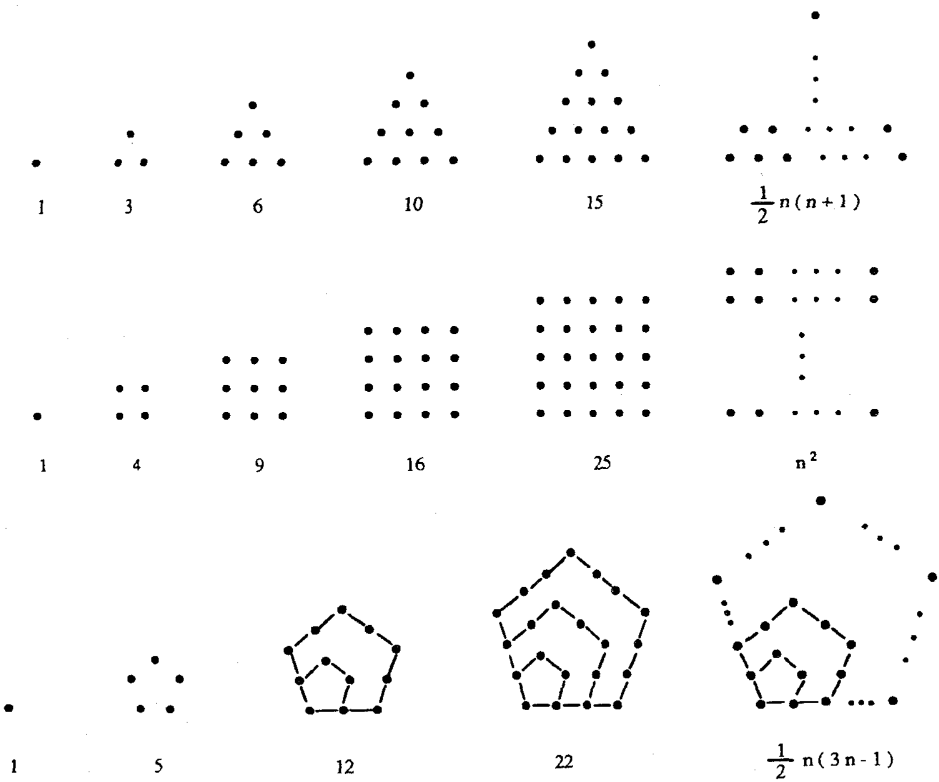
ب ۸. قضیهٔ کوچک فرما. فرض کنید a و n دو عدد صحیح نسبت به‌هم اول باشند. در این‌صورت، $a^{\varphi(n)} \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ n) که در آن $\varphi(n)$ تعداد عددهای صحیح عضو $\{۱, ۲, ۳, \cdots, n - ۱\}$ است که نسبت به n اول‌اند. اگر $n = p$ و p عددی اول باشد، آنگاه

$$a^{p-۱} \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } p) \quad \text{هرگاه} \quad \text{ب.م.م}\ (a, p) = ۱$$

$$a^p \equiv a \ (\text{به‌پیمانهٔ } p) \ \text{به‌ازای هر عدد صحیح مانند } a،$$

اگر k کوچکترین عدد طبیعی باشد که به‌ازای آن $a^k \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ n)، آنگاه k، $\varphi(n)$ را می‌شمارد.

ب ۹. عددهای چندضلعی شکل. اگر نقطه‌هایی را در آرایه‌ای به‌شکل چندضلعیی منتظم آرایش دهیم، تعداد این نقطه‌ها عددی تصویری است. عددهای مثلثی ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ...، عددهای مربعی ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ... و عددهای پنج‌ضلعی شکل ۱، ۵، ۱۲، ۲۲، ... را در شکل ۲۴۶ نشان داده‌ایم.



شکل ۲۴۶

ب ۱۰. معادلهٔ دیوفانتی خطی. فرض کنید a، b و c عددهایی صحیح باشند و g بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد (ب۲). در این‌صورت معادلهٔ $ax+by=c$ برحسب x و y جوابهای صحیح دارد اگر و فقط اگر g، c را بشمارد. اگر $(x_\circ, y_\circ)$ یک جواب باشد، آنگاه

$$\left\{(x_\circ+\frac{bt}{g}, y_\circ-\frac{at}{g}) \mid \text{عددی صحیح است } t\right\}$$

مجموعهٔ همهٔ جوابهای صحیح است.

به‌خصوص، اگر a و b متباین (نسبت به‌هم اول، ب۴) باشند، آنگاه $ax+by=1$ برحسب x و y حل‌پذیر است. برعکس، اگر عددهای صحیح x و y وجود داشته باشند به‌طوری‌که $ax+by=1$، آنگاه a و b باید متباین باشند.

ب ۱۱. ماندهٔ درجهٔ دوم. فرض کنید m عددی طبیعی و a عددی صحیح و با m متباین باشد. در این‌صورت، a (به‌پیمانهٔ m) مانده‌ای درجهٔ دوم است اگر و فقط اگر عددی صحیح مانند x وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x^2 \equiv a$ (به‌پیمانهٔ m). اگر a ماندهٔ درجهٔ دوم نباشد، a را ناماندهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم.

به‌ازای نخستین چند عدد اول مانند p، مانده‌های درجهٔ دوم مثبت به‌پیمانهٔ p که از p بزرگتر نباشند عبارت‌اند از:

مانده‌های درجهٔ دوم	p
۱	۲
۱	۳
۱, ۴	۵
۱, ۲, ۴	۷
۱, ۳, ۴, ۵, ۹	۱۱
۱, ۳, ۴, ۹, ۱۰, ۱۲	۱۳
۱, ۲, ۴, ۸, ۹, ۱۳, ۱۵, ۱۶	۱۷
۱, ۴, ۵, ۶, ۷, ۹, ۱۱, ۱۶, ۱۷	۱۹

ب ۱۲. بخش‌پذیری بر ۹. فرض کنید $a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0$ نمایش رقمی عددی طبیعی در مبنای ۱۰ باشد. باقیماندهٔ تقسیم این عدد بر ۹ برابر است با

$$a_r + a_{r-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

به‌خصوص، وقتی و فقط وقتی عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقمهایش بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

ب ۱۳. بخش‌پذیری بر ۱۱. فرض کنید $a_r a_{r-1} \cdots a_1 a_0$ نمایش رقمی عددی طبیعی در مبنای ۱۰ باشد. این عدد به‌پیمانهٔ ۱۱ همنهشت است با

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^r a_r$$

ب ۱۴. قضیهٔ ویلسون. عدد طبیعی n اول است اگر و فقط اگر

$$(n-1)! \equiv -1 \quad (\text{به‌پیمانهٔ } n)$$

ج) جبر

ج ۱. مجموعیابی

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1} = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مجموع تصاعد هندسی:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$$

مجموع تصاعد حسابی:

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = \frac{n+1}{2}(2a+nd)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

اگر a مستقل از اندیس مجموعیابی باشد،

$$\sum_{i=m}^{n} a = (n-m+1)a$$

که در آن $n-m+1$ تعداد جمله‌های مجموع است.

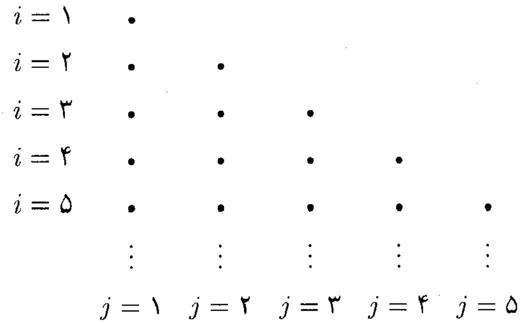
ج ۲. وقتی‌که مقدارهایی با اندیس دوگانه را جمع می‌کنیم، می‌توانیم ترتیب مجموعیابی را عوض کنیم. مثلاً،

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{ii}) \\
&= (a_{11}) + (a_{21}+a_{22}) + (a_{31}+a_{32}+a_{33}) + \cdots + (a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}) \\
&= (a_{11}+a_{21}+a_{31}+\cdots+a_{n1}) + (a_{22}+a_{32}+\cdots+a_{n2}) \\
&\qquad + (a_{33}+\cdots a_{n3}) + \cdots + a_{nn} \\
&= \sum_{j=1}^{n}(a_{jj}+a_{j+1,j}+\cdots+a_{nj}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}
\end{aligned}$$

برای مجسم کردن این عملیات، می‌توانیم a_{ij} را تابعی از جفت مرتب (i,j) درنظر بگیریم که نقطه‌ای را در صفحه نمایش می‌دهد. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ

$$\{(i,j) \mid 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n\}$$

است که می‌توان آن را مانند شکل ۲۴۷ تصویر کرد.



شکل ۲۴۷ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$ ابتدا مجموع a_{ij}ها را در ردیفها محاسبه می‌کند و سپس مجموع ردیفها را با هم جمع می‌کند.
$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$ ابتدا مجموع a_{ij}ها را در ستونها محاسبه می‌کند و سپس مجموع ستونها را با هم جمع می‌کند.

نمونه‌های دیگر مجموعیابی دوگانه را نیز به‌همین صورت می‌توان تحلیل کرد.

ج **۳.** نظریهٔ چندجمله‌ایهای درجهٔ دوم. فرض کنید a، b و c عددهایی حقیقی باشند و $a \neq 0$. ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c$،

حقیقی و متمایزند اگر $b^2 - 4ac > 0$؛
حقیقی و مضاعف‌اند اگر $b^2 - 4ac = 0$؛
متمایز و ناحقیقی‌اند اگر $b^2 - 4ac < 0$.

مجموع ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ و حاصل‌ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ است. با توجه به اینکه می‌توانیم بنویسیم

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a^2}(4ac - b^2)\right]$$

اگر $b^2 - 4ac < 0$، به‌ازای هر x مقدار چندجمله‌ای $ax^2 + bx + c$ هم‌علامت با a است. ریشه‌ها عبارت‌اند از

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ج **۴.** چندجمله‌ایها. قضیهٔ باقیمانده‌ها بیان می‌کند که وقتی چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - a$ تقسیم شود، باقیمانده $p(a)$ است. قضیهٔ عاملها بی‌درنگ از این قضیه نتیجه می‌شود: a ریشهٔ $p(x)$ است اگر و فقط اگر $x - a$، $p(x)$ را بشمارد. هر چندجمله‌ای درجهٔ nاُم دست‌کم یک ریشهٔ مختلط و حداکثر n ریشه دارد. در واقع، هر چندجمله‌ای مانند $p(x)$، هر مقدار مفروضی را به‌ازای حداکثر تعدادی متناهی از مقادیر متمایز x می‌گیرد.

ج **۵.** چندجمله‌ایها (ریشه‌ها و ضرایب). فرض کنید $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ چندجمله‌ایی با

ریشه‌های r_1، r_2، ... و r_n باشد (ریشه‌ها ممکن است تکراری باشند). در این‌صورت

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)$$

و رابطهٔ ضریبها و ریشه‌ها به‌صورت زیر است

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\sum_{i\neq j} r_i r_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_s} = (-1)^s \frac{a_{n-s}}{a_n} \quad \text{(مجموع } \binom{n}{s} \text{ جمله دارد)}$$

$$\vdots$$

$$r_1 r_2 \cdots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

ج ۶. مجموع توانهای ریشه‌های چندجمله‌ای. فرض کنید $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ چندجمله‌ایی با ریشه‌های r_1، r_2، ... و r_n باشد. فرض کنید

$$s_k = r_1^k + r_2^k + \cdots + r_n^k \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

در این‌صورت

$$s_0 = n, \ \ s_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$s_2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}$$

به‌طور کلی، به‌ازای $1 \leqslant k \leqslant n-1$،

$$a_n s_k + a_{n-1}s_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}s_1 + k a_{n-k} = 0$$

و به‌ازای $n \leqslant k$،

$$a_n s_k + a_{n-1}s_{k-1} + \cdots a_0 s_{n-k} = 0$$

ج ۷. چندجمله‌ایها (ریشه‌های تکراری). فرض کنید $p(x)$ چندجمله‌ای و r یک ریشهٔ آن باشد. می‌گوییم r ریشه‌ای با چندگانگی m است اگر و فقط اگر چندجمله‌ای $q(x)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$p(x) = (x-r)^m q(x), \ \ q(r) \neq 0$$

ریشهٔ مضاعف ریشه‌ای با چندگانگی ۲ است. ریشهٔ سه‌گانه ریشه‌ای با چندگانگی ۳ است. ریشهٔ با چندگانگی ۱ را ریشهٔ ساده می‌نامیم.

اگر $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$، مشتق $p(x)$ را با $p'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1$$

$p'(x)$ را به‌صورت زیر نیز می‌نویسیم

$$\lim_{t \to x} \frac{p(t) - p(x)}{t - x}$$

چندگانگی ریشه‌ای از $p(x)$ مانند r، دست‌کم ۲ است اگر و فقط اگر $p'(r) = 0$. (یک راه برای مطمئن شدن از درستی این ادعا این است که بنویسیم

$$p(t) = (t - r) f(t)$$

حال اگر چندگانگی r دست‌کم ۲ باشد، آنگاه $f(r) = 0$ و بنابراین

$$p'(r) = \lim_{t \to r} f(t) = f(r) = 0$$

از طرف دیگر، فرض کنید $p'(r) = 0$. در این‌صورت

$$f(r) = \lim_{t \to r} f(t) = p'(r) = 0$$

پس چندجمله‌ایی مانند $g(x)$ هست به‌طوری‌که $f(t) = (t - r) g(t)$. بنابراین

$$p(t) = (t - r)^2 g(t)$$

و چندگانگی r دست‌کم ۲ است.)

ج ۸. تجزیهٔ چندجمله‌ایهای چندمتغیره. اگر $P(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ چندجمله‌ای مفروضی باشد که می‌خواهیم تجزیه کنیم، یک راه برای یافتن عاملها این است که ببینیم اگر به‌جای متغیر x_0 چندجمله‌ای $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ از متغیرهای دیگر را قرار دهیم، P متحد با صفر می‌شود یا نه. اگر چنین باشد، $x_0 - Q(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ عامل P است.

ج ۹. تجزیه. اگر n عددی طبیعی باشد،

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2} y + \cdots + x y^{n-2} + y^{n-1})$$

و اگر n فرد باشد

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2} y + \cdots - x y^{n-2} + y^{n-1})$$

ج ۱۰. چندجمله‌ایها (تقسیم و باقیمانده). فرض کنید $u(x)$ و $v(x)$ دو چندجمله‌ای باشند. در این‌صورت جفت یکتایی از چندجمله‌ایها مانند $q(x)$ (خارج‌قسمت) و $r(x)$ (باقیمانده) وجود دارد به‌طوری‌که

$$u(x) = q(x) v(x) + r(x)$$

و $\deg r(x) < \deg v(x)$.

ج ۱۱. چندجمله‌ای همگن. چندجمله‌ای چندمتغیره همگن است اگر و فقط اگر درجهٔ همهٔ جمله‌ها یکی باشد. به‌بیان فنی‌تر، $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ همگن از درجهٔ k است اگر و فقط اگر

$$p(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) \equiv t^k p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

مثلاً

$ax + by + cz$ همگن از درجهٔ ۱ است؛

$ax^2 + by^2 + cz^2 + hxy + gxz + fyz$ همگن از درجهٔ ۲ است (a، b، c، f، g و h ضریبهایی ثابت‌اند).

ج ۱۲. چندجمله‌ایهای متقارن. چندجمله‌ای چندمتغیره متقارن است و اگر و فقط اگر تحت هر جایگشت (یا جابه‌جا کردن) متغیرها تغییر نکند.

تابعهای متقارن مقدماتی از ۲، ۳، ... و n متغیر عبارت‌اند از

$$x + y, \qquad xy$$

$$x + y + z, \qquad xy + xz + yz, \qquad xyz$$

$$\sum_{1 \le i \le n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n,$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k,$$

$$\vdots$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

ج ۱۳. هر ریشهٔ چندجمله‌ایی با ضریبهای صحیح و ضریب پیشروِ ۱ که گویا باشد درواقع صحیح است. این مطلب را به این طریق نیز می‌توان بیان کرد که اگر چندجمله‌ایی با ضریبهای صحیح و ضریب پیشروِ ۱ ریشه‌ای ناصحیح داشته باشد، این ریشه ناگویا یا ناحقیقی است.

ج ۱۴. قاعدهٔ علامتهای دکارت. فرض کنید

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

چندجمله‌ایی با ضریبهای حقیقی باشد. علامت ضریبهای غیرصفر (+ یا −) را به‌ترتیب بنویسید. تعداد ریشه‌های مثبت چندجمله‌ای از تعداد تغییر علامتها بیشتر نیست. پس اگر همهٔ ضریبهای غیرصفر مثبت باشند، چندجمله‌ای ریشهٔ مثبت ندارد. مثلاً تعداد ریشه‌های مثبت

$$8x^9 - 7x^6 - 4x^5 + 3x^3 + 1$$

بیشتر از ۲ نیست.

ج ۱۵. قضیهٔ مقدار میانی برای چندجمله‌ایها. اگر چندجمله‌ایی با ضریبهای حقیقی، مقداری منفی را به‌ازای عدد حقیقی u و مقداری مثبت را به‌ازای عدد حقیقی v بگیرد، آنگاه این چندجمله‌ای دست‌کم یک ریشه بین u و v دارد. (این قضیه حالت خاصی از قضیه‌ای است که برای تابعهای پیوسته مانند $\sin x$، e^x یا $\log x$ $(x > ۰)$ برقرار است.)

ج ۱۶. چندجمله‌ایها (تعیین چندجمله‌ای از روی مقادیر آن). فرض کنید n عددی طبیعی باشد و

$$(a_۰, b_۰), (a_۱, b_۱), \cdots, (a_n, b_n)$$

$n+۱$ جفت عدد مختلط باشند. در این‌صورت، دقیقاً یک چندجمله‌ای مانند p از درجهٔ نابزرگتر از n وجود دارد به‌طوری‌که

$$p(a_i) = b_i \qquad (i = ۰, \cdots, n)$$

به‌بیان غیرصوری‌تر، هر چندجمله‌ای از درجهٔ نابیشتر از n، با مشخص کردن $n+۱$ مقدار آن به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

ج ۱۷. عددهای مختلط. هر عدد مختلط مانند $x+yi$ را می‌توان به‌صورت

$$r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

نوشت که در آن $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و $\theta = \arctan\frac{y}{x}$؛ r قدرمطلق و θ آرگومانِ عدد مختلط است. عبارت $\cos\theta + i\sin\theta$ را با $\operatorname{cis}\theta$ نشان می‌دهیم.

ج ۱۸. ریشه‌های واحد. چندجمله‌ای $x^n - ۱$ دارای n ریشهٔ متمایز است:

$$۱, \operatorname{cis}\frac{۲\pi}{n}, \operatorname{cis}\frac{۴\pi}{n}, \cdots, \operatorname{cis}\frac{۲s\pi}{n}, \cdots, \operatorname{cis}\frac{۲(n-۱)\pi}{n}$$

این ریشه‌ها را ریشه‌های nاُم واحد می‌نامیم. هر ریشهٔ nاُم واحد غیر از ۱، ریشهٔ چندجمله‌ای زیر است

$$x^{n-۱} + x^{n-۲} + \cdots + x^۲ + x + ۱$$

ج ۱۹. مزدوجها. اگر $a + b\sqrt{d}$ عددی گنگ باشد و a و b گویا باشند، مزدوج این عدد $a - b\sqrt{d}$ است. حاصل‌ضرب عدد گنگ در مزدوج آن عدد گویای $a^۲ - b^۲d$ است. به‌طور مشابه، حاصل‌ضرب عدد مختلط $x+yi$ (x و y حقیقی‌اند) در مزدوج آن، یعنی $x - yi$، عدد حقیقی مثبت $x^۲ + y^۲$ است.

ج ۲۰. ماتریسها. آرایه‌ای مستطیلی از عددها به‌صورت

$$\begin{pmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ & & & \vdots & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & a_{m۳} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

را که m سطر و n ستون دارد ماتریسی $m \times n$ می‌نامیم. مجموع و حاصل‌ضرب ماتریسهای ۲ × ۲ و ۳ × ۳ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q & c+r \\ d+u & e+v & f+w \\ g+x & h+y & k+z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q & r \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+bu+cx & aq+bv+cy & ar+bw+cz \\ dp+eu+fx & dp+ev+fy & dr+ew+fz \\ gp+hu+kx & gp+hv+ky & gr+hw+kz \end{pmatrix}$$

این تعریفها را می‌توانیم به مجموع دو ماتریس $m \times n$ و حاصل‌ضرب ماتریسی $m \times n$ در ماتریسی $n \times k$ تعمیم دهیم. ضرب شرکت‌پذیر و نسبت به جمع توزیع‌پذیر است، ولی تعویض‌پذیر نیست.

ج ۲۱. فرض کنید

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی برحسب مجهولهای x، y و z باشد. این دستگاه حل‌پذیر است و جوابی یکتا برحسب x، y و z دارد اگر و فقط اگر دترمینان

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

که بنابر تعریف برابر است با

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

صفر نباشد. اگر دترمینان صفر شود، دستگاه ممکن است جواب نداشته باشد یا جوابهای بی‌شماری داشته باشد.

د) نابرابریها

د ۱. قدرمطلق عدد حقیقی x را با $|x|$ نمایش می‌دهیم و آن‌را چنین تعریف می‌کنیم:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \text{ اگر} \\ -x & x < 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x، $|x| \geqslant 0$ و $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$. اگر x و y حقیقی باشند،

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|$$

د ۲. توان دوم یا مجموع توانهای دوم عددهای حقیقی نامنفی است.

د ۳. میانگین حسابی عددهای حقیقی نامنفی دست‌کم برابر با میانگین هندسی آن عددهاست؛ یعنی اگر $a_1, a_2, \cdots, a_n \geqslant 0$، آنگاه

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

به‌خصوص، اگر $a > 0$ و $b > 0$، آنگاه $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

د ۴. نابرابری کوشی‌ـشوارتز. عددهای حقیقی a_1، a_2، ...، a_n، b_1، b_2، ... و b_n مفروض‌اند. دراین‌صورت

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

د ۵. نابرابری مینکوفسکی. فرض کنید $p > 1$. در این‌صورت به‌ازای عددهای حقیقی a_1، a_2، ...، a_n، b_1، b_2، ... و b_n می‌توانیم بنویسیم

$$((a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p)^{\frac{1}{p}}$$

د ۶. نابرابری هولدر. فرض کنید p و q دو عدد حقیقی بزرگتر از ۱ باشند به‌طوری‌که

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

در این‌صورت به‌ازای عددهای حقیقی a_1، a_2، ...، a_n، b_1، b_2، ... و b_n می‌توانیم بنویسیم

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \leqslant (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

وقتی $p = q = 2$، این نابرابری همان نابرابری کوشی‌ـشوارتز است (د۴).

د ۷. میانگینهای تعمیم‌یافته. فرض کنید a_1، a_2، ... و a_n عددهایی مثبت باشند به‌طوری‌که

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$$

به‌ازای عددهای مثبت x_1، x_2، ... و x_n میانگینهای مختلفی را تعریف می‌کنیم:

$$M_0 = \prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k}$$

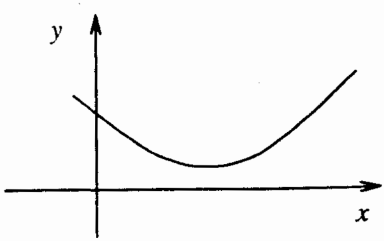
$$M_t = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^t\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (\text{به ازای } t \neq 0 \text{، } t \text{ حقیقی})$$

$$M_\infty = \max_k x_k, \quad M_{-\infty} = \min_k x_k$$

M_1 میانگین حسابی وزندار، M_0 میانگین هندسی وزندار و M_{-1} میانگین همساز وزندار است. به‌ازای $s \leqslant t$، نابرابریهای زیر برقرارند

$$M_{-\infty} \leqslant M_s \leqslant M_t \leqslant M_\infty$$

حالتی‌که اغلب پیش می‌آید حالتی است که $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ (د۳ را ببینید).



شکل ۲۴۸

د ۸. نابرابری ینسن. فرض کنید $f(x)$ تابعی حقیقی‌ـمقدار از متغیری حقیقی باشد. $f(x)$ محدب است اگر و فقط اگر به‌ازای هر u و v در دامنهٔ f و هر t به‌طوری‌که $0 \leqslant t \leqslant 1$،

$$f(tu + (1-t)v) \leqslant tf(u) + (1-t)f(v)$$

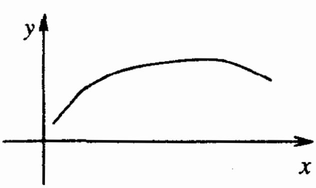
نمودار تابع محدب مانند شکل ۲۴۸ است.

تابع محدب $f(x)$ دارای این ویژگی است: به‌ازای هر u_1، u_2، ... و u_n و هر a_1، a_2، ... و a_n به‌طوری‌که $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$ و $a_i \geqslant 0$، می‌توانیم بنویسیم

$$f(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) \leqslant a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + \cdots + a_nf(u_n)$$

تابع $f(x)$ مقعر است اگر به‌ازای هر u و v و هر t به‌طوری‌که $0 \leqslant t \leqslant 1$،

$$f(tu + (1-t)v) \geqslant tf(u) + (1-t)f(v)$$



شکل ۲۴۹

در واقع، اگر $f(x)$ تابعی مقعر باشد و u_i و a_i به‌صورتی که در بالا تعریف شدند، می‌توانیم بنویسیم

$$f(a_1u_1 + \cdots + a_nu_n) \geqslant a_1f(u_1) + \cdots + a_nf(u_n)$$

نمودار تابع مقعر مانند شکل ۲۴۹ است.

د ۹. نابرابریهای خاصِ زیر آن‌قدر به‌کار می‌آیند که ممکن است ارزش به‌خاطر سپردن داشته باشند:

الف) به‌ازای هر عدد حقیقی مانند t، $t(1-t) \leqslant \frac{1}{4}$.
ب) به‌ازای هر عدد حقیقی مانند t به‌طوری‌که $t > 0$، $t + t^{-1} \geqslant 2$.

ه) هندسه و مثلثات

نتیجه‌های بسیاری از هندسه مورد نیاز است. نتایجی که کامل بیان نکرده‌ایم در هر کتاب استاندارد هندسه می‌توانید پیدا کنید.

$\overline{AB}$ طول پاره‌خط AB را نشان می‌دهد.

ه ۱. مجموع زاویه‌های درونی nضلعی محدب $2n-4$ برابر زاویهٔ قائمه است؛ مجموع زاویه‌های بیرونی ۴ برابر زاویهٔ قائمه است. به‌خصوص، مجموع زاویه‌های مثلث 180° است. هر زاویهٔ بیرونی مثلث با مجموع دو زاویهٔ درونی غیرمجاورش برابر است.

ه ۲. قضیه‌های همنهشتی مثلثها.

ه ۳. قضیه‌های مربوط به تشابه مثلثها.

ه ۴. قضیهٔ فیثاغورس.

ه ۵. قضیه‌های مربوط به زاویه‌هایی که از تقاطع خطی مورب با دو خط موازی ایجاد می‌شوند، خطهای موازی پاره‌خطهایی متناسب روی دو خط مورب ایجاد می‌کنند.

ه ۶. مثلثهایی که بین دو خط موازی هم واقع باشند و قاعده‌های برابر داشته باشند مساحت یکسان دارند.

ه ۷. مساحت هر مثلث درون متوازی‌الاضلاع حداکثر نصف مساحت متوازی‌الاضلاع است. نمادهای $[ABC]$ و $[ABCD]$ را می‌توان برای نمایش مساحت مثلث ABC و مساحت چهارضلعی $ABCD$ به‌کار برد.

ه ۸. طول هر ضلع مثلث کوچکتر از مجموع طولهای دو ضلع دیگر است.

ه ۹. خطی که نقطه‌های وسط دو ضلع مثلثی را به‌هم وصل می‌کند با ضلع سوم مثلث موازی است.

ه ۱۰. فرض کنید ABC مثلثی دلخواه و D نقطه‌ای روی BC باشد به‌طوری‌که AD نیمساز زاویهٔ A باشد. در این‌صورت $\overline{AB} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{CD}$. فرض کنید نیمساز بیرونی A امتداد BC را در E قطع کند. در این‌صورت $\overline{AB} : \overline{BE} = \overline{AC} : \overline{CE}$.

ه ۱۱. زاویه‌هایی که تحت آنها یک کمان یا کمانهایی برابر روی دایره دیده می‌شود باهم برابرند. زاویه‌ای که تحت آن کمانی از دایره از نقطه‌ای بیرون (درون) دایره دیده می‌شود کوچکتر از (بزرگتر از) زاویه‌ای است که تحت آن همان کمان از نقطه‌ای روی دایره دیده می‌شود. زاویه‌ای که تحت آن قطر دایره از

نقطه‌ای روی دایره دیده می‌شود قائمه است. مکان هندسی نقطه‌هایی که از آنها پاره‌خطی تحت زاویه‌ای مفروض دیده می‌شود دو کمان مستدیر است که نقطه‌های انتهاییشان دو سر پاره‌خط‌اند. مکان هندسی رأس مثلثی قائم‌الزاویه با وتر ثابت دایره‌ای به‌قطر وتر مثلث است.

ه ۱۲. فرض کنید ABC مثلثی قائم‌الزاویه، D نقطهٔ وسط وتر BC و P پای عمودی باشد که از A بر BC رسم شده است. در این‌صورت $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD}$ و $\overline{AP}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{CP}$.

ه ۱۳. چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر در آن مجموع هر جفت از زاویه‌های روبه‌رو ۱۸۰° باشد.

ه ۱۴. زاویه‌ای که تحت آن کمانی از دایره از مرکز دایره دیده می‌شود دو برابر زاویه‌ای است که تحت آن همان کمان از نقطه‌ای روی دایره دیده می‌شود.

ه ۱۵. زاویهٔ بین مماسی بر دایره و وتری از دایره که از نقطهٔ تماس می‌گذرد برابر است با زاویه‌ای که تحت آن همان وتر از نقطه‌ای روی دایره واقع در قسمتی که درون زاویه نیست دیده می‌شود. قطری که از نقطه‌ای روی دایره می‌گذرد بر مماس بر دایره در آن نقطه عمود است.

ه ۱۶. نقطه‌ای همراه با خطی که از آن نقطه نمی‌گذرد مفروض است. نزدیکترین نقطهٔ خط به نقطهٔ مفروض پای عمودی است که از نقطهٔ مفروض بر خط رسم می‌شود.

ه ۱۷. فرض کنید P نقطه‌ای بیرون دایرهٔ TAB باشد به‌طوری‌که PT بر دایره مماس و PAB قاطع دایره باشد. در این‌صورت $\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

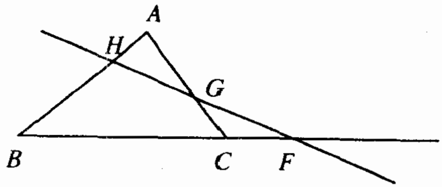
ه ۱۸. اگر APB و CPD دو وتر متقاطع دایرهٔ $ABCD$ باشند، آنگاه

$$\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$$

ه ۱۹. ترسیمها: نیمساز زاویه، عمودمنصف پاره‌خط، خطهای موازی هم، رسم عمود از نقطه به خط، دایره‌ای که از سه نقطهٔ مفروض می‌گذرد، دایره‌ای که از دو نقطهٔ مفروض می‌گذرد و بر خط مفروضی مماس است.

ه ۲۰. قضیهٔ منلائوس. فرض کنید قاطعی ضلعهای BC، CA و (امتداد) AB از مثلث ABC را به‌ترتیب در F، G و H قطع کند (شکل ۲۵۰ را ببینید). در این‌صورت

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CG}}{\overline{GA}} = -1$$



شکل ۲۵۰

ه ۲۱. خط سِوایی مثلث هر پاره‌خطی است که یک رأس مثلث را به نقطه‌ای روی ضلع روبه‌روی آن رأس (یا امتداد آن) وصل کند. قضیهٔ سوا بیان می‌کند که اگر AD، BE و CF سه خط سوایی مثلثی باشند و از نقطهٔ مشترکی بگذرند، آنگاه

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = ۱$$

ه ۲۲. هندسهٔ تحلیلی: فاصلهٔ بین دو نقطه، معادلهٔ خط و معادلهٔ مخروطات.

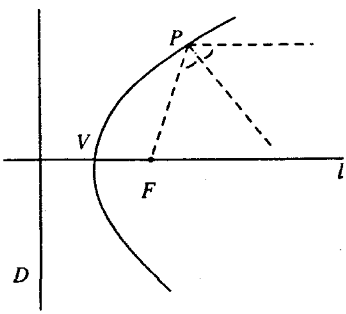
ه ۲۳. مساحت مثلث در صفحهٔ دکارتی. فرض کنید $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$ و $(x_۳, y_۳)$ سه رأس مثلثی باشند. مساحت این مثلث برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\left|(x_۲y_۳ - x_۳y_۲) + (x_۳y_۱ - x_۱y_۳) + (x_۱y_۲ - x_۲y_۱)\right|$$

ه ۲۴. فاصلهٔ نقطه از خط در صفحه. فرض کنید $ax + by = c$ معادلهٔ خطی باشد و $(x_۱, y_۱)$ نقطه‌ای در صفحهٔ دکارتی باشد. فاصلهٔ نقطه تا خط برابر است با

$$\frac{|ax_۱ + by_۱ - c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$$

ه ۲۵. سهمی. شکل ۲۵۱ را ببینید. نقطهٔ F و خط D در صفحه مفروض‌اند. مکان‌هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از F و D به‌یک فاصله‌اند سهمی نام دارد. خط D خط هادی و F کانون سهمی است. خط l که از F می‌گذرد و بر D عمود است محور سهمی است؛ محور در نقطه‌ای مانند V سهمی را قطع می‌کند؛ V رأس سهمی است. فرض کنید P نقطه‌ای روی سهمی باشد. خطی که از P موازی با محور می‌گذرد و خط PF زاویه‌های یکسان با خط قائم بر سهمی در P می‌سازند (این را ویژگی بازتاب می‌نامند).



شکل ۲۵۱

ه ۲۶. مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از دو نقطهٔ متمایز P و Q به‌یک فاصله‌اند صفحه‌ای است که از وسط PQ می‌گذرد و بر PQ عمود است.

ه ۲۷. اگر A، B، C و O نقطه‌هایی در فضا باشند به‌طوری‌که $AO \perp CO$ و $BO \perp CO$، آنگاه اگر P نقطه‌ای روی AB یا امتداد آن باشد، $PO \perp CO$.

ه ۲۸. صفحه یا شکلی فضایی را محدب می‌نامیم به‌شرطی که در صورتی‌که شامل دو نقطهٔ متمایز باشد شامل پاره‌خط واصل آن دو نقطه نیز باشد.

ه ۲۹. چندوجهی شکلی فضایی است که وجه‌های آن چندضلعی مسطح‌اند. چهاروجهی چندوجهی

با چهار وجه مثلثی است. چندوجهی منتظم است اگر و فقط اگر همهٔ وجه‌های آن چندضلعیهای مسطح همنهشت باشند و تعداد یالهای گذرنده از هر رأس یکی باشد. فقط پنج چندوجهی منتظم وجود دارد: چهاروجهی (با وجه‌های مثلثی)، مکعب، هشت‌وجهی، دوازده‌وجهی و بیست‌وجهی. اگر چندوجهی بدون حفره‌ای V رأس، E یال و F وجه داشته باشد، آنگاه $V + F = ۲ + E$، و این رابطه را دستور اویلر می‌نامیم.

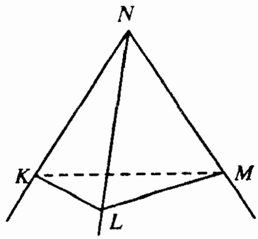
ه ۳۰. شکلی را در فضا مسطح می‌نامیم اگر و فقط اگر صفحه‌ای شامل آن شکل باشد؛ در غیر این‌صورت شکل را کج می‌نامیم. دو خط متنافرند اگر نه یکدیگر را قطع کنند و نه باهم موازی باشند. خطهایی که همه یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند همرس می‌نامیم.

ه ۳۱. مجموعه‌ای از نقطه‌های فضا را همکُره می‌نامیم اگر و فقط اگر همهٔ این نقطه‌ها روی سطح کره‌ای واقع باشند. چهار نقطهٔ ناهمصفحه مفروض‌اند. کرهٔ یکتایی وجود دارد که این چهار نقطه روی آن واقع‌اند. دایره‌ای که روی سطح کره رسم شده باشد و مرکز آن مرکز کره باشد دایرهٔ عظیمهٔ کره می‌نامیم.

ه ۳۲. زاویهٔ بین دو صفحهٔ متقاطع، بنابر تعریف، زاویهٔ بین خطهای قائم بر این دو صفحه است.

ه ۳۳. نابرابری زاویهٔ سه‌وجهی. فرض کنید سه خط همرس زاویه‌های A، B و C را در نقطهٔ تقاطع باهم بسازند (شکل ۲۵۲ را ببینید). در این‌صورت

$$A + B \geqslant C$$



$$A = \angle KNL$$

$$B = \angle LNM$$

$$C = \angle KNM$$

شکل ۲۵۲

ه ۳۴. مخروط در فضا کوچکترین مجموعهٔ محدبی است که شامل مجموعه‌ای مسطح (قاعده) و نقطه‌ای خارجی (رأس) است. مثالهایی از چنین مجموعه‌های محدبی چهاروجهی، هرم و مخروط مستدیر قائم است. حجم مخروط برابر است با یک‌سوم مساحت قاعده ضرب در طول ارتفاع (فاصلهٔ رأس از صفحهٔ قاعده).

ه ۳۵. شکلی هندسی حول نقطهٔ O تقارن مرکزی دارد در صورتی‌که اگر P نقطه‌ای از شکل و O نقطهٔ وسط پاره‌خط PQ باشد، Q نیز در شکل باشد.

ه ۳۶. تجانس (تشابه مرکزی) تبدیلی است که نقطه‌ای مانند O (مرکز تجانس) نقطهٔ ثابت آن است و هر نقطه مانند P را به نقطه‌ای مانند P' تبدیل می‌کند به‌طوری‌که O، P و P' هم‌خط‌اند و نسبت $\overline{OP}/\overline{OP}' = k$ ثابت است (k ممکن است مثبت یا منفی باشد).

ه ۳۷. قضیهٔ دزارگ. اگر رأسهای متناظر دو مثلث با خطهایی که موازی یا همرس‌اند به‌هم وصل شده باشند، نقاط تلاقی ضلعهای متناظر دو مثلث هم‌خط‌اند. عکس این قضیه نیز درست است: اگر نقاط تلاقی ضلعهای متناظر دو مثلث همخط باشند، خطهایی که رأسهای متناظر دو مثلث را به‌هم وصل می‌کنند یا موازی‌اند یا همرس.

ه ۳۸. مختصات هر نقطه از فضا را در دستگاه متشکل از سه محور مختصات دوبه‌دو عمود برهم می‌توان به‌صورت (x, y, z) نوشت. فاصلهٔ بین نقطه‌هایی با مختصات (x, y, z) و (u, v, w) برابر است با

$$\sqrt{(x-u)^۲ + (y-v)^۲ + (z-w)^۲}$$

ه ۳۹. $\overrightarrow{AB}$ بردار از نقطهٔ A به نقطهٔ B را نمایش می‌دهد. نسبت به نقطهٔ ثابت O، هر نقطه‌ای مانند P با بردار $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{OP}$ متناظر است. مجموعهٔ

$$\left\{\overrightarrow{A_iB_i} \mid i = ۱, \cdots, n\right\}$$

از بردارها مستقل خطی است اگر و فقط اگر شرط

$$r_۱\overrightarrow{A_۱B_۱} + \cdots + r_n\overrightarrow{A_nB_n} = \overrightarrow{۰} = \overrightarrow{OO}$$

به‌ازای اسکالرهای حقیقی $r_۱$، ... و r_n، مستلزم $r_۱ = r_۲ = \cdots = r_n = ۰$ باشد. این یعنی اینکه هیچ‌یک از بردارها را نمی‌توان به‌صورت مجموع برداری مضربهایی از بردارهای دیگر نوشت.

ه ۴۰. فرض کنید $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ دو بردار باشند. P نقطه‌ای روی پاره‌خط AB است اگر و فقط اگر به‌ازای عددی مانند t به‌طوری‌که $۰ \leqslant t \leqslant ۱$،

$$\overrightarrow{OP} = (۱-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

ه ۴۱. بردارها در فضا. فرض کنید $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{y}$ دو بردار در فضای سه‌بعدی باشند. اگر θ زاویهٔ بین این دو بردار باشد،

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}| \cos\theta$$

همچنین، اگر $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{y}$ موازی باشند $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ بردار $\overrightarrow{۰}$ است و در غیر این‌صورت برداری است در راستای عمود بر $\overrightarrow{x}$ و عمود بر $\overrightarrow{y}$ (جهت انگشت شست دست راست در صورتی‌که انگشتان دیگر

در جهت $\overrightarrow{x}$ به $\overrightarrow{y}$ خم شده باشند) با بزرگی $|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|\sin\theta$ ($\circ \leqslant \theta \leqslant \pi$).

اگر بردارها در دستگاه مختصات استاندارد با سه محور دوبه‌دو متعامد و بردارهای یکهٔ $\overrightarrow{i}$، $\overrightarrow{j}$ و $\overrightarrow{k}$ درنظر گرفته شوند، یعنی

$$\overrightarrow{x} = x_۱\overrightarrow{i} + x_۲\overrightarrow{j} + x_۳\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{y} = y_۱\overrightarrow{i} + y_۲\overrightarrow{j} + y_۳\overrightarrow{k}$$

آنگاه

$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = x_۱y_۱ + x_۲y_۲ + x_۳y_۳$$

$$\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{y} = (x_۲y_۳ - x_۳y_۲)\overrightarrow{i} + (x_۳y_۱ - x_۱y_۳)\overrightarrow{j} + (x_۱y_۲ - x_۲y_۱)\overrightarrow{k}$$

بزرگی $\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{y}$ را می‌توانیم مساحت متوازی‌الاضلاعی تعبیر کنیم که دو ضلع مجاورش $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{y}$ هستند. حجم متوازی‌السطوحی با ضلعهای همرس $\overrightarrow{x}$، $\overrightarrow{y}$ و $\overrightarrow{z}$ برابر است با

$$\overrightarrow{x}\cdot(\overrightarrow{y}\times\overrightarrow{z}) = \overrightarrow{y}\cdot(\overrightarrow{z}\times\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{z}\cdot(\overrightarrow{x}\times\overrightarrow{y})$$

$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = \circ$ اگر و فقط اگر $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{y}$ متعامد باشند.

ه ۴۲. صفحه و خط در فضا. معادلهٔ صفحه‌ای در فضا که از نقطهٔ مفروض P بگذرد و قائم بر آن در جهت بردار مفروض $\overrightarrow{u}$ باشد، $(\overrightarrow{P} - \overrightarrow{X})\cdot\overrightarrow{u} = \circ$ است. نقطهٔ X روی خطی که از دو نقطهٔ مفروض P و Q می‌گذرد واقع است اگر

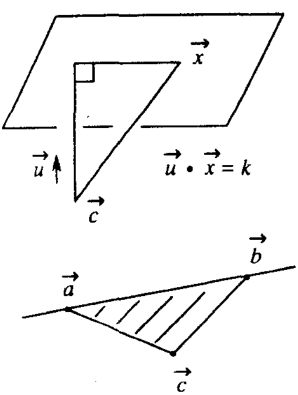
$$\overrightarrow{X} = (۱-t)\overrightarrow{P} + t\overrightarrow{Q},\quad \text{عددی حقیقی است } t$$

اگر $\circ < t < ۱$ نقطهٔ X اکیداً بین P و Q واقع است؛ نقطهٔ وسط پاره‌خط PQ، $\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q})$ است.

همچنین اگر خطی از نقطهٔ P بگذرد و در جهت $\overrightarrow{u}$ باشد، هر نقطه مانند X واقع بر آن را می‌توان به‌صورت $\overrightarrow{P} + t\overrightarrow{u}$ نوشت (t عددی حقیقی است).

فاصلهٔ نقطهٔ $\overrightarrow{c}$ تا صفحه‌ای به معادلهٔ $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{x} = k$ برابر است با

$$\frac{|k - \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{u}|}$$



شکل ۲۵۳

این را می‌توان در شکل ۲۵۳ دید. در این شکل، x نقطهٔ دلخواهی روی صفحه و $\frac{|(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$ طول تصویر $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{c}$ در راستای $\overrightarrow{u}$ است.

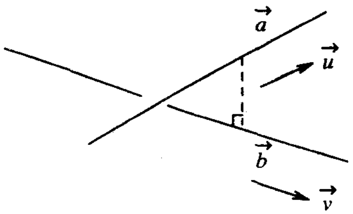
فاصلهٔ نقطهٔ $\overrightarrow{c}$ از خطی که از $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ می‌گذرد برابر است با

$$\frac{|(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})\times(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c})|}{|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|}$$

(صورت این کسر دو برابر مساحت ناحیهٔ هاشورخورده در شکل ۲۵۳، و مخرج آن طول قاعدهٔ مثلث از $\overrightarrow{a}$ تا $\overrightarrow{b}$ است.)

فاصلهٔ نقطهٔ $\overrightarrow{c}$ از خطی که از a در جهت $\overrightarrow{u}$ می‌گذرد برابر است با

$$\frac{|(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c})\times\overrightarrow{u}|}{|u|}$$



شکل ۲۵۴

فاصلهٔ خطی که از a در جهت $\overrightarrow{u}$ می‌گذرد تا خطی که از b در جهت $\overrightarrow{v}$ می‌گذرد برابر است با

$$\frac{|(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v})|}{|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|}$$

خطها را متنافر فرض کرده‌ایم (شکل ۲۵۴ را ببینید).
(درواقع طول تصویر $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ را در راستای $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$، یعنی عمود مشترک دو خط، یافته‌ایم.)

ه ۴۳. نابرابری بطلمیوسی. فرض کنید a، b، c و d طول ضلعهای چهارضلعیی (با همین ترتیب) باشند و u و v طول قطرهای چهارضلعی باشند. در این‌صورت $ac+bd\geqslant uv$ و برابری وقتی و فقط وقتی برقرار است که چهارضلعی محاطی باشد.

ه ۴۴. اگر r شعاع دایره‌ای باشد، مساحت دایره $\pi r^{۲}$ است. مساحت مثلث برابر است با

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۲}bh &= [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{\frac{۱}{۲}}\\ &= \frac{۱}{۲}ab\sin C\end{aligned}$$

که در آن، a، b و c طول ضلعها، C زاویهٔ روبه‌روی ضلع به طول c، h طول ارتفاع وارد بر ضلع به‌طول b و s نصف محیط مثلث است.

ه ۴۵. فرض کنید ABC مثلثی باشد که در آن طول ضلعهای روبه‌روی زاویه‌های A، B و C به‌ترتیب a، b و c هستند. فرض کنید $\triangle$ مساحت این مثلث و R شعاع دایرهٔ محیطی آن باشد که از A، B و C می‌گذرد و مرکز آن نقطهٔ تلاقی عمودمنصفهای سه ضلع مثلث است. در این‌صورت

$$a=۲R\sin A,\quad b=۲R\sin B,\quad c=۲R\sin C$$

$$\triangle=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ca\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A=\frac{abc}{۴R}$$

از این رابطه‌ها قانون سینوسها نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

مرکز دایره‌ای که درون مثلث واقع و بر ضلعهای مثلث مماس است نقطهٔ تلاقی نیمسازهای سه زاویهٔ مثلث است. شعاع دایرهٔ محاطی، r، از رابطهٔ $r(a+b+c) = ۲\triangle$ به‌دست می‌آید که در آن $\triangle$ مساحت مثلث است.

ه ۴۶. فرض کنید r شعاع دایرهٔ محاطی و r_a، r_b و r_c شعاعهای سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC باشند (مثلاً دایرهٔ به‌شعاع r_a در بیرون مثلث بر ضلع BC و امتداد ضلعهای AB و AC مماس است). در این‌صورت

$$r = \frac{\triangle}{s}, \qquad r_a = \frac{\triangle}{s-a}$$

$$r_b = \frac{\triangle}{s-b}, \quad r_c = \frac{\triangle}{s-c}$$

$$r = (s-a)\tan\frac{A}{۲} = a\sec\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲} = ۴R\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

$$r_a = ۴R\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲} = a\sec\frac{A}{۲}\cos\frac{B}{۲}\cos\frac{C}{۲}$$

برای r_b و r_c نیز رابطه‌های مشابهی وجود دارد.

ه ۴۷. اگر α و β زاویه باشند،

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta}$$

ه ۴۸. سه‌تاییهای فیثاغورسی. سه‌تایی (a, b, c) را سه‌تایی فیثاغورسی می‌نامیم اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلعهایی به طولهای a، b و c وجود داشته باشد. اگر c طول وتر باشد این شرط معادل با این است که $c^۲ = a^۲ + b^۲$.

اگر a، b و c عددهایی صحیح باشند، سه‌تایی را اولیه می‌نامیم اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b و c برابر ۱ باشد. همهٔ سه‌تاییهای فیثاغورسی اولیه (از عددهای صحیح) از رابطه‌های پارامتری زیر به‌دست می‌آیند:

$$a = ۲uv, \qquad b = u^۲ - v^۲, \qquad c = u^۲ + v^۲$$

که در آنها u و v نسبت به‌هم اول‌اند و زوجیت متفاوت دارند و $u > v$.

و) آنالیز

و ۱. لگاریتم. فرض کنید b و a دو عدد حقیقی مثبت باشند و $b \neq ۱$. در این‌صورت $x = \log_b a$ (لگاریتم a در مبنای b) اگر و فقط اگر $a = b^x$. رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\log_b(uv) = \log_b u + \log_b v$$

$$\log_b ۱ = ۰, \qquad \log_b b = ۱$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\log_a b \log_b c = \log_a c \qquad (a, b, c > ۰, a, b \neq ۱)$$

$$\log_a b = \frac{۱}{\log_b a} \qquad (a, b > ۰, a, b \neq ۱)$$

و ۲. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. در این‌صورت

$$\max(a, b) = \begin{cases} b & a \leqslant b \\ a & b < a \end{cases}$$

$$\min(a, b) = \begin{cases} a & a \leqslant b \\ b & b < a \end{cases}$$

و ۳. معادلهٔ تفاضلی. a و b را دو عدد حقیقی بگیرید. فرض کنید

$$(x_۱, x_۲, x_۳, \cdots, x_n, \cdots)$$

دنباله‌ای باشد به‌طوری‌که

$$x_n = ax_{n-۱} + bx_{n-۲} \qquad (n = ۳, ۴, ۵, ۶, \cdots) \qquad (*)$$

معادلهٔ $t^۲ = at + b$ معادلهٔ مشخصهٔ $(*)$ است. اگر این معادله دو جواب متمایز داشته باشد، مثلاً $t_۱$ و $t_۲$، آنگاه

$$x_n = c_۱ t_۱^n + c_۲ t_۲^n \qquad (n = ۱, ۲, \cdots)$$

که در آن $c_۱$ و $c_۲$ از دستگاه زیر تعیین می‌شوند

$$x_۱ = c_۱ t_۱ + c_۲ t_۲, \qquad x_۲ = c_۱ t_۱^۲ + c_۲ t_۲^۲$$

از طرف دیگر، اگر معادلهٔ مشخصه فقط یک جواب مانند m داشته باشد (این جواب ریشهٔ مضاعف $t^۲ - at - b$ است)، آنگاه $(*)$ به‌شکل

$$x_n = ۲mx_{n-۱} - m^۲ x_{n-۲} \quad (n = ۳, ۴, ۵, ۶, \cdots)$$

است. در این حالت

$$x_n = (c_۱ + c_۲ n) m^n \quad (n = ۱, ۲, \cdots)$$

که در آن $c_۱$ و $c_۲$ طوری انتخاب شده‌اند که در معادله‌های زیر صدق کنند

$$x_۱ = (c_۱ + c_۲)m, \qquad x_۲ = (c_۱ + ۲c_۲)m^۲$$

مثلاً دنبالهٔ فیبوناچی $(۱, ۱, ۲, ۳, ۵, \cdots)$ در رابطه‌های زیر صدق می‌کند

$$f_۱ = f_۲ = ۱, \qquad f_n = f_{n-۱} + f_{n-۲}$$

در نتیجه معادلهٔ مشخصهٔ آن $t^{۲} = t + ۱$ با جوابهای

$$t_{۱} = \frac{۱}{۲}(۱ + \sqrt{۵}), \qquad t_{۲} = \frac{۱}{۲}(۱ - \sqrt{۵})$$

است. بنابراین

$$f_n = \frac{۱}{\sqrt{۵}} \left\{ \left(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} \right)^n - \left(\frac{۱ - \sqrt{۵}}{۲} \right)^n \right\}$$

و ۴. بازه‌ها:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

و ۵. معادلهٔ اویلر. $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ که در آن θ حقیقی و e مبنای لگاریتم طبیعی است. هر عدد مختلط مانند $z = x + yi$ را می‌توان به‌صورت $re^{i\theta}$ نوشت که در آن

$$r = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

و ۶. z و w را دو عدد مختلط بگیرید. مجموعهٔ

$$\{(۱ - t)z + tw \mid ۰ \leqslant t \leqslant ۱\}$$

پاره‌خطی است که z و w را در صفحهٔ مختلط به‌هم وصل می‌کند. نقطهٔ v که پاره‌خط واصل z و w را به‌نسبت $v - z : w - v = r : s$ تقسیم می‌کند عبارت است از

$$v = \frac{s}{r + s} z + \frac{r}{r + s} w$$

نمایهٔ مسأله‌ها